제로 수학 개념 쏙쏙 확인예제 풀이 목차

이용안내

■ 문의 : 도서 담당자(seeun@hanbit.co.kr)

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 $i>0$이거나 $i<0$ 혹은 $i=0$이다.

풀이

거짓 $i>0$의 양변에 i를 곱하면 $i^2>0 \Leftrightarrow -1>0$이므로 모순이다.

같은 방식으로 $i=0$의 양변에 i를 곱하면 $i^2=0 \Leftrightarrow -1=0$이므로 모순이다.

$i<0$인 경우에도 양변에 i를 곱하면 $i^2>0$이다. 음수를 곱하면 부호가 반대가 되기 때문이다. $-1>0$이므로 역시 모순이다.

02 $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$

풀이

거짓 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\cdot i^2=-\sqrt{6}$

03 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{-2}}$

풀이

거짓 (좌변)$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{i}{i^2}=-\dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}$,

(우변)$=\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{-\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$이므로 두 수의 부호가 다르다.

04 $\sqrt{3}$의 소수부분을 a, $\sqrt{2}$의 소수부분을 b라고 할 때, $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$ 값을 구하라.

풀이

$1<\sqrt{3}<2$이므로 $a=\sqrt{3}-1$이고 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $b=\sqrt{2}-1$이다.

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow a-\frac{1}{a}=\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1 \Rightarrow b+\frac{1}{b}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}-3\sqrt{2}$$

※ 05~07 다음을 간단히 하라.

05 $\sqrt{-8}+3\sqrt{-50}-\sqrt{-18}$

풀이

$\sqrt{-8}+3\sqrt{-50}-\sqrt{-18}=\sqrt{8}\,i+3\sqrt{50}\,i-\sqrt{18}\,i=2\sqrt{2}\,i+15\sqrt{2}\,i-3\sqrt{2}\,i=14\sqrt{2}\,i$

06 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}$

풀이

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{-2}}{\sqrt{6}+\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{4-4\sqrt{3}\,i}{8}=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

07 $\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}$

풀이

$\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}=\dfrac{(2+3i)(3+2i)+(2-3i)(3-2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{13i-13i}{(3-2i)(3+2i)}=0$

08 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}(1+i)$, $\alpha\overline{\beta}=1$일 때, $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}$ 값을 구하라.

풀이

$\alpha\overline{\beta}=1$에서 $\overline{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}$이므로 $\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$이며 다음이 성립한다.

$$\alpha+\beta=\alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=\frac{3}{2}(1+i)$$

한편 $\overline{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}$의 양변에 역수를 취하면 $\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\alpha$이므로 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\alpha$이다.

따라서 구하려는 값은 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\alpha=\dfrac{3}{2}(1+i)$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 $324_{(5)}$에서 2와, $211_{(3)}$에서 2는 모두 같은 값이다.

풀이

거짓 $324_{(5)}$에서 2는 $2\times 5^1=10$이고, $211_{(3)}$에서 2는 $2\times 3^2=18$이다.

02 모든 정수는 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수로 분류할 수 있다.

풀이

참 정수 n에 대하여 $n=3q+r\,(0\le r<3)$을 만족하는 정수 q, r은 유일하게 존재한다. 따라서 모든 정수는 $3q$, $3q+1$, $3q+2$ 꼴의 정수로 분류할 수 있다.

03 정수 a, b를 각각 5로 나눈 나머지가 서로 같다면 $a-b$는 5의 배수다.

풀이

참 a, b를 각각 5로 나눈 나머지를 r이라 하면 $a=5q_1+r$, $b=5q_2+r(q_1, q_2$는 정수)과 같이 쓸 수 있다. 이때 $a-b=5(q_1-q_2)$, 즉 $a-b$는 5의 배수다.

04 252를 2진법, 3진법, 7진법으로 각각 나타내라.

풀이

2진법으로 표현 : $252=1\times 2^7+1\times 2^6+1\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 1$

$\Rightarrow 252=11111100_{(2)}$

3진법으로 표현 : $252=1\times 3^5+0\times 3^4+0\times 3^3+1\times 3^2+0\times 3^1+0\times 1$

$\Rightarrow 252=100100_{(3)}$

7진법으로 표현 : $252=5\times 7^2+1\times 7^1+0\times 1$

$\Rightarrow 252=510_{(7)}$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 집합 A, B에 대하여 $n(A) < n(B)$이면 $A \subset B$이다.

풀이

거짓 반례 : $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$

02 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이면 $n(A) < n(B)$이다.

풀이

거짓 반례 : $A \subset A$이지만 $n(A)=n(A)$이다.

03 $[a,b] \subset (c,d)$이면 $c < a$이고 $b < d$이다.

풀이

참 $a,b \in [a,b]$이므로 $a,b \in (c,d)$이다. 따라서 $c < a < d$, $c < b < d$이다.

04 두 집합 $A=\{2a, a+5, 3\}$, $B=\{a^2-2a, -2, 4\}$에 대하여 $A=B$일 때, 상수 a 값을 구하라.

풀이

$3 \in A(=B)$에서 $a^2-2a=3$이므로 a 값은 다음과 같다.

$$a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

이때 $B=\{3,-2,4\}$이다. $a=-1$이면 $A=\{-2,4,3\}$, $a=3$이면 $A=\{6,8,3\}$이다.
따라서 $a=-1$이다.

05 집합 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 $X \subset A$이고 $X \neq A$인 집합 X 중에서 1, 2를 반드시 포함하는 집합의 개수를 구하라.

풀이

A의 진부분집합 중에서 1, 2를 반드시 포함하는 집합은 $\{3,4,5,6\}$의 진부분집합 각각에 1, 2를 포함시킨 것과 같다. $\{3,4,5,6\}$의 부분집합은 2^4개 있으므로 진부분집합의 개수는 $2^4-1=15$개다. 따라서 조건을 만족하는 집합의 개수는 15개다.

06 다음 집합의 진부분집합을 나열하라.

$$A=\{x\,|\,x=3n-2,\ n\text{은 } 1 \leq n \leq 5\text{인 소수}\}$$

풀이

$1 \leq n \leq 5$인 소수는 2, 3, 5이므로 $A=\{4,7,13\}$이다. 따라서 집합 A의 진부분집합은 다음과 같다.

$$\varnothing, \{4\}, \{7\}, \{13\}, \{4,7\}, \{4,13\}, \{7,13\}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01～02 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 $A \subset B$일 때 $A \cup B = B$이다.

풀이

참 벤 다이어그램을 그려보면 쉽게 확인할 수 있다.

02 $A \subset B$일 때 $A \cap B = A$이다.

풀이

참 벤 다이어그램을 그려보면 쉽게 확인할 수 있다.

03 전체집합 $U=\{x \mid x$는 20 이하의 짝수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음과 같다고 하자.

$$A=\{x \mid x\text{는 6의 배수가 아니다.}\},\ B=\{x \mid x\text{는 20 미만이고 4의 배수다.}\}$$

$A \cap B$와 $A \cup B$를 각각 구하라.

풀이

원소나열법으로 집합 A, B를 나타내면 $A=\{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}$, $B=\{4, 8, 12, 16\}$이므로
$A \cup B=\{2, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 20\}$, $A \cap B=\{4, 8, 16\}$이다.

04 학생 60명을 대상으로 양념 치킨과 후라이드 치킨 중 좋아하는 치킨을 조사하였다. 양념 치킨을 좋아하는 학생이 36명, 후라이드 치킨을 좋아하는 학생이 40명, 양념과 후라이드 모두 모두 좋아하지 않는 학생이 8명이다. 이때 양념치킨만 좋아하는 학생의 수를 구하라.

풀이

양념 치킨을 좋아하는 학생의 집합을 S, 후라이드 치킨을 좋아하는 학생의 집합을 F라 하자. 양념과 후라이드를 모두 좋아하지 않은 학생이 8명이므로, $n(S \cup F) = 60 - 8 = 52$이다.

$$
\begin{aligned}
& n(S \cup F) = n(S) + n(F) - n(S \cap F) \\
\Leftrightarrow\ & 52 = 36 + 40 - n(S \cap F) \\
\Leftrightarrow\ & n(S \cap F) = 24
\end{aligned}
$$

즉 양념 치킨과 후라이드 치킨을 모두 좋아하는 학생은 24명이다. 양념 치킨만 좋아하는 학생의 수는 $n(S) - n(S \cap F) = 36 - 24 = 12$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 $A \subset B$일 때, $B^c \subset A^c$이다.

풀이

참 벤 다이어그램을 그려보면 쉽게 확인할 수 있다.

02 $A \subset B$일 때, $A \cap B^c = \varnothing$이다.

풀이

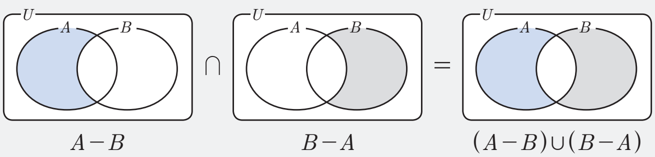
참 벤 다이어그램을 그려보면 $A \cap B^c = A - B = \varnothing$임을 확인할 수 있다.

