제로 수학 연습문제 해답 목차

제로 수학 1장 연습문제 해답

01 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{3}i$에서 양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3 \Leftrightarrow x^2=x-1$

$$\begin{aligned} x^4-x^3+3x-2 &= x^2(x^2-x+1)-x^2+3x-2 \\ &= x^2\times 0-(x-1)+3x-2=2x-1=\sqrt{3}i \end{aligned}$$

02 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{27}=\left(\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^{27}=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{27}=i^{27}=(i^4)^6i^3=i^3=-i$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{28}=\left(\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{14}=(-i)^{14}=i^{14}=(i^4)^3i^2=i^2=-1$

$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{29}=\left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^{29}=\left(\dfrac{-2i}{2}\right)^{29}=(-i)^{29}=-i^{29}=-(i^4)^7i=-i$

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{27}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{28}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{29}=(-i)+(-1)-(-i)=-1$

03 $(a+\sqrt{2})(2-b\sqrt{2})=4 \Leftrightarrow (2a-2b)+(2-ab)\sqrt{2}=4 \Leftrightarrow 2a-2b=4,\ 2-ab=0$

즉 $a-b=2,\ ab=2$이므로 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=2^2+4\times 2=12$이다.

04 $A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$

이때 $A_3\cap A_4$의 원소는 3의 배수이면서 동시에 4의 배수이므로 이는 곧 12의 배수이다. 즉 $A_3\cap A_4=A_{12}$이다. 같은 이유로 $A_3\cap A_6=A_6$이다. 또한 $A_{12}\subset A_6$이므로

$$(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)=A_{12}\cup A_6=A_6$$

따라서 구하는 원소의 개수는 $A_6=\{6, 12, \cdots, 96(=6\times 16)\}$에서 16개다.

05 명제 p의 진리집합 P가 명제 q의 진리집합 Q의 부분집합이어야 하므로 $a-2<1 \Leftrightarrow a<3$이다. 즉, 정수 a의 최댓값은 2이다.

06 명제 p의 진리집합 P가 명제 r의 진리집합 R의 부분집합이 아니므로 $b+3\le 8 \Leftrightarrow b\le 5$이다. 즉, 정수 b의 최댓값은 5이다.

07 벤 다이어그램에서 $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$임을 확인할 수 있다.

드 무아브르 법칙에서 $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$이므로

$$n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)=50-n(A\cup B)=5$$

에서 $n(A\cup B)=45$이다. 따라서

$$n((A-B)\cup(B-A))=n((A\cup B)-(A\cap B))=n(A\cup B)-n(A\cap B)=45-12=33$$

이다.

08 조건을 명제 기호로 나타내면 다음과 같다.

(가) [A 그리고 B] $\Rightarrow$ C
(나) [C 또는 D] $\Rightarrow$ E
(다) E $\Rightarrow$ [A 그리고 F]
(라) F $\Rightarrow$ ~E
(마) A $\Rightarrow$ E

A가 간식을 먹는다면 조건 (마)에서 E도 간식을 먹고,
다시 조건 (다)에서 F도 간식을 먹는다.
그럼 조건 (라)에서 E는 간식을 먹지 않으므로 모순이다. 즉, A는 간식을 먹을 수 없다.

B가 간식을 먹는다고 가정할 때 모순되는 조건이 없다. 즉, B는 간식을 먹을 수 있다.

C가 간식을 먹는다면 조건 (나)에서 E도 간식을 먹으므로
조건 (다)에서 A와 F도 간식을 먹는다.
하지만 A는 간식을 먹을 수 없음을 보였으므로 모순이다. 즉, C는 간식을 먹을 수 없다.

D가 간식을 먹는다면 조건 (나)에서 E도 간식을 먹으므로
C와 같은 이유로 간식을 먹을 수 없다.

E가 간식을 먹는다면 조건 (다)에서 F도 간식을 먹고
다시 조건 (라)에서 E는 간식을 먹지 않으므로 모순이다. 즉, E는 간식을 먹을 수 없다.

F가 간식을 먹는다고 가정할 때 모순되는 조건이 없다. 즉, F는 간식을 먹을 수 있다.

따라서 간식을 먹을 수 있는 사람은 B와 F다.

09 $a+b+c=\sqrt{3}$에서 양변을 제곱하면

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=3 \Leftrightarrow ab+bc+ca=1$$

이때

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=0$$

이므로 $a=b=c$이다. 따라서 $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

10 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서 $xy+yz+zx=-1$이고,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

에서 $xyz=-1$이다.

11 $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}=\frac{x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4}{(xyz)^4}=x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4$이다. 이때,

$$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$$

에서 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3$이고,

$$(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2=x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4+2x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)$$

에서 $x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4=3$이므로 구하는 식의 값은 3이다.