03 두 집합 A, B에 대하여 벤 다이어그램을 사용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

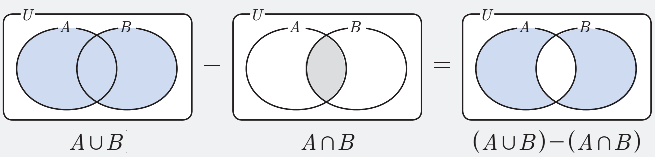
$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

풀이

$(A-B) \cup (B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$(A \cup B) - (A \cap B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$가 성립한다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 명제 p, q, r에 대하여 $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow r$이면 $p \Rightarrow r$이다.

풀이

참 $P \subset Q$이고 $Q \subset R$이면 $P \subset R$이다.

02 조건 p를 만족하는 원소가 존재하지 않으면 $p \rightarrow q$는 항상 참이다.

풀이

참 $P \neq \varnothing$이면 항상 $P \subset Q$이다.

03 조건 q를 만족하는 원소가 존재하지 않으면 $p \rightarrow q$는 항상 거짓이다.

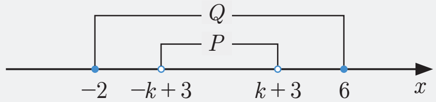
풀이

거짓 반례 : $P = \varnothing$이면 Q에 상관없이 항상 $P \subset Q$이다.

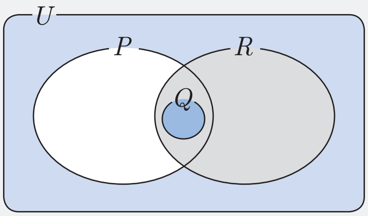
04 두 조건 $p : |x-3| < k$, $q : -2 \leq x \leq 6$에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 양수 k의 최댓값을 구하라.

풀이

조건 p의 진리집합은 $P = \{x \,|\, |x-3| < k\} = \{x \,|\, -k+3 < x < k+3\}$이다. 조건 q의 진리집합은 $Q = \{x \,|\, -2 \leq x \leq 6\}$이다. $p \Rightarrow q$이려면 $P \subset Q$여야 하므로 $-2 \leq -k+3$이고 $k+3 \leq 6$이다. $\therefore k \leq 3$



05 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하자. 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계가 오른쪽 그림과 같을 때 거짓인 명제는? (단, U는 전체집합)



① $q \rightarrow p$ ② $q \rightarrow r$ ③ $\sim p \rightarrow \sim q$ ④ $\sim p \rightarrow \sim r$ ⑤ $\sim r \rightarrow \sim q$

풀이

④ $P^c \not\subset R^c$이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$은 거짓이다.

06 명제 '어떤 고등학생은 SNS를 이용한다.'의 부정을 말하고, 부정의 반례를 제시하라.

풀이

명제 '어떤 x에 대하여 $p(x)$'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'이다.

$\Rightarrow$ 주어진 명제의 부정은 '모든 고등학생은 SNS를 이용하지 않는다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'는 $P^c \neq U$일 때 거짓이다.

$\Rightarrow$ 주어진 명제의 부정의 반례는 'SNS를 이용하는 어떤 고등학생'이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 진술의 참, 거짓을 판정하라.

01 명제 p, q에 대하여 $p \Rightarrow q$이면 $\sim p \Rightarrow \sim q$이다.

풀이

거짓 $P \subset Q$라고 해서 $P^c \subset Q^c$인 것은 아니다.

02 p는 q이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 필요조건이면 $p \Leftrightarrow r$이다.

풀이

거짓 반례 : '$p : x=2$'는 'q : x는 짝수'이기 위한 충분조건이고, 'q : x는 짝수'는 '$r : x=4$'이기 위한 필요조건이지만 p와 r은 아무 관계가 없다.

03 n이 20보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보이는 반례를 모두 구하라.

> n이 2의 배수이면 n은 3의 배수다.

풀이

명제 $p \to q$의 반례는 $P-Q=P \cap Q^c$에서 찾는다.

$\Rightarrow$ 주어진 명제의 반례는 '2의 배수이면서 3의 배수는 **아닌** 자연수 n'이다.

20보다 작은 자연수 중 2의 배수는 $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$이다.

$\Rightarrow$ 이 중 3의 배수가 아닌 수는 $2, 4, 8, 10, 14, 16$이다.

따라서 반례는 $2, 4, 8, 10, 14, 16$이다.

04 명제 '두 자연수 m, n에 대하여 mn이 짝수이면 m 또는 n이 짝수다.'가 참임을 대우 명제를 써서 증명하라.

풀이

주어진 명제의 대우는 다음과 같다.

'두 자연수 m, n에 대하여 m 그리고 n이 홀수이면 mn은 홀수다.'

$\Rightarrow$ m, n이 모두 홀수이면 $m=2a-1$, $n=2b-1$과 같이 쓸 수 있다(단, a, b는 자연수).

$\Rightarrow$ $mn=(2a-1)(2b-1)=2(2ab-a-b)+1$이므로 mn은 홀수다.

$\Rightarrow$ 주어진 명제의 대우가 참인 명제이므로 따라서 주어진 명제는 참이다.

05 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하라.

힌트 ▶ $\sqrt{2}$가 유리수라면 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ (단, $a \neq 0$이고 a와 b는 서로소인 정수)와 같이 쓸 수 있다.

풀이

$\sqrt{2}$가 유리수라면 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$와 같이 쓸 수 있다(단, $a \neq 0$이고 a와 b는 서로소인 정수).

양변을 제곱하면 $2=\dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow b^2=a^2$

$\Rightarrow$ b^2은 2의 배수이므로 b도 2의 배수다. 즉, $b=2k$ (단, $k \neq 0$이고 k는 정수)

$\Rightarrow$ $b^2=4k^2=2a^2$이므로 $a^2=2k^2$

$\Rightarrow$ a^2은 2의 배수이므로 a도 2의 배수다.

즉, a와 b는 모두 2의 배수이므로 a와 b가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01～03 다음 식을 전개하라.

01 $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

풀이

$(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$, $(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$이므로 $x^2+2x=A$라 하면 주어진 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)&=(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)\\&=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)\\&=(A-3)(A-8)\\&=A^2-11A+24\\&=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24\\&=(x^4+4x^3+4x^2)-11(x^2+2x)+24\\&=x^4+4x^3-7x^2-22x+24\end{aligned}$$

02 $(3x-4y+2z)^2$

풀이

$$\begin{aligned}(3x-4y+2z)^2&=(3x)^2+(-4y)^2+(2z)^2+2(3x)(-4y)+2(-4y)(2z)+2(2z)(3x)\\&=9x^2+16y^2+4z^2-24xy-16yz+12zx\end{aligned}$$

03 $(a+2b)^3(a-2b)^3$

풀이

$$\begin{aligned}(a+2b)^3(a-2b)^3&=\{(a+2b)(a-2b)\}^3\\&=(a^2-4b^2)^3\\&=(a^2)^3-3(a^2)^2(4b^2)+3(a^2)(4b^2)^2-(4b^2)^3\\&=a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6\end{aligned}$$

※ 04~05 $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$일 때, 다음 식을 a, b, c로 나타내라.

04 $x^2+y^2+z^2$

풀이

$a^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2+2b$이므로

$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$이다.

05 $(x+y)(y+z)(z+x)$

풀이

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x)&=(a-z)(a-x)(a-y)\\&=a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz\\&=a^3-aa^2+ba-c\\&=ab-c\end{aligned}$$

※ 06~07 다음 식을 인수분해하라.

06 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

풀이

$A=x^2+5x+5$라고 하자. $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(A-1)(A+1)=A^2-1$이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24&=A^2-25\\&=(A-5)(A+5)\\&=(x^2+5x)(x^2+5x+10)\end{aligned}$$

07 $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$

풀이

$x(x+3)=x^2+3x$, $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$이므로 $A=x^2+3x$라고 하면 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3)-15 &= A(A+2)-15 \\ &= A^2+2A-15 \\ &= (A-3)(A+5) \\ &= (x^2+3x-3)(x^2+3x+5) \end{aligned}$$

08 삼각형 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 하자. 다음 관계를 만족하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 판별하라.

$$a^4-ca^3+(b-c)ca^2-(b^2-c^2)ca-b^4+b^3c+b^2c^2-bc^3=0$$

풀이

주어진 식에서 c의 차수가 가장 낮으므로 내림차순으로 정리하면 다음과 같다.

$$(a-b)c^3-(a^2-b^2)c^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)c+a^4-b^4=0$$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$이고

$a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a^2+b^2)(a-b)$이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} &(a-b)c^3-(a^2-b^2)c^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)c+(a^4-b^4) \\ &=(a-b)c^3-(a-b)(a+b)c^2-(a-b)(a^2+b^2)c+(a-b)(a+b)(a^2+b^2) \\ &=(a-b)\{c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)\} \\ &=(a-b)[\{c-(a+b)\}c^2-\{c-(a+b)\}(a^2+b^2)] \\ &=(a-b)\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}=0 \end{aligned}$$

따라서 $a=b$이거나 $c^2=a^2+b^2$이다. 문제의 관계식을 만족하는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이거나 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

! 주의 $c-(a+b)=0 \Leftrightarrow c=a+b$인 a, b, c는 삼각형 세 변의 길이가 될 수 없다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 x에 대한 다항식 $4x^3+ax^2+bx+c$가 x^2-1로 나누어떨어지고, $x+2$로 나눈 나머지가 3이라 하자. 상수 a, b, c 값을 각각 구하라.

풀이

$f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$가 x^2-1로 나누어떨어지므로 $f(x)=(x^2-1)q(x)$라 쓸 수 있다. 인수정리를 이용하면 $f(-1)=f(1)=0$이다. 이제 다음이 성립한다.

$$f(-1)=-4+a-b+c=0 \quad \cdots ①$$
$$f(1)=4+a+b+c=0 \quad \cdots ②$$

$f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 3이므로 나머지정리에서 $f(-2)=3$이다.

$$f(-2)=-32+4a-2b+c=3 \quad \cdots ③$$

①, ②, ③을 연립하면 $a=9$, $b=-4$, $c=-9$이다.

02 다항식 $P(x)$를 x, $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 3, 7, 13일 때, 다항식 $P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지를 구하라.

풀이

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $q(x)$, 나머지를 $r(x)$라 하면 $r(x)$는 이차 이하의 다항식이다. $r(x)=ax^2+bx+c$와 같이 쓸 수 있으므로 $P(x)$는 다음과 같다.

$$P(x)=x(x-1)(x-2)q(x)+ax^2+bx+c$$

$P(x)$를 x로 나눈 나머지가 3이므로 $P(0)=3$이다.

$$P(0)=c=3 \quad \cdots ①$$

$P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 7이므로 $P(1)=7$이다.

$$P(1)=a+b+c=7 \quad \cdots ②$$

$P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 13이므로 $P(2)=13$이다.

$$P(2)=4a+2b+c=13 \quad \cdots ③$$

①, ②, ③을 연립하면 $a=1$, $b=3$, $c=3$이다. 따라서 나머지는 $r(x)=x^2+3x+3$이다.

03 다항식 x^3-3x^2+x-4를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하라.

풀이

다항식 x^3-3x^2+x-4를 이차식 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 $r(x)$라고 하면 $r(x)$는 일차 이하인 다항식이다. $r(x)=ax+b$와 같이 쓸 수 있으므로 다음이 성립한다.

$$x^3-3x^2+x-4=(x-1)(x-2)q(x)+ax+b$$

위 식에 $x=1$을 대입하면

$$1^3-3\times1^2+1-4=a+b \Leftrightarrow a+b=-5 \quad \cdots ①$$

위 식에 $x=2$를 대입하면

$$2^3-3\times2^2+2-4=2a+b \Leftrightarrow 2a+b=-6 \quad \cdots ②$$

①, ②를 연립하면 $a=-1$, $b=-4$이다. 따라서 구하는 나머지는 $r(x)=-x-4$이다.

04 $(x+1)^5-x^5-2$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 구하라.

풀이

$(x+1)^5-x^5-2$를 x^2+x+1로 나눈 몫을 $q(x)$, 나머지를 $r(x)$라고 하면 $r(x)$는 일차 이하의 다항식이다. $r(x)=ax+b$와 같이 쓸 수 있으므로 다음이 성립한다.

$$(x+1)^5-x^5-2=(x^2+x+1)q(x)+ax+b \quad \cdots ①$$

이때 방정식 $x^2+x+1=0$의 해는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다. 즉, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$라고 하면

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$$

또한 $x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3=1$이므로 $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$이다.

①의 양변에 $x=\omega$를 대입하면

$$\begin{aligned}&(\omega+1)^5-\omega^5-2=a\omega+b\\ \Leftrightarrow\ &(-\omega^2)^5-\omega^5-2=a\omega+b\end{aligned}$$

이고 다음이 성립한다.

$$a\omega+b=-\omega^{10}-\omega^5-2=-(\omega^3)^3\omega-(\omega^3)\omega^2-2=-\omega-\omega^2-2=-1 \quad \cdots ②$$

①의 양변에 $x = \overline{\omega}$ 를 대입하면

$$(\overline{\omega}+1)^5 - \overline{\omega}^5 - 2 = a\overline{\omega} + b \Leftrightarrow (-\overline{\omega}^2)^5 - \overline{\omega}^5 - 2 = a\overline{\omega} + b$$

이고 다음이 성립한다.

$$a\overline{\omega} + b = -\overline{\omega}^{10} - \overline{\omega}^5 - 2 = -(\overline{\omega}^3)^3\overline{\omega} - (\overline{\omega}^3)\overline{\omega}^2 - 2 = -\overline{\omega} - \overline{\omega}^2 - 2 = -1 \ \cdots ③$$

②, ③을 연립하면 $a = 0$, $b = -1$이다. 따라서 구하는 나머지는 $r(x) = -1$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 $P(x)=6x^3-27x^2+36x+1$에 대하여 서로 다른 세 실수 $a,\ b,\ c$가 $P(a)=P(b)=P(c)=15$를 만족할 때, abc 값을 구하라.

풀이

$Q(x)=P(x)-15$라고 하면 $Q(a)=Q(b)=Q(c)=0$이다. 즉, $Q(x)$는 $x-a,\ x-b,\ x-c$로 각각 나누어떨어진다.

$$Q(x)=P(x)-15=6x^3-27x^2+36x-14=6(x-a)(x-b)(x-c)$$

위 식에 $x=0$을 대입하면

$$-14=-6abc \Leftrightarrow abc=\frac{7}{3}$$

$\therefore abc=\frac{7}{3}$

02 $P(x)=x^3-ax^2+b$에 대하여 $P(-1)=-1,\ P(1)=1,\ P(2)=2$일 때, $a,\ b$ 값을 구하라.

풀이

$Q(x)=P(x)-x$라고 하면 $Q(-1)=Q(1)=Q(2)=0$이다. 즉, $Q(x)$는 $x+1,\ x-1,\ x-2$로 각각 나누어떨어진다.

$$Q(x)=P(x)-x=x^3-ax^2-x+b=(x+1)(x-1)(x-2)$$

위 식에 $x=0$을 대입하면 $b=2$이다.

위 식에 $x=1$을 대입하면 $1^3-a\times1^2-1+b=0 \Leftrightarrow -a+b=0$에서 $a=2$이다.

$\therefore a=2,\ b=2$

03 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차다항식 $P(x)$가 있다. 서로 다른 세 자연수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 다음이 성립한다고 하자.

$$P(a)=P(b)=P(c)=0,\ P(0)=-8$$

다항식 $P(x)$를 $x-10$으로 나눈 나머지를 구하라.

풀이

조건에서 $P(x)$는 $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$로 각각 나누어떨어진다.

즉, $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$이다.

$P(0)=-8$이므로 $-8=-abc \Leftrightarrow abc=8$이고, a, b, c는 서로 다른 세 자연수이므로 $a=1$, $b=2$, $c=4$이다.

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$$

$P(x)$를 $x-10$으로 나눈 나머지는 $P(10)$이므로 구하는 나머지는

$P(10)=(10-1)(10-2)(10-4)=9\times 8\times 6=432$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 두 자연수 m, n에 대하여 'm은 n의 약수'일 때 대응 $m \to n$은 함수 관계다.

풀이

거짓 $m=2$에 $n=4, 6, 8, \cdots$ 등 다양한 값이 대응한다. 하나의 입력값에 하나의 출력값이 나오지 않으므로 함수가 아니다.

02 좌표평면 위의 모든 직선은 일차함수로 표현된다.

풀이

거짓 y축에 평행한 직선 $x=c$는 일차함수로 표현되지 않는다.

03 이차함수 $y=2x^2$과 $y=2x^2-4x+9$의 그래프는 평행이동하여 겹칠 수 있다.

풀이

참 $y=2x^2-4x+9=2(x-1)^2+7$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 x축으로 1만큼 y축으로 7만큼 평행이동한 것이므로 포개어 겹칠 수 있다.

04 두 집합 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,3,5,7\}$에서 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이고 $f(2)=5$, $f(1)-f(4)=4$일 때, $f(3)+f(4)$ 값을 구하라.

풀이

$f(2)=5$이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$는 각각 1, 3, 7 중 하나다.

조건에서 $f(1)-f(4)=4$이므로 $f(1)=7$, $f(4)=3$이다.

f가 일대일대응이므로 $f(3)=1$이고, 구하는 값은 $f(3)+f(4)=1+3=4$이다.

05 $\{x | 1 \le x \le 3\}$에서 정의된 함수 $y = ax + b$의 치역이 $\{y | 1 \le y \le 5\}$일 때, 상수 a, b 값을 각각 구하라.

풀이

$f(x) = ax + b$라고 하자.

(i) $a > 0$일 때, x가 증가하면 y도 증가하므로 치역은 다음과 같다.

$$f(1) \le y \le f(3) \text{ 곧, } a + b \le y \le 3a + b$$

조건에서 치역은 $1 \le y \le 5$이므로 $a + b = 1,\ 3a + b = 5 \Rightarrow a = 2,\ b = -1$이다.

(ii) $a < 0$일 때, x가 증가하면 y는 감소하므로 치역은 다음과 같다.

$$f(3) \le y \le f(1) \text{ 곧, } 3a + b \le y \le a + b$$

조건에서 치역은 $1 \le y \le 5$이므로 $3a + b = 1,\ a + b = 5 \Rightarrow a = -2,\ b = 7$이다.