12 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$에서 $a+b+1=0$

$b=-a-1$을 대입하여 $f(x)$를 정리하면

$$f(x)=ax^4+(-a-1)x^3+1=ax^3(x-1)-(x^3-1)$$
$$=ax^3(x-1)-(x^2+x+1)(x-1)=(x-1)(ax^3-x^2-x-1)$$

따라서 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지기 위해서는 ax^3-x^2-x-1이 $x-1$로 나누어떨어져야 한다. 즉 ax^3-x^2-x-1에 $x=1$을 대입하면

$$a-3=0$$

에서 $a=3,\ b=-4$이다. 또한

$$f(x)=3x^4-4x^3+1=(x-1)^2(3x^2+2x+1)$$

이다.

13 $x^3-3b^2x+2c^3$이 $(x-a)(x-b)$로 나누어떨어지므로

(i) $x=b$를 대입 : $b^3-3b^3+2c^3=0$에서 $b=c$

(ii) $x=a$를 대입 : $a^3-3ab^2+2c^3=0$에서 $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)=0 \Leftrightarrow a=b$

(i), (ii)에서 $a=b=c$이므로 이 삼각형은 정삼각형이다.

14 $(a+1)(b+1)=ab+(a+b)+1=10$에서 $a+b=5$이다.

또한 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로 $a^3+b^3=5^3-3\times4\times5=65$이다.

따라서 $a^3-ab+b^3=65-4=61$이다.

15 $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x-\frac{3}{x}=-2 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{x}\right)^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{9}{x^2}=10$

$\therefore x^2-3x+\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}=\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{3}{x}\right)=10-3\times(-2)=16$

제로 수학 2장 연습문제 해답

01 $y=2x+4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y-4)$이므로 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-4)$이다.

따라서 $\frac{1}{2}(x-4)=g(4x+3)$에서 $4x+3=t$로 치환하면

$x=\frac{1}{4}(t-3)$이므로 $g(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(t-3)-4\right)=\frac{1}{8}t-\frac{19}{8}$,

즉 $g(x)=\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}$이다. 따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times 19\times\frac{19}{8}=\frac{361}{16}$이다.

02 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $\{x|f(x)=g(x)\}=\{x|f(x)=x\}$이다.

$\frac{x^2}{4}+a=x \Leftrightarrow x^2-4x+4a=0$의 판별식을 D라고 할 때,

$$D/4=4-4a=4(1-a)$$

에서 $a<1$일 때 위 방정식이 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다.

이때 $f(x)=\frac{x^2}{4}+a\ (x\ge 0)$의 그래프에서 $a<0$일 때 $y=f(x)$와 $y=x$가 한 점에서만 만나므로 구하는 a의 범위는 $0\le a<1$이다.

03 함수 $y=\frac{x+1}{x-3}\ (x>4)$의 치역은 $\{y|1\le y<5\}$이고,

함수 $y=\sqrt{4-x}+a\ (x\le 4)$의 치역은 $\{y|y\ge a\}$이므로

주어진 조건을 만족하기 위해서는 $a=5$여야 한다.

따라서 $f(3)=1+a=6$이고, $f(k)=4$이므로 $k>4$이다. 따라서 $\frac{k+1}{k-3}=4 \Leftrightarrow k=\frac{13}{3}$

04 점 P_2와 P_5는 y축 대칭이므로 x좌표의 절댓값은 같고, 부호는 반대다.

따라서 $\cos\theta+\cos 4\theta=0$이다.

또한 점 P_3와 P_4는 y축 대칭이므로 $\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$이다.

같은 이유로 $\cos 5\theta+\cos 10\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$, $\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$이다.

따라서 구하는 값은 0이다.

05 $\theta = \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD}$라고 하면, 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 60\tan 2\theta$이다.

이때 삼각형 ADC에서 $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$이므로 배각공식에 의해

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{DC}} = 60\times\dfrac{4}{3} - 30 = 50$이다.

즉 B에서 D까지의 거리는 50m이다.

06 $y = \log_a x + b$의 그래프가 점 $(1,1)$, $(2,2)$를 지나므로

$1 = \log_a 1 + b$에서 $b = 1$

$2 = \log_a 2 + b$에서 $a = 2$

07 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이므로 $\cos\alpha < 0$, $\sin\beta > 0$이다.