(iii) $a = 0$일 때, $y = b$(일정)이므로 치역이 $1 \le y \le 5$일 수 없다.

(i)~(iii)에 따르면 구하는 a, b 값은 $a = 2,\ b = -1$ 또는 $a = -2,\ b = 7$이다.

※ 06~07 이차함수 $y = 2x^2 - 4ax + 2a^2 - b^2 - 4b$가 있다. 다음 물음에 답하라.

06 이 이차함수의 꼭짓점이 $(3, 4)$일 때, 실수 a, b 값을 각각 구하라.

풀이

$y = 2x^2 - 4ax + 2a^2 - b^2 - 4b = 2(x - a)^2 - b^2 - 4b$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a, -b^2 - 4b)$이다. 꼭짓점의 좌표가 $(3, 4)$이므로 $a = 3$이고, $-b^2 - 4b = 4 \Leftrightarrow (b + 2)^2 = 0$이다. 따라서 $a = 3,\ b = -2$이다.

07 이 이차함수의 꼭짓점이 이차함수 $y = x^2 + 2x + 5$ 위에 있도록 실수 a, b 값을 정하라.

풀이

점 $(a, -b^2 - 4b)$가 이차함수 $y = x^2 + 2x + 5$ 위에 있으려면 다음 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} -b^2 - 4b = a^2 + 2a + 5 &\Leftrightarrow a^2 + 2a + b^2 + 4b + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $a = -1,\ b = -2$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 두 함수 f, g에 대하여 $g \circ f = f \circ g$이면 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$이다.

풀이

참 $(f \circ g)^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

02 $\{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\} = \{x \mid f(x) = x\}$면 함수 f는 증가함수다.

풀이

거짓 반례 : $f(x) = -2x+1$은 감소함수이나 $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$이므로
$\{x \mid f(x) = f^{-1}(x)\} = \left\{\frac{1}{3}\right\} = \{x \mid f(x) = x\}$이다.

03 함수 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \le 1) \\ -2x+4 & (x > 1) \end{cases}$에 대하여 $f = f^1, f \circ f = f^2, \cdots, f \circ f^n = f^{n+1}$($n$은 자연수)이라 정의하자. $f^{100}\left(\frac{3}{2}\right)$ 값을 구하라.

풀이

$f^n\left(\frac{3}{2}\right)$ 값을 차례대로 구하면
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1,\ f^2\left(\frac{3}{2}\right) = f(1) = 2,\ f^3\left(\frac{3}{2}\right) = f(2) = 0,\ f^4\left(\frac{3}{2}\right) = f(0) = 1,\ f^5\left(\frac{3}{2}\right) = f(1) = 2, \cdots$
$\Rightarrow f^n\left(\frac{3}{2}\right)$값은 1, 2, 0의 순서대로 반복한다.
$100 = 3 \times 33 + 1$이므로 $f^{100}\left(\frac{3}{2}\right) = f^1\left(\frac{3}{2}\right) = 1$이다.

04 두 집합 $X=\{x\,|\,2\le x\le 6\}$, $Y=\{y\,|\,a\le y\le b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=3x-2$를 생각하자. $f(x)$의 역함수가 존재할 때, a, b를 각각 구하라(단, a, b는 상수).

풀이

f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다. 일차함수 $f(x)$의 기울기가 양수이므로 $a=f(2)$, $b=f(6)$이다.

따라서 $a=4$, $b=16$이다.

05 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 함수 $y=f(2x+3)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내라.

풀이

$g(f(x))=x$이므로 $y=f(2x+3)$의 양변에 g를 합성하면 우변은 $2x+3$이다.

$$g(y)=g(f(2x+3))=(g\circ f)(2x+3)=2x+3$$

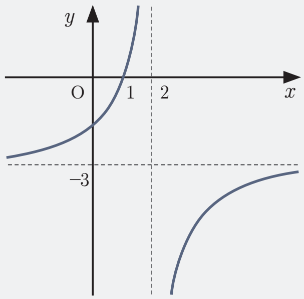
이 식을 $g(y)$에 대하여 정리하면 $x=\frac{1}{2}g(y)-\frac{3}{2}$이다. 이제 x와 y를 바꾸자.

$$y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$$

따라서 함수 $y=f(2x+3)$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 유리함수 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c 값을 각각 구하라.



풀이

주어진 유리함수는 직선 $x=2$와 $y=-3$이 점근선이다. 구하는 유리함수는 $y=\dfrac{k}{x-2}-3$ 꼴로 쓸 수 있다. 점 $(1, 0)$을 지나므로 $0=\dfrac{k}{1-2}-3$을 만족한다. $k=-3$이므로 구하는 유리함수는 $y=\dfrac{-3}{x-2}-3$이다. 식의 우변을 통분하자.

$$y=\frac{-3}{x-2}-3=\frac{-3-3(x-2)}{x-2}=\frac{-3x+3}{x-2}$$

따라서 $a=-2$, $b=-3$, $c=3$이다.

02 두 유리함수 $y=\dfrac{6x+1}{ax+6}$, $y=\dfrac{bx+1}{3x-6}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b 값을 각각 구하라.

풀이

두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계다. 함수 $y=\dfrac{6x+1}{ax+6}$의 역함수는 $y=\dfrac{-6x+1}{ax-6}$이므로 $a=3$, $b=-6$이다.

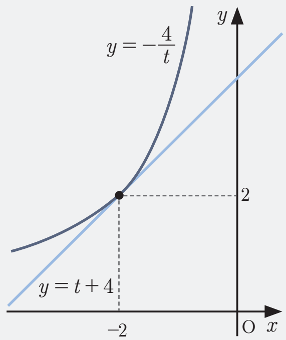
03 방정식 $x^2-3x+4+\dfrac{4}{x^2-3x}=0$을 풀어라.

풀이

$t=x^2-3x$로 치환하면 $t=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$이므로 $t\ge -\dfrac{9}{4}$이다.

이제 주어진 방정식은 다음과 같다.

$$t+4+\frac{4}{t}=0 \Leftrightarrow t+4=-\frac{4}{t}$$



$y=t+4$와 $y=-\dfrac{4}{t}$의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.

$t+4=-\dfrac{4}{t}$의 양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2+4t=-4 \Leftrightarrow (t+2)^2=0$에서 $t=-2$이다.

$t=x^2-3x=-2 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0$에서 구하는 근은

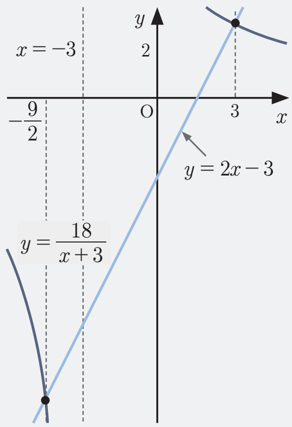
$x=1$ 또는 $x=2$이다.

04 부등식 $\dfrac{x^2+9}{x+3}<3x-6$을 풀어라.

풀이

$\dfrac{x^2+9}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-3)+18}{x+3}=x-3+\dfrac{18}{x+3}$이므로 주어진 부등식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2+9}{x+3}<3x-6 \Leftrightarrow \frac{18}{x+3}<2x-3$$



$y=\dfrac{18}{x+3}$과 $y=2x-3$의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.

$\dfrac{18}{x+3}=2x-3$의 양변에 $x+3$을 곱하여 정리하면

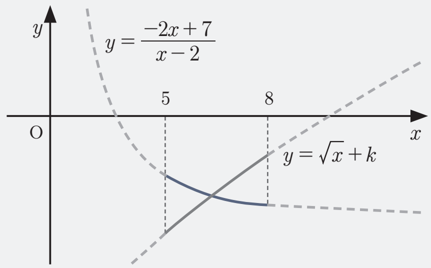
$18=(2x-3)(x+3) \Leftrightarrow (2x+9)(x-3)=0$이므로 $y=\dfrac{18}{x+3}$과 $y=2x-3$의 그래프는 $x=-\dfrac{9}{2}$와 $x=3$에서 만난다. 따라서 부등식의 해는 $-\dfrac{9}{2}<x<-3$ 또는 $x>3$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 정의역이 $\{x\,|\,5\le x\le 8\}$인 두 함수 $y=\dfrac{-2x+7}{x-2}$, $y=\sqrt{5x}+k$의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값을 구하라.

풀이

$y=\dfrac{-2x+7}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}-2$이다. 두 함수의 그래프는 오른쪽과 같다.



$y=\dfrac{-2x+7}{x-2}$의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\dfrac{3}{2}\le y\le -1\right\}$이다.
$f(x)=\sqrt{5x}+k$라 할 때, 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나려면 다음을 만족해야 한다.

$$f(5)\le -1\text{이고 } f(8)\ge -\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{25}+k\le -1,\ \sqrt{40}+k\le -\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}-2\sqrt{10}\le k\le -6$$

따라서 상수 k의 최댓값은 -6이다.

02 무리함수 $f(x)=\sqrt{2-x}+1$과 일차함수 $g(x)=-3x+2\,(x\ge 0)$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 역함수를 구하라.

풀이

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-3x+2)=\sqrt{2-(-3x+2)}+1=\sqrt{3x}+1(x\ge 0)$ $y=\sqrt{3x}+1(x\ge 0)$의 역함수를 구하기 위해 x에 대하여 정리하자.