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \Leftrightarrow \sin\beta = \sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$

08 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AE}}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)} = \dfrac{1}{\cos\theta - \sin\theta}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)} = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{AE}} - \overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{2\sin\theta}{1-2\sin^2\theta} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$$

에서 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$이다. $\left(\because\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

09 점 D, E, F의 좌표는 각각 $\mathrm{D}(7,-6)$, $\mathrm{E}(6,8)$, $\mathrm{F}(-10,1)$이므로 무게중심 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{7+6+(-10)}{3}, \frac{-6+8+1}{3}\right) = \mathrm{G}(1,1)$$

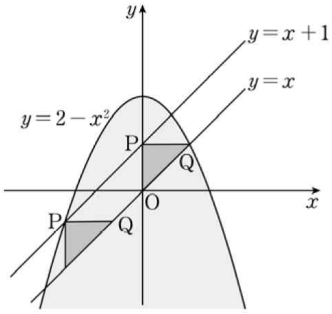
이다. (참고: 이는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표와 같다.)

10 점 C에서 원에 그은 접선이 직선 AB와 평행할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다.
직선 AB의 기울기는 -2이고, 기울기가 -2이면서 주어진 원에 접하는 접선의 방정식은

$$y=-2x\pm 3\sqrt{(-2)^2+1}=-2x\pm 3\sqrt{5}$$

이므로 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=-2x-3\sqrt{5}$이다.

11 집합 A가 나타내는 영역은 곡선 $y=2-x^2$과 그 아랫부분이고,
집합 B가 나타내는 영역은 빗변이 직선 $y=x$ 위에 있고,
가로-세로 길이가 각각 1인 직각이등변삼각형과 그 내부다.



또한 $A\cap B=B \Leftrightarrow B\subset A$이므로 그림에서 a의 최솟값은 곡선 $y=2-x^2$과 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 x 좌표 중 작은 값이다.
이때

$$2-x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0,$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

이므로 따라서 a의 최솟값은 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$이다.

12 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 하면 각 꼭짓점에 이르는 거리의 제곱의 합은

$$\{(a-2)^2+(b-4)^2\}+\{(a+1)^2+(b-2)^2\}+\{(a+1)^2+(b+3)^2\}+\{(a-4)^2+(b+2)^2\}$$

$$=4a^2-8a+4b^2-2b+55=4(a-1)^2+4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{199}{4}$$

이므로 $a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$일 때 최소가 된다. 따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$이다.

13 점 O를 원점으로 두고 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(a,b)$라고 하면 점 A, C의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(a,b+8)$, $C(a+4,b)$이다. 점 A와 C는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$인 원 위의 점이므로

$$a^2+(b+8)^2=(2\sqrt{10})^2,\ \ (a+4)^2+b^2=(2\sqrt{10})^2$$

이다. 두 식을 연립하면 $a=2,\ b=-2$이므로 $3l^2=3(a^2+b^2)=24$이다.

14 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$는 곡선 $f(x,y)=0$을 기준으로 모두 위쪽에 있으므로 함숫값의 부호가 같고, 점 P_4는 곡선 아래에 있으므로 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$에서의 함숫값과 부호가 반대다.

또, 점 P_3는 곡선 $f(x,y)=0$ 위에 있으므로 함숫값이 0이다. 따라서

$$f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)>0,\ f(x_1,y_1)f(x_4,y_4)<0,\ f(x_2,y_2)f(x_3,y_3)=0$$

이다. 즉, ㉠만 옳다.

제로 수학 3장 연습문제 해답

01 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -2\vec{a}+3\vec{b}$

02 $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \Leftrightarrow (-5,1)=(-\alpha+4\beta, 3\alpha+2\beta)$이므로 $\alpha=1,\ \beta=-1$

03 $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AO}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\times\cos\frac{\pi}{3}=-1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

04 $2\vec{a}-3\vec{b}$와 $5\vec{a}+4\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(5\vec{a}+4\vec{b})=10|\vec{a}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}-12|\vec{b}|^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{7}\left(10|\vec{a}|^2-12|\vec{b}|^2\right)$$

또한 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{10|\vec{a}|^2-12|\vec{b}|^2}{7|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{10-12}{7}=-\frac{2}{7}\quad(\because |\vec{a}|=|\vec{b}|)$$

05 점 $\mathrm{A}(-1,2)$에서 직선 $\dfrac{x+1}{2}=3-y \Leftrightarrow x+2y-5=0$까지의 거리는

$$\frac{|-1+2\times2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형 ABC는 높이가 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$인 정삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC 한 변의 길이는 $\dfrac{4}{\sqrt{15}}$이고,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{\sqrt{15}}\times\frac{4}{\sqrt{15}}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{8}{15}.$$

06 삼각형 OAD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 OAD는 이등변삼각형이다.

이때 선분 OA의 중점을 M이라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MD}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-2\times1=-2$$

07 주어진 구면의 식을 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-14z+50=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=9$$

이므로 주어진 구면은 중심이 $(3,-1,7)$이고 반지름의 길이가 3이다.
이때 구면의 중심에서 주어진 평면까지의 거리는

$$\frac{|3\times3-2\times(-1)+6\times7-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{51}{7}$$

이다. 또한 구면의 중심을 지나면서 주어진 평면에 수직인 직선 위에

점 A,B가 위치할 때, 선분 AB의 길이가 최소가 되고, 그 값은 $\frac{51}{7}-3=\frac{30}{7}$이다.

08 평면 α에 수직인 직선의 방향벡터는 평면 α의 법선벡터와 평행하다.
즉, 구하는 직선 l의 방향벡터는 $(5,3,1)$과 평행하므로

구하는 직선 l의 방정식은 $\frac{x-4}{5}=\frac{y-3}{3}=z-5$이다.

09 직선 l 위의 임의의 점을 $(5t+4, 3t+3, t+5)$라고 둘 수 있다.
이를 평면 α의 방정식에 대입하면

$$5(5t+4)+3(3t+3)+(t+5)+1=0 \Leftrightarrow 35t+35=0,\ t=-1$$

이므로 교점 H의 좌표는 $(-1,0,4)$이다.

10 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(-1-4)^2+(0-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{35}$

11 구하는 평면의 법선벡터는 두 벡터 $(3,1,2)$, $(2,2,-1)$에 동시에 수직이므로

$$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\7\\4\end{pmatrix}$$

에서 벡터 $(-5,7,4)$와 평행하다. 따라서 구하는 평면의 방정식은

$$-5(x-1)+7(y+2)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow 5x-7y-4z=7$$

이다.

12 주어진 식을 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z+a^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9-a^2$$

이므로 두 구는 각각 중심이 $(0,0,0)$, $(2,-1,-2)$이고

반지름의 길이가 1, $\sqrt{9-a^2}$이다.

두 구가 서로 외접하므로

(중심 사이의 거리) = (각각의 반지름의 합)

$$\Leftrightarrow \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=1+\sqrt{9-a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2=\sqrt{9-a^2},\ \therefore a=\sqrt{5}$$

13 주어진 식을 정리하면

$$x^2+y^2+z^2+2z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z+1)^2=1,$$
$$x^2+y^2+z^2+4x-2y=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=5$$

이므로 세 구의 중심은 각각 $(0,0,0)$, $(0,0,-1)$, $(-2,1,0)$이다.
세 개의 구의 부피를 각각 이등분하는 평면은 각각의 구의 중심을 지나므로
구하는 평면은 점 $(0,0,0)$, $(0,0,-1)$, $(-2,1,0)$을 지난다.
이때 이 평면의 법선벡터는 벡터 $(0,0,-1)$, $(-2,1,0)$에 동시에 수직이므로

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

에서 벡터 $(1,2,0)$과 평행하다.
따라서 구하는 평면의 방정식은 $x+2y+0z=0 \Leftrightarrow x+2y=0$

14 점 $\mathrm{A}(1,2,3)$에서 평면 $2x-y+z+5=0$까지의 거리는

$$\frac{|2\times1-1\times2+3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

이므로 구하는 구의 반지름의 길이는 $\dfrac{8}{\sqrt{6}}$이다.
또한 직선 AH의 방향벡터는 주어진 평면의 법선벡터와 평행하므로
직선 AH의 방정식은 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$이다.
이때 직선 AH 위의 임의의 점을 $(2t+1,-t+2,t+3)$이라고 할 수 있고,
이를 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$2(2t+1)-(-t+2)+(t+3)+5=0 \Leftrightarrow 6t+8=0,\ t=-\frac{4}{3}$$

을 얻는다. 따라서 점 H의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{10}{3},\dfrac{5}{3}\right)$이다.

15 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있기 위한 필요충분조건은
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 서로 평행한 것이다.
이때 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4\vec{a}+(k-3)\vec{b}$에서 $k=5$이다.

16 평면 α의 법선벡터는 주어진 직선의 방향벡터 $\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$와 평행하다.
따라서 평면 α의 방정식은

$$(x-1)+\frac{1}{3}(y-2)+\frac{1}{2}(z-3)=0 \Leftrightarrow 6x+2y+3z-19=0$$

이다. 이때 평면 α와 점 $\mathrm{B}(3,-1,2)$ 사이의 거리는

$$\frac{|6\times3+2\times(-1)+3\times2-19|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\frac{3}{7}$$

이다.

17 점 H를 원점으로 하고, 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{HE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 생각하면 점 A, G의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(4,0,5)$, $\mathrm{G}(0,3,0)$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(-4,3,-5)$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$이다.

18 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|}$이다.