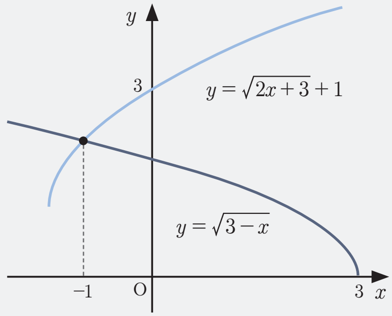
$$y-1=\sqrt{3x}$$
$$(y-1)^2=3x$$
$$\therefore x=\frac{(y-1)^2}{3}(y\ge 1)$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3}(x\ge 1)$이다.
따라서 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 역함수는 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3}(x\ge 1)$이다.

03 방정식 $\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+3}=1$을 풀어라.

풀이

$\sqrt{3-x}=\sqrt{2x+3}+1$로 고치자. 함수 $y=\sqrt{3-x}$와 $y=\sqrt{2x+3}+1$의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.



$\sqrt{3-x}=\sqrt{2x+3}+1$의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$3-x=2x+3+2\sqrt{2x+3}+1$$
$$\Leftrightarrow -3x-1=2\sqrt{2x+3} \cdots ①$$

식 ①의 양변을 제곱하여 정리하면 이차방정식을 풀 수 있다.

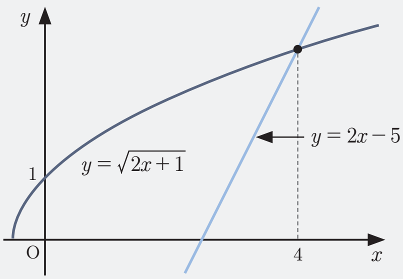
$$(-3x-1)^2=4(2x+3)$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+6x+1=8x+12$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-2x-11=0$$
$$\Leftrightarrow (9x-11)(x+1)=0 \cdots ②$$

방정식 ②의 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{11}{9}$이다.
그림에서 볼 수 있듯이 $y=\sqrt{3-x}$와 $y=\sqrt{2x+3}+1$ 그래프의 교점은 제2사분면에 위치하므로 주어진 방정식의 근은 $x=-1$이다.

04 부등식 $2x-5\le\sqrt{2x+1}$을 풀어라.

풀이

함수 $y=2x-5$와 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.
$2x-5=\sqrt{2x+1}$의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

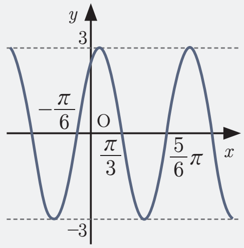


$$4x^2-20x+25=2x+1 \Leftrightarrow (2x-3)(x-4)=0$$

함수 $y=2x-5$와 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프는 $x=\dfrac{3}{2}$가 아니라 $x=4$에서만 한 번 만난다. $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프가 $y=2x-5$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 범위는 $-\dfrac{1}{2}\le x\le 4$이다. 즉, 주어진 부등식의 해는 $-\dfrac{1}{2}\le x\le 4$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 함수 $y=a\sin(bx+c)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c 값을 구하라(단, $a>0$, $b>0$, $0\le c<\pi$).



풀이

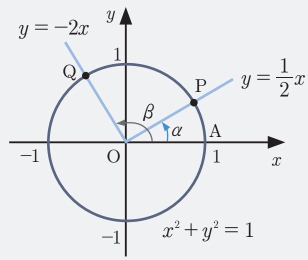
사인함수의 치역은 $-1\le y\le 1$이고, 주어진 함수의 치역은 $-a\le y\le a$이다. $\therefore a=3$

사인함수의 주기는 2π이고, 주어진 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다. 또한 그래프에서 주기가 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이다.

$\therefore b=2$

$x=\frac{\pi}{3}$에서 함숫값이 0이므로 $0=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+c\right)$이다. $\therefore c=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le c<\pi)$

02 원 $x^2+y^2=1$과 반직선 $y=\frac{1}{2}x\,(x\ge 0)$, $y=-2x\,(x\le 0)$의 교점을 각각 P, Q라고 하자.
점 A(1,0)에 대하여 $\angle AOP=\alpha$, $\angle AOQ=\beta$라고 할 때, $\sin\alpha\cos\beta$ 값을 구하라.



풀이

반직선의 기울기는 각각 $\frac{1}{2}$, -2이므로 다음이 성립한다.

$$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=-2 \Leftrightarrow \cos\alpha=2\sin\alpha,\ \sin\beta=-2\cos\beta$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$이고 $\sin\alpha>0$, $\cos\beta<0$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=5\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos^2\beta+\sin^2\beta=5\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{1}{5}$

※ 03～04 배각공식을 사용하여 다음 물음에 답하라.

03 $3\theta=\theta+2\theta$임을 이용하여 $\cos 3\theta$를 $\cos\theta$에 대한 식으로 나타내라.

풀이

삼각함수의 덧셈정리에서 $\cos 3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta$이다.

배각공식에서 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$이므로 $\cos 3\theta$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\,(\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

즉 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$이다.

04 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$임을 이용하여 $\sin 3\theta$를 $\sin\theta$에 대한 식으로 나타내라.

풀이

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$에서 θ 대신 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$를 대입하면 다음과 같다.

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+3\theta\right)=4\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

삼각함수의 덧셈정리에서 $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+3\theta\right)=\cos\dfrac{3}{2}\pi\cos 3\theta-\sin\dfrac{3}{2}\pi\sin 3\theta=\sin 3\theta$이므로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\sin 3\theta=4(-\sin\theta)^3-3(-\sin\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

즉 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$이다.

05 $\sin x + \cos y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos x + \sin y = 1$일 때, $\sin(x+y)$ 값을 구하라.

풀이

삼각함수의 덧셈정리에서 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$이다. $\sin x + \cos y = \frac{1}{\sqrt{3}}$과 $\cos x + \sin y = 1$의 양변을 각각 제곱하자.

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y = \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$
$$\cos^2 x + 2\cos x \sin y + \sin^2 y = 1 \quad \cdots ②$$

①, ②를 더하면 다음과 같다.

$$(\cos^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 x + \sin^2 y) + 2(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2 + 2\sin(x+y) = \frac{4}{3}$$

따라서 $\sin(x+y) = -\frac{1}{3}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 다음 식에서 처음으로 틀린 등호를 찾고, 이유를 설명하라.

$$-1 \underset{\text{①}}{=} i \times i \underset{\text{②}}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} \underset{\text{③}}{=} (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} \underset{\text{④}}{=} \{(-1)\times(-1)\}^{\frac{1}{2}} \underset{\text{⑤}}{=} 1^{\frac{1}{2}} \underset{\text{⑥}}{=} 1$$

풀이

등호 ③이 성립하지 않는다. 유리수 지수는 밑이 양수일 때만 정의되기 때문이다.

02 $5^x = 81,\ 45^y = 27$일 때, $\dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y}$ 값을 구하라.

풀이

$5^x = 81 = 3^4$이므로 $5 = 3^{\frac{4}{x}}$이다. $45^y = 27 = 3^3$이므로 $45 = 3^{\frac{3}{y}}$이다. 즉 다음이 성립한다.

$$3^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}} = 3^{\frac{4}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}} = 5 \div 45 = \frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$\therefore \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = -2$

03 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근이 $\log_2 \alpha,\ \log_2 \beta$일 때, $\alpha\beta$ 값을 구하라.

풀이

근과 계수와의 관계에서 두 근의 합이 6이므로 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 6$이다. 로그의 성질을 이용하면 다음과 같다.

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 6 \Leftrightarrow \log_2 \alpha\beta = 6 \Leftrightarrow \alpha\beta = 2^6 = 64$$

$\therefore \alpha\beta = 64$

04 $-1 \leq x \leq 2$에서 정의된 함수 $y = 2^{x-1} \times 3^{-x+1}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하라.

풀이

함수 $y = 2^{x-1} \times 3^{-x+1} = \dfrac{2^{x-1}}{3^{x-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}$은 밑이 1보다 작은 지수함수이므로 x가 커질수록 y 값은 작아진다.

즉 $x=-1$일 때 최대, $x=2$일 때 최소다. 구하는 최댓값은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{9}{4}$이고, 최솟값은 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2-1} = \dfrac{2}{3}$이다.

05 함수 $y = \log_3(x^2 - 4x + 13)$의 최솟값을 구하라.

풀이

$t = x^2 - 4x + 13$으로 치환하자. 함수 $y = \log_3 t$는 밑이 1보다 큰 로그함수이므로 t가 커질수록 y 값도 커진다. t가 최소일 때 주어진 함수는 최솟값을 가진다. t를 정리하자.

$$t = x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$$

$x=2$일 때 최솟값 $t=9$를 가진다. 따라서 $x=2$일 때 함수 $y = \log_3(x^2 - 4x + 13)$의 최솟값은 $\log_3 9 = 2$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 두 점 O(0, 0), A(0, 4)와 직선 $y=x-2$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하라.

풀이

점 P의 좌표를 $(t, t-2)$라고 하면 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$을 t에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2+\overline{AP}^2&=\{t^2+(t-2)^2\}+\{t^2+(t-6)^2\}\\&=4t^2-16t+40=4(t-2)^2+24\end{aligned}$$

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$은 $t=2$일 때 최솟값 24를 가진다. 따라서 구하는 점 P의 좌표는 (2, 0)이다.