또한 점 C, F의 좌표는 각각 $\mathrm{C}(0,3,5)$, $\mathrm{F}(4,3,0)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=(4,0,-5)$이다. 따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=9$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{9}{5\sqrt{2}\times\sqrt{41}}=\dfrac{9}{5\sqrt{82}}$

제로 수학 4장 연습문제 해답

01 $a_{11}=2,\ a_{12}=3,\ a_{21}=2,\ a_{22}=4$이므로
행렬 A의 모든 성분의 합은 $2+3+2+4=11$이다.

02 $A^2=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&4\\0&1\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&13\\0&1\end{pmatrix},$
$A^6=A^3A^3=\begin{pmatrix}27&13\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27&13\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}729&364\\0&1\end{pmatrix}$이므로 A^6의 $(1,2)$ 성분은 364이다.

※ 03~05 $A,B\in S$에 대하여 $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}$와 같이 쓸 수 있다.
(단, a,b,c,d는 실수)

03 (참) $A+B=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\-(b+d)&a+c\end{pmatrix}$이므로 $A+B\in S$

04 (참) $AB=\begin{pmatrix}ac-bd&ad+bc\\-(ad+bc)&ac-bd\end{pmatrix}=BA$

05 (참) $AB=O\ \Rightarrow\ ac-bd=0,\ ad+bc=0\ \Rightarrow\ ac^2=bcd=-ad^2,\ bc^2=-acd=-bd^2$
$\Rightarrow\ a(c^2+d^2)=b(c^2+d^2)=0\ \Rightarrow\ a^2(c^2+d^2)=b^2(c^2+d^2)=0$
$\Rightarrow\ (a^2+b^2)(c^2+d^2)=0\ \Rightarrow\ a^2+b^2=0$ 또는 $c^2+d^2=0$
$\Rightarrow\ a=b=0$ 또는 $c=d=0\ \Rightarrow\ A=O$ 또는 $B=O$

06 (거짓) $A=3I-B$이므로 $AB=4B$에서 $(3I-B)B=4B$이다. 따라서 B의 역행렬이 존재하지 않는 경우에서 반례를 찾을 수 있다. 반례 : $A=3I,\ B=O$

07 (참) $B^2=(3I-A)B=3B-AB=-B\Leftrightarrow B^2+B=O$

08 (참) $AB=(3I-B)B=3B-B^2=B(3I-B)=BA$이므로
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3I(A-B)=3(A-B)$

09 $\det(A^2)=\det(5A)\ \Leftrightarrow\ (\det(A))^2=25\det(A)\ \Leftrightarrow\ \det(A)(\det(A)-25)=0$
$\Leftrightarrow\ \det(A)=0$ 또는 $\det(A)=25$
이때 $\det(A)=x$이므로 $x=0$ 또는 $x=25$이다.
따라서 조건을 만족하는 상수 x의 합은 25이다.

10 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

(가)에서 $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 $a=b,\ c=d$, 즉 $B=\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$이다. 또한

$$AB=2A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & a+c \\ x(a+c) & x(a+c) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}\text{에서 } a+c=2$$
$$BA=4B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(1+x) & a(1+x) \\ c(1+x) & c(1+x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 4a \\ 4c & 4c \end{pmatrix}\text{에서 } 1+x=4$$

따라서 $A+B$의 $(1,2)$ 성분과 $(2,1)$ 성분의 합은 $(1+a)+(x+c)=(1+x)+(a+c)=6$이다.

11 케일리-해밀턴 정리에서 $A^2=A+(ab+2)I$이므로 $ab=-2$여야 한다.
따라서 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=10-4=6$이다.

12 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9t-3t^2 \\ 3t+5t^2 \end{pmatrix}$이므로
$x+y=2t^2+12t=2(t+3)^2-18$의 최솟값은 -18이다.

13 $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $a=2, b=3$이므로 $a+b=5$이다.

14 $A^2-A-I=O \Leftrightarrow A(A-I)=I$ 이므로 A의 역행렬은 $A-I$이다.
또한 $A+I=A^2$이므로

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A^{-1})^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(A-I)^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(A^2-2A+I)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$=(-A+2I)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

따라서 $\alpha+\beta=13$이다.

15 (참) B의 역행렬이 존재하면 $B^2=B$에서 양변에 B의 역행렬 B^{-1}을 곱하면 $B=I$이다.

16 (참) $A^2=I$이므로 $(I-A)^2=I-2A+A^2=2(I-A)$이고, 따라서
$$(I-A)^5=2(I-A)^4=\cdots=2^4(I-A)$$

17 (참) $(I-ABA)^2=I-2ABA+ABAABA=I-2ABA+AB^2A$
$$=I-2ABA+ABA=I-ABA$$

※ 18~20 $A, B \in S$, $P \in T$에 대하여 $A=(a\ b)$, $B=(c\ d)$, $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$라고 하자.

(단, $a+b \neq 0$, $c+d \neq 0$, $pq \neq 0$)

18 (참) $PA=\begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}$이므로 $\det(PA)=paqb-pbqa=0$이다.

19 (참) $PA=PB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pc & pd \\ qc & qd \end{pmatrix}$에서 $p(a-c)=0$, $p(b-d)=0$

이때 $pq \neq 0$이므로 $p \neq 0$, $q \neq 0$이고 따라서 $a=c$, $b=d$이다. 즉, $A=B$이다.

20 (참) $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A=(a\ b)$이라 하면 $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p(a+b) \\ q(a+b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$이다.

즉, $p(a+b)=q(a+b)=1$이므로 $(p-q)(a+b)=0$이고 조건에서 $a+b \neq 0$이므로 $p=q$를 얻는다. 즉 $P=\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$에 대해 항상 $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$이다.

21 f는 선형변환이므로 $f(A)=xf(B)+yf(C)=f(xB+yC)$이다.

이때 $A=3B+2C$이므로 $x=3$, $y=2$이고 $x+y=5$이다.

22 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1,0)$을 60° 만큼 회전이동시킨 벡터 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$가 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$이다.

즉 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(a-2, b-2)=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 $a-b=(a-2)-(b-2)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

23 직선 l의 기울기를 a라 하면 직선 l의 방정식은 $y=a(x-1)-1$이다. 이때

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ax-a-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (3-2a)x+2a+2 \\ (1-a)x+a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

에서 $(3-2a)y'-(1-a)x'=1+a$이므로 직선 m의 방정식은

$$(3-2a)y-(1-a)x=1+a$$

이다. 이때 직선 m 또한 점 $(1, -1)$을 지나므로

$$(3-2a)(-1)-(1-a)(1)=3a-4=1+a \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$$

이다. 따라서 직선 l, m의 방정식은 각각

$$l: y=\frac{5}{2}x-\frac{7}{2},\quad m: y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$$

이므로 구하는 부분의 넓이는 점 $(0,0)$, $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$, $(1, -1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times 1=\frac{63}{40}$$

이다.

24 직선 $2x+3y=1$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 다음 원점을 중심으로 30° 만큼 회전하면 처음 직선을 얻는다.

이때 직선 $2x+3y=1$ 위의 두 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}\right)$은 각각

$$\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \left(0, \frac{1}{3}\right) \end{matrix} \xrightarrow{y=-x\text{에 대하여 대칭이동}} \begin{matrix} \left(0, -\frac{1}{2}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \end{matrix} \xrightarrow{30^\circ\text{ 만큼 회전}} \begin{matrix} \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{6}\right) \end{matrix}$$

$\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{6}\right)$으로 옮겨지므로 처음 직선은 이 두 점을 지나는 직선이다.

따라서 처음 직선의 방정식은

$$y=\left(-8+\frac{13}{\sqrt{3}}\right)x+2-\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (24-13\sqrt{3})x+3y+4\sqrt{3}-6=0$$

이다.

제로 수학 5장 연습문제 해답

01 $\dfrac{a_{10}-a_1}{10-1}=\dfrac{-18}{9}=-2$이므로 주어진 등차수열의 공차는 -2이다.

따라서 $a_n=-2n+8$이고

$|a_1|+|a_2|+\cdots|a_{20}|=6+4+2+0+2+4+\cdots+32=284$이다.

02 주어진 등비수열의 첫째 항이 a이고 공비가 r이라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이다. 즉,

$$a_m=ar^{m-1}=n,\ a_{2n}=ar^{2n-1}=m$$

이다. 두 식을 연립하면 $r^{m-2n}=\dfrac{n}{m}$이므로

$$a_{2m-2n}=ar^{2m-2n-1}=ar^{m-1}\times r^{m-2n}=a_m\times\frac{n}{m}=\frac{n^2}{m}$$

03 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로 $2=S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}$이고,

수열 $\{S_{2n+1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로 $-3=S_{2n+1}-S_{2n-1}=a_{2n}+a_{2n+1}$이다.

따라서 $a_{2n+2}-a_{2n}=5$이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 5인 등차수열이다.

$\therefore a_{10}=1+5\times4=21$

04 등차수열의 합은 (평균)×(항의 개수)이다.

따라서 (가)에서 $3\times a_2=20 \Leftrightarrow a_2=\dfrac{20}{3}$이고,

(나)에서 $3\times a_{n-1}=130 \Leftrightarrow a_{n-1}=\dfrac{130}{3}$이다.

(다)에서 $\dfrac{a_2+a_{n-1}}{2}\times n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{150}{3}\times n=25n=250$이므로 $n=10$이다.

05 주어진 두 수열이 모두 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$라고 하고

주어진 점화식의 양변에 $n\to\infty$으로 가는 극한을 취하면

$$\alpha=-\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}$$

이다. 이를 정리하면 $\alpha=\beta=1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}=2$이다.