02 네 점 A(a, 0), B(b, −2), C(5, 2), D(1, 4)를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모가 될 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하라(단, $a>0$).

풀이

마름모의 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

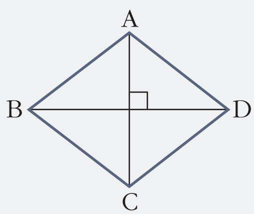
⇒(AC의 중점)＝(BD의 중점)이므로 $\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{b+1}{2}$이다. 즉, $a+4=b$이다.

⇒(AC의 기울기)×(BD의 기울기)＝−1이므로 $\dfrac{0-2}{a-5}\times\dfrac{-2-4}{b-1}=-1$이다.

즉, $(a-5)(b-1)=-12$이다.

⇒ $(a-5)(b-1)=-12$에 $b=a+4$를 대입하여 풀면 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

조건에서 $a>0$이므로 $a=3$, $b=7$이다.



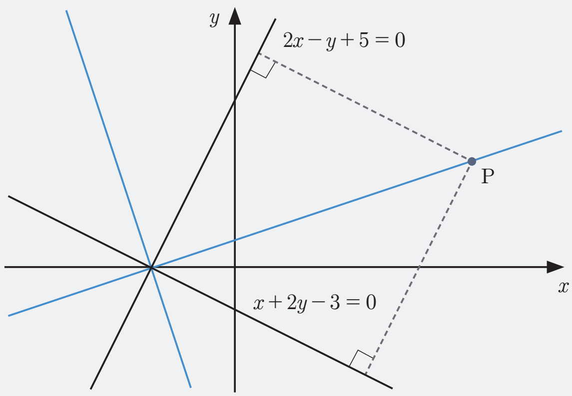
03 두 직선 $2x-y+5=0$, $x+2y-3=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하라.

풀이

두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자. 점 P에서 두 직선 $2x-y+5=0$과 $x+2y-3=0$까지 각각의 거리가 서로 같다.

$$\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$|2x-y+5|=|x+2y-3|$$
$$2x-y+5=\pm(x+2y-3)$$

따라서 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선은 $x-3y+8=0$ 또는 $3x+y+2=0$이다. 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 원의 방정식을 구하라.

01 중심이 $(1, 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원

풀이

$(x-1)^2+(y-3)^2=3$

02 두 점 $(-4, -1)$, $(2, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원

풀이

원의 중심은 $\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)=(-1, 1)$이다. 반지름의 길이가 $\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$이므로

$(x+1)^2+(y-1)^2=13$

03 원점과 두 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 원

풀이

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자. 각 점의 좌표를 원의 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$C=0,\ 1+A+C=0,\ 1+B+C=0$$

식을 연립하여 풀면 $A=-1, B=-1, C=0$이다. 즉 구하는 원의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2-x-y=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

04 방정식 $x^2+y^2-4kx-2y+3k+1=0$이 나타내는 도형이 원일 때, 상수 k 값의 범위를 구하라.

풀이

주어진 방정식을 정리하면 $(x-2k)^2+(y-1)^2=4k^2-3k$이므로 이 방정식이 원을 나타내기 위해서는 $4k^2-3k>0$이어야 한다. $k(4k-3)>0$이므로 $k<0$ 또는 $k>\frac{3}{4}$이다.

05 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있고, 두 점 $(1,1)$, $(3,-5)$를 지나는 원의 방정식을 구하라.

풀이

중심이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 중심의 좌표는 $(t, -t)$와 같이 쓸 수 있다. 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 구하는 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-t)^2+(y+t)^2=r^2$$

원이 두 점 $(1, 1)$, $(3, -5)$를 지나므로 대입하면 다음 관계식을 얻는다.

$$(1-t)^2+(1+t)^2=r^2 \Leftrightarrow 2t^2+2=r^2 \quad \cdots ①$$
$$(3-t)^2+(-5+t)^2=r^2 \Leftrightarrow 2t^2-16t+34=r^2 \quad \cdots ②$$

①−②를 계산하면 $16t-32=0$에서 $t=2$이다. ①에 $t=2$를 대입하면 $r^2=10$이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(x+2)^2=10$이다.

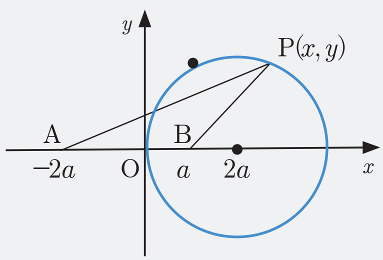
06 두 점 $A(-2a, 0)$, $B(a, 0)$ $(a>0)$에 대하여 점 P가 $\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$을 만족하면서 움직일 때, 점 P의 자취(점 P가 나타내는 도형의 방정식)를 구하라.

풀이

$\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1 \Leftrightarrow \overline{AP}=2\overline{BP} \Leftrightarrow \overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로 점 $P(x, y)$라 하면 다음 관계식을 얻는다.

$$(x+2a)^2+y^2=4\{(x-a)^2+y^2\}$$
$$3x^2-12ax+3y^2=0$$
$$(x-2a)^2+y^2=4a^2$$

따라서 점 P의 자취는 중심이 $(2a, 0)$이고 반지름의 길이가 $2a$인 원이다.



개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=4$와 직선 $3x-4y-a+2=0$이 만날 때, 상수 a 값의 범위를 구하라.

풀이

원의 중심에서 직선까지의 거리 d는 다음과 같다.

$$d=\frac{|3\times a+(-4)\times 1-a+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|2a-2|}{5}$$

원과 직선이 만나므로 $d\le r$이다. 따라서 a 값의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{|2a-2|}{5}\le 2 \Leftrightarrow |a-1|\le 5 \Leftrightarrow -4\le a\le 6$$

02 점 $(-1, -4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 할 때 m_1m_2 값을 구하라.

풀이

점 $(-1, -4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x+1)-4=mx+m-4$이다. 이를 원의 방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x^2+(mx+m-4)^2=4$$
$$(m^2+1)x^2+2m(m-4)x+m^2-8m+12=0$$

x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=0$이다.

$$m^2(m-4)^2-(m^2+1)(m^2-8m+12)=0$$
$$3m^2+8m-12=0 \quad \cdots ①$$

방정식 ①의 두 근이 각각 m_1, m_2이다. 근과 계수와의 관계에서 $m_1m_2=-\frac{12}{3}=-4$이다.

03 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 + y^2 = 4$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다고 하자. 현 PQ의 길이가 2가 되는 실수 k 값을 구하라.

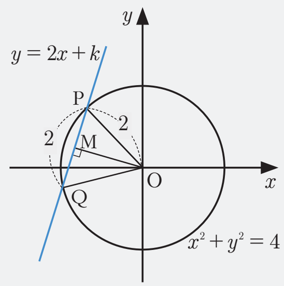
풀이

문제를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

(i) $\overline{\mathrm{PQ}} = 2$일 때 $\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 이다. 따라서 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y = 2x + k$ 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.

(ii) 점과 직선 사이의 거리 공식에서 $d = \dfrac{|2 \times 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^3}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

(i), (ii)가 같은 값이므로 $|k| = \sqrt{15}$ 이다. $\therefore k = \pm\sqrt{15}$



04 원 $x^2 + y^2 = 1$에 외접하고 직선 $3x + 4y - 19 = 0$에 접하는 원 중에서 그 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식을 구하라.

풀이

원의 중심을 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은 $C_1 : (x-a)^2 + y^2 = r^2$이다. 원 C_1이 원 $C_2 : x^2 + y^2 = 1$과 외접하므로 다음 관계가 성립한다.

(원 C_1과 C_2의 중심 사이의 거리) = (원 C_1의 반지름의 길이) + (원 C_2의 반지름의 길이)

$$|a| = r + 1 \quad \cdots ①$$

원 C_1이 직선 $3x + 4y - 19 = 0$에 접하므로 다음 관계가 성립한다.

$$d = \frac{|3a + 4 \times 0 - 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r \Leftrightarrow |3a - 19| = 5r \quad \cdots ②$$

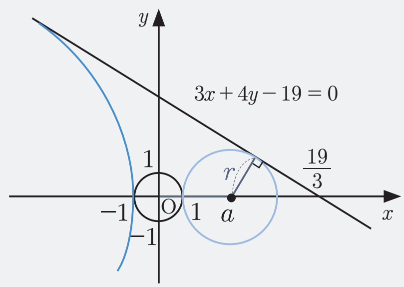
①, ②를 연립하여 얻은 연립방정식은 절댓값 안의 식이 0이 되는 $a = 0$, $a = \dfrac{19}{3}$를 기준으로 세 범위로 나누어 풀 수 있다.

(i) $a \geq \dfrac{19}{3}$일 때 : $a = r + 1$, $3a - 19 = 5r$을 풀면 $a = -7$, $r = -8$이므로 해가 없다.

(ii) $0 \leq a < \dfrac{19}{3}$일 때 : $a = r + 1$, $3a - 19 = -5r$을 풀면 $a = 3$, $r = 2$이다.

(iii) $a < 0$일 때 : $a = -(r+1)$, $3a - 19 = -5r$을 풀면 $a = -12$, $r = 11$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2 + y^2 = 2^2$ 또는 $(x+12)^2 + y^2 = 11^2$이다.



개념 쏙쏙 확인예제 풀이

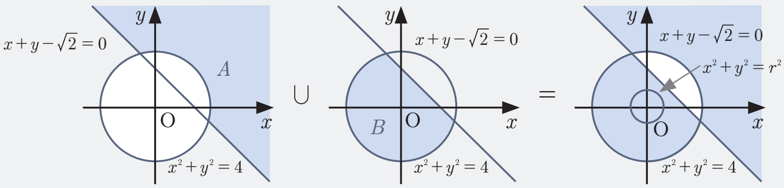
01 부등식 $x^2+y^2 \le r^2$의 영역이 부등식 $(x+y-\sqrt{2})(x^2+y^2-4) \ge 0$의 영역에 포함되도록 하는 양수 r의 최댓값을 구하라.

풀이

주어진 부등식이 성립하는 경우는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{2} \ge 0 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases} \cdots ① \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x+y-\sqrt{2} \le 0 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases} \cdots ②$$

연립부등식 ①, ②의 영역을 각각 A, B라고 하면 구하는 부등식의 영역은 $A \cup B$이다.



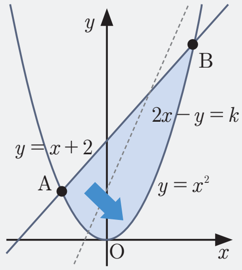
따라서 원 $x^2+y^2=r^2$이 직선 $x+y-\sqrt{2}=0$에 접하는 순간에 r이 최대가 된다. r의 최댓값은

$d=\dfrac{|0+0-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=r$에서 $r=1$이다.

02 x, y가 다음 부등식을 동시에 만족할 때, 일차식 $2x-y$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

$$y \geq x^2, \quad y \leq x+2$$

풀이



주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 오른쪽과 같다.

$y = x^2$과 $y = x+2$의 교점은 $x^2 = x+2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$에서

점 A$(-1, 1)$, B$(2, 4)$이다. $2x - y = k$(k는 상수)라 두면 $-k$는 직선 $y = 2x - k$의

y절편이므로 ↘ 방향으로 k 값이 커진다. 등고선의 고도는 다음과 같은 조건에서

최대 또는 최소다.

(i) 직선 $y = 2x - k$가 점 A$(-1, 1)$을 지날 때 최소이고, 최솟값은

$k = -3$이다.

(ii) 직선 $y = 2x - k$가 그래프 $y = x^2$과 접할 때 최대이고, 최댓값은 $k = 1$이다.

($x^2 = 2x - k \Leftrightarrow x^2 - 2x + k = 0$이 중근을 가져야 하므로 $D/4 = 1 - k = 0$에서 $k = 1$이다.)

(i), (ii)에 의해 $2x - y$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -3이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01～04 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.
단, $|z|$는 복소수 $z=a+bi$와 복소평면의 원점 사이의 거리 $\sqrt{a^2+b^2}$을 의미한다.

01 실수 $a+0i$ (단, a는 실수)는 복소평면의 가로축에만 위치한다.

풀이
참

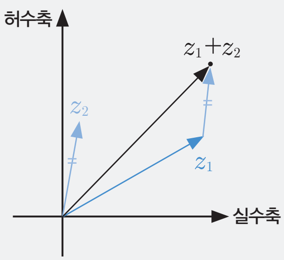
02 순허수 $0+bi$ (단, b는 0이 아닌 실수)는 복소평면의 세로축에만 위치한다.

풀이
참

03 $|z| \neq |\overline{z}|$인 복소수 z가 존재한다(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수).

풀이
거짓 임의의 복소수 $z=a+bi$에 대하여 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=|\overline{z}|$이다.

04 복소평면 위 세 점 0, z_1, z_2가 삼각형의 꼭짓점일 때, $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$이다.



풀이
참 그림의 삼각형에서 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 반드시 작다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $|z|=1$인 모든 복소수 z에 대하여 $|z-\alpha|$ 값을 일정하게 만드는 복소수 α는 2개 존재한다.

풀이

거짓 $|z|=1$은 복소평면에서 단위원을 의미한다. 원의 모든 점에서 거리가 일정한 점은 원의 중심뿐이다. 즉 α 값으로 가능한 복소수는 0뿐이다.

02 복소수 z, $-\frac{1}{\bar{z}}$, 0은 복소평면 위 한 직선 위에 있다.

풀이

참 z의 편각을 θ라 하자. $\bar{z}$의 편각은 $-\theta$이고, $\frac{1}{\bar{z}}$의 편각은 $-\theta$, $-\frac{1}{\bar{z}}$의 편각은 $-(-\theta)=\theta$이다.
z와 $-\frac{1}{\bar{z}}$의 편각이 같으므로 복소평면에서 두 점 z와 $-\frac{1}{\bar{z}}$을 이은 직선은 원점 0을 지난다.

03 복소수 z가 $z+\bar{z}=2$, $\arg(z)=\frac{\pi}{3}$를 만족할 때, z^3 값을 구하라.

풀이

$z=a+bi$라 하자. $z+\bar{z}=2a=2$이므로 $a=1$이다. $\arg(z)=\frac{\pi}{3}$이므로 z를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z=r\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=r\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$a=1$이므로 $r=2$이다. 따라서 z^3은 다음과 같다.

$$z^3=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)=8(-1)=-8$$

z의 편각 $\frac{\pi}{3}$를 세 번 더한 것이 z^3의 편각이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $z=\cos\theta+i\sin\theta$와 임의의 정수 n에 대하여 $|z^n|=1$이다.

풀이

참 $|z|=1$이므로 $|z^n|=|z|^n=1^n=1$이다.

02 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$에 대하여 $z^{10}=i$이다.

풀이

참 $z=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로 $z^{10}=\cos\dfrac{10\pi}{4}+i\sin\dfrac{10\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$이다.

03 $(\sqrt{3}+i)^7$을 계산하라.

풀이

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$이다. 따라서 $(\sqrt{3}+i)^7$은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^7 &= 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\\
&= 2^7\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) \leftarrow \left(\begin{aligned}&\because \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\\ &\ \ \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\end{aligned}\right)\\
&= 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-64(\sqrt{3}+i)
\end{aligned}
$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 방정식 $z^n=1$은 복소수 범위에서 서로 다른 n개의 근을 가진다.

풀이

참 $z^n=1$의 근을 복소평면 위에 찍어보면 단위원에 내접하고 $(1, 0)$을 한 꼭짓점으로 가지는 정n각형의 꼭짓점이다. 즉, 서로 다른 n개의 복소수이다.

02 방정식 $z^n=1$의 모든 근의 합은 0이다.

풀이

참 $z^n+0z^{n-1}-1=0$이므로, 근과 계수와의 관계에 의해 주어진 방정식의 모든 근의 합은 0이다.

03 복소계수 방정식 $z^2-2iz-i-2=0$을 풀어라.

풀이

2차방정식은 2개의 복소수 근을 가진다. n차방정식은 중근을 중복되는 만큼 세어줄 때 n개의 근을 가진다. 일단 믿자.

$$\begin{aligned} z^2-2iz-i-2&=0\\ z^2-2iz+i^2-i^2-i-2&=0\\ (z-i)^2&=i^2+i+2\\ (z-i)^2&=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ \cdots ① \end{aligned}$$

근의 공식을 유도할 때처럼 2차방정식을 완전제곱식으로 변형

$\bigcirc^n=\triangle$ 꼴이므로 $z-i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$라 하자. ①에서 양변의 절댓값과 편각을 각각 비교하면 다음과 같다.

$$r^2=\sqrt{2}\text{ 이고 }2\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+2\pi \Leftrightarrow r=2^{\frac{1}{4}}\text{ 이고 }\ \theta=\frac{\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8}$$

$r=2^{\frac{1}{4}},\ \theta=\frac{\pi}{8}$일 때: $z-i=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$이다.

$$\Rightarrow z=i+2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\fallingdotseq 1.09868+1.45509i$$

$r=2^{\frac{1}{4}},\ \theta=\frac{9\pi}{8}$일 때: $z-i=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$이다.

$$\Rightarrow z=i+2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)\fallingdotseq 1.09868+0.54491i$$

근삿값 계산은 공학용 계산기의 도움을 받았다. 대학생이 되면 자주 사용하게 될 것이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 물체에 가해지는 힘은 벡터다.

풀이

참 철천지원수의 뺨을 때려야 할 때, 왼뺨을 때릴지 오른뺨을 때릴지는 중요하다.

02 시점이 $(0, 0)$, 종점이 $(2, 3)$인 벡터 $\vec{a}$ 의 크기와 시점이 $(-1, 2)$, 종점이 $(1, 1)$인 벡터 $\vec{b}$ 의 크기는 서로 같다.

풀이

거짓 $\vec{a}$ 의 크기는 $\sqrt{13}$, $\vec{b}$ 의 크기는 $\sqrt{5}$ 이다.

03 시점이 $(-2, 3)$이고 종점이 $(3, 1)$인 벡터 $\vec{c}$ 와 성분이 $(5, -2)$인 벡터 $\overrightarrow{OD}$ 는 서로 같다.