06 $x^2+2nx-3n=(x+3n)(x-n)=0$에서 $a_n=-3n$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{-3n}=-\dfrac{1}{3}$이다.

07 점 $B_n(n, 0)$에 대하여 삼각형 OA_nB_n은 직각삼각형이므로

$$l_n^2 = \overline{A_nB_n}^2 = n^2 - 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{l_n^2} = 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\times\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$$

08 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots = 1$$

09 $g(1^-) = -1,\ f(-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(g(x)) = f(g(1^-)) = 0$

$f(-1^+) = 1^-,\ g(1^-) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} g(f(x)) = g(f(-1^+)) = -1$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(g(x)) + \lim_{x\to -1+} g(f(x)) = -2$

10 함수 $f(x)$가 $x = n$에서 연속이므로 $\lim_{x\to n-} f(x) = f(n) = \lim_{x\to n+} f(x)$이다. 이때

$$\lim_{x\to n-} f(x) = (n-1)^2 - 3(n-1) + 4 = n^2 - 5n + 8$$

$$\lim_{x\to n+} f(x) = n^2 - 3n + 4 = f(n)$$

이므로 $n^2 - 5n + 8 = n^2 - 3n + 4 \Leftrightarrow 2n = 4$에서 $n = 2$이다.

11 $x = 0$일 때, $f(x) = 0$이고, $x \neq 0$이면 $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$이므로

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1+x^2)^n} = x^k \times \frac{1}{1-1/(1+x^2)} = x^{k-2}(1+x^2)$$

이때 $k-2 < 0$이면 f는 $x = 0$에서 정의되지 않고, $k = 2$이면 $f(x) = 1 + x^2$이므로 $x = 0$에서 연속이 아니다.

즉 $k - 2 > 0$이므로 $f(x)$가 연속함수가 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

12 $g(f(0^+)) = g(0^+) = 4,\ g(f(1^+)) = g(-1^+) = 9$이므로

$\lim_{x\to 0^+} g(f(x)) + \lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = 4 + 9 = 13$이다.

제로 수학 6장 연습문제 해답

01 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2f(x)-f(x^2)}{\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax^4+\cdots}{a^2x^4+\cdots}=\frac{2}{a}=4 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

(나)에서

$$f(0)=0,\ f'(0)=5 \Leftrightarrow c=0,\ b=5$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x,\ f(2)=12$

02 $f(x)$가 $(1-x)^5$으로 나누어떨어지므로 $x^{10}+ax+b=(1-x)^5Q(x)$와 같이 쓸 수 있다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=0$,
양변을 x에 대해 미분하면 $10x^9+a=-5(1-x)^4Q(x)+(1-x)^5Q'(x)$
양변에 $x=1$을 대입하면 $10+a=0,\ a=-10$
따라서 $b=9$이므로 $a=-10,\ b=9$이다.

03 접점의 좌표를 (t, te^t)라고 두면, 접선의 기울기로부터

$$\frac{te^t}{t-1}=(xe^x)'\Big|_{x=t}=e^t(t+1) \Leftrightarrow t^2-t-1=0$$

따라서 방정식 $t^2-t-1=0$의 두 근을 각각 α, β라고 하면
$(1,0)$에서 그은 접선의 접점의 좌표는 각각 $(\alpha, \alpha e^\alpha)$, $(\beta, \beta e^\beta)$이다. 따라서 m_1m_2는

$$m_1m_2=e^\alpha(\alpha+1)e^\beta(\beta+1)=e^{\alpha+\beta}(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$이므로 $m_1m_2=e^1(-1+1+1)=e$이다.

04 두 곡선이 $x=t$에서 접하면 $x=t$에서 함숫값이 같고 동시에 접선의 기울기가 같으므로

$$a+\cos t=\cos^2 t,\quad -\sin t=-2\cos t\sin t$$

따라서 $\sin t=0$ 또는 $\cos t=\frac{1}{2}$이다.

$\sin t=0$일 때, $\cos t=1$ 또는 $\cos t=-1$이므로 $a=0$ 또는 $a=2$이다.

$\cos t=\frac{1}{2}$일 때, $a=-\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 모든 상수 a의 합은 $0+2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

05 $y=f(x)$가 극댓값을 갖기 위한 조건은
다음 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지는 것이다.

$$f'(x)=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x=4x(x^2-3(a-1)x+(a^2-1))=0$$

즉, $g(x)=x^2-3(a-1)x+(a^2-1)=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지기 위해선

$g(0)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \pm 1$

$9(a-1)^2-4(a^2-1)=5a^2-18a+13=(5a-13)(a-1)>0 \Leftrightarrow a<1,\ a>\dfrac{13}{5}$

를 만족해야 한다.

즉, $y=f(x)$가 극댓값을 갖기 위한 조건은 $a<-1,\ -1<a<1,\ a>\dfrac{13}{5}$이다.

$\therefore$ $y=f(x)$가 극댓값을 갖지 않기 위한 조건은 $a=-1,\ 1\leq a\leq \dfrac{13}{5}$이다.

06 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$라 두면 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$에서 함수 $y=f(x)$가 $x=1$에서 극소이자 최소임을 알 수 있다. 또한 구간 $(1,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$f(1)\leq f(x)\leq f(2) \Leftrightarrow 1\leq \dfrac{e^x}{x}\leq \dfrac{e^2}{2} \Leftrightarrow x\leq e^x \leq \dfrac{e^2}{2}x$ (단, $1\leq x\leq 2$)

따라서 $\alpha\leq 1,\ \dfrac{e^2}{2}\leq\beta$이므로 $\beta-\alpha\geq \dfrac{e^2}{2}-1$, 즉 $\beta-\alpha$의 최솟값은 $\dfrac{e^2}{2}-1$이다.

07 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x}^3}$이므로 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\dfrac{2}{(4x+1)^{3/2}}$

따라서 $x=1$에서의 곡률은 $\kappa=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$이고, 곡률 반지름은 $R=\dfrac{1}{\kappa}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$이다.

08 음함수 미분법을 통해 $y^2+x^3=0$의 양변을 x로 미분하면

$$2yy'+3x^2=0,\ y'=-\frac{3x^2}{2y}$$

또한 $2yy'+3x^2=0$의 양변을 다시 x로 미분하면

$$2(y')^2+2yy''+6x=0,\ y''=-\frac{(y')^2+3x}{y}$$

따라서 점 $(-1,1)$에서 $y'=-\dfrac{3}{2},\ y''=\dfrac{3}{4}$이므로 이때의 곡률은 다음과 같다.

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{6}{13^{3/2}}$$

09 $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$ 이므로 곡률 반지름은 $R(x) = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{(1+e^{2x})^{3/2}}{e^x}$ 이다.

이때, $R'(x) = \dfrac{(1+e^{2x})^{1/2}(2e^{2x}-1)}{e^x}$ 에서 $x = -\dfrac{\ln 2}{2}$ 일 때 $R(x)$는 최솟값을 갖는다.

$\therefore$ $R(x)$의 최솟값은 $R\left(-\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ 이다.

10 $f(a) = \displaystyle\int_0^a |e^x - e^a| dx + \int_a^1 |e^x - e^a| dx = \int_0^a (e^a - e^x) dx + \int_a^1 (e^x - e^a) dx$

$$= \int_0^a (e^a - e^x) dx + \int_1^a (e^a - e^x) dx = (2a-1)e^a - \int_0^a e^x dx - \int_1^a e^x dx$$

이므로 $f'(a) = (2a-1)e^a$에서 $a = \dfrac{1}{2}$일 때 $f(a)$는 극소이자 최소가 된다.

11 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n} = 4\int_2^3 f(x)dx$

$$= 4\int_2^3 (3x^2+2x)dx$$

$$= 4 \times \left[x^3 + x^2\right]_2^3 = 96$$

12 $\displaystyle\int_0^2 f(x)g(x)dx = \int_0^2 f(x)f'(x)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \times (f(2)^2 - f(0)^2) = 8$$

13 $\displaystyle\int_0^e g(x)dx$에서 $x = f(y)$로 치환하면

$$\int_0^e g(x)dx = \int_0^1 g(f(y))f'(y)dy = \int_0^1 yf'(y)dy = [yf(y)]_0^1 - \int_0^1 f(y)dy$$

따라서 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx + \int_0^e g(x)dx = 1 \times f(1) - 0 \times f(0) = e$이다.

14 조건 (가)에서 주어진 함수는 y축 대칭이다.
따라서 대칭성과 조건 (나)로부터 $\beta=-\alpha$이고, $x=0$에서 극댓값을 가진다.
즉, 다음이 성립한다.

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)=4x^3-4\alpha^2 x$$

$y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 32이므로

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}|f'(x)|=2\int_{-\alpha}^{0}(4x^3-4\alpha^2 x)\,dx=2\times\left[x^4-2\alpha^2x^2\right]_{-\alpha}^{0}=2\alpha^4=32,\ \alpha=2$$
$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-16x,\ f(x)=x^4-8x^2+C$$

이때, $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값 0을 가지므로 $f(2)=0 \Leftrightarrow C=16$이다.
따라서 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx=2\times\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=\frac{64}{5}-\frac{128}{3}+64=\frac{512}{15}$$

$\therefore 15S=512$