풀이

참 벡터 $\vec{c}$ 의 성분은 $(3-(-2),\ 1-3) = (5, -2)$이다. 벡터는 평행이동에 무관한 개념임을 유념하자.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 벡터 $\vec{a}$에 대해 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$이다.

풀이

참

02 $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{b}+\vec{a}$를 만족하는 두 벡터 쌍 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 있다.

풀이

거짓 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대해 항상 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$이다.

03 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대해 $k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$이면 $k=m$, $l=n$이다.

풀이

거짓 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행한 경우 주어진 명제는 참이 아닐 수 있다.

예를 들어, $\vec{b}=2\vec{a}$이면 $6\vec{a}+(-1)\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$이다.

주어진 명제에 '평행하지 않은' 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$라는 조건을 추가하면 이 명제는 참이다.

※ 04~05 다음 등식을 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내라.

04 $2(\vec{x}-3\vec{a}+\vec{b})=3(\vec{b}-\vec{x})$

풀이

$2(\vec{x}-3\vec{a}+\vec{b})=3(\vec{b}-\vec{x}) \Leftrightarrow 2\vec{x}-6\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{b}-3\vec{x} \Leftrightarrow 5\vec{x}=6\vec{a}+\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=\frac{6}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

05 $5(\vec{a}-2\vec{x})-4(2\vec{b}-\vec{x})=\vec{x}-\vec{a}$

풀이

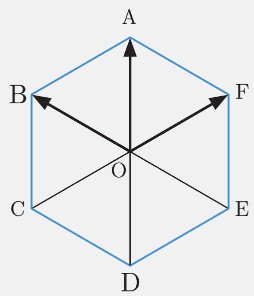
$5(\vec{a}-2\vec{x})-4(2\vec{b}-\vec{x})=\vec{x}-\vec{a}$

$\Leftrightarrow 5\vec{a}-10\vec{x}-8\vec{b}+4\vec{x}=\vec{x}-\vec{a}$

$\Leftrightarrow 6\vec{a}-8\vec{b}=7\vec{x}$

$\Leftrightarrow \vec{x}=\frac{6}{7}\vec{a}-\frac{8}{7}\vec{b}$

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF가 있다. 벡터 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}$ 의 크기를 구하라.



풀이

□OBAF는 평행사변형이다. 평행사변형법에 의해 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}$ 이고 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OA}$ 이다. 구하는 값은 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|=|2\overrightarrow{OA}|=2$이다.

07 $\frac{1}{2}(\vec{a}-5\vec{b})=5\left(\frac{6}{5}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$를 만족하는 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 는 서로 평행함을 확인하라.

풀이

주어진 식의 양변에 2를 곱하면 $\vec{a}-5\vec{b}=10\left(\frac{6}{5}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$이다.

이 식을 전개하면 $\vec{a}-5\vec{b}=12\vec{b}-5\vec{a}$ 이다. 동류항끼리 합쳐주면 $6\vec{a}=17\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\frac{17}{6}\vec{b}$ 이다. 따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 를 생각하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

풀이

거짓 벡터를 내적한 결과는 스칼라이므로 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$와 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$는 모두 정의되지 않는다.

02 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

풀이

참 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

03 $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$

풀이

참 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이고 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$이다.

04 두 벡터 $\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(3,5)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$ 와 $k\vec{a}-\vec{b}$ 가 수직일 때, 실수 k 값을 구하라.

풀이

$\vec{a}+\vec{b}$ 와 $k\vec{a}-\vec{b}$ 가 수직이다.

$\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow(4,3)\cdot(k-3,-2k-5)=0$

$\Leftrightarrow 4(k-3)+3(-2k-5)=0\Leftrightarrow -2k-27=0\Leftrightarrow k=-\dfrac{27}{2}$

※ 05~06 다음을 만족하는 위치벡터를 모두 구하라.

05 벡터 $\vec{a}=(2,-5)$와 수직이고 크기가 10인 위치벡터 $\vec{x}$

풀이

$\vec{x}=(p,q)$라 하자.

(i) 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{x}$ 가 수직이다. $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{x}=0 \Leftrightarrow 2p-5q=0$

(ii) $\vec{x}$ 의 크기가 100이다. $\Leftrightarrow |\vec{x}|=\sqrt{p^2+q^2}=10 \Leftrightarrow p^2+q^2=100$

(i), (ii)를 연립하면 $(p,q)=\left(\frac{50}{\sqrt{29}},\frac{20}{\sqrt{29}}\right),\left(-\frac{50}{\sqrt{29}},-\frac{20}{\sqrt{29}}\right)$이다.

06 벡터 $\vec{b}=(4,3)$과 평행하고 크기가 7인 위치벡터 $\vec{x}$

풀이

$\vec{x}=(p,q)$라 하자.

(i) 벡터 $\vec{b}$ 와 $\vec{x}$ 가 평행하다. $\Leftrightarrow \vec{x}=k\vec{b}$ (단, k는 실수) $\Leftrightarrow p=4k, q=3k$

(ii) $\vec{x}$ 의 크기가 7이다. $\Leftrightarrow \sqrt{p^2+q^2}=7 \Leftrightarrow p^2+q^2=49$

(i), (ii)를 연립하면 $(p,q)=\left(\frac{28}{5},\frac{21}{5}\right),\left(-\frac{28}{5},-\frac{21}{5}\right)$이다.

07 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, |2\vec{b}-\vec{a}|=2\sqrt{7}$ 일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 예각의 크기를 구하라.

풀이

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=12\cos\theta$ 이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 값을 알면 예각의 크기 θ를 구할 수 있다.

$|2\vec{b}-\vec{a}|=2\sqrt{7}$ 의 양변을 제곱하자.

$$4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=28 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 c이다.

풀이

참

02 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 (a, b)이다.

풀이

참

03 점 $\mathrm{C}(-1, 0, 0)$은 점 $\mathrm{A}(3, 2, 2)$와 점 $\mathrm{B}(-3, 4, -2)$에서 같은 거리에 있다.

풀이

참 $|\overline{\mathrm{AC}}|=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}$, $|\overline{\mathrm{BC}}|=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}$

04 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, 5)$, $\mathrm{B}(-2, 1, 1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하라.

풀이

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, 0, 0)$이라 하자.

$$|\overline{\mathrm{AP}}|=|\overline{\mathrm{BP}}|$$
$$\sqrt{(x-1)^2+2^2+5^2}=\sqrt{(x+2)^2+1^2+1^2}$$
$$x^2-2x+30=x^2+4x+6$$

방정식을 풀면 $x=4$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(4, 0, 0)$이다.

05 세 점 A$(2, 1, 3)$, B$(3, -2, 1)$, C$(5, -1, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 정삼각형이 아닌 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 이등변삼각형이 아닌 둔각삼각형
⑤ 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형

풀이

삼각형 ABC의 각 변의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2+(1+2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{14}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(3-5)^2+(-2+1)^2+(1-4)^2} = \sqrt{14}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(2-5)^2+(1+1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{14}$$

주어진 삼각형은 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 인 정삼각형이다. $\therefore$ ③

06 좌표공간에서 평행사변형 ABCD의 꼭짓점의 좌표가 A$(1, 2, 3)$, B$(4, 5, 6)$, C(a, b, c), D(p, q, r)이라 하자. $(a+b+c)-(p+q+r)$ 값을 구하라.

풀이

평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치한다. 따라서 중점의 좌표를 (x, y, z)라고 하면 다음이 성립한다.

$$x = \frac{1+a}{2} = \frac{4+p}{2},\ y = \frac{2+b}{2} = \frac{5+q}{2},\ z = \frac{3+c}{2} = \frac{6+r}{2}$$

세 식을 정리하면 $a-p=3, b-q=3, c-r=3$이다.

$\therefore (a+b+c)-(p+q+r)=(a-p)+(b-q)+(c-r)=9$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $u=(a,b,c)$, $v=(p,q,r)$라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 직선 l과 m이 서로 평행하기 위한 필요충분조건은 $a:b:c=p:q:r$이다.

풀이

참 $l \,/\!/\, m \Leftrightarrow \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v} \Leftrightarrow (a,b,c)=(kp,kq,kr) \Leftrightarrow a:b:c=p:q:r$

02 직선 l과 m이 서로 수직이기 위한 필요충분조건은 $ap+bq+cr=0$이다.

풀이

참 $l \perp m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (a,b,c)\cdot(p,q,r)=0 \Leftrightarrow ap+bq+cr=0$

03 두 직선 $\dfrac{x+2}{k+1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{4}$, $\dfrac{x-2}{2}=y-4=\dfrac{z+3}{k}$이 서로 수직일 때, 실수 k 값을 구하라.

풀이

두 직선의 방향벡터는 각각 $(k+1, 2, 4)$, $(3, 1, k)$이다.

두 직선이 서로 수직이다. ⇔ 두 방향벡터가 수직이다. ⇔ $(k+1, 2, 4)\cdot(3, 1, k)=0$

$\therefore k=-\dfrac{5}{7}$

04 직선 $3(x-2)=-6(y+5)=2(z-3)$에 평행하고 점 $\mathrm{A}(1, 2, 4)$를 지나는 직선의 대칭방정식을 구하라.

풀이

$3(x-2)=-6(y+5)=2(z-3) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$

주어진 직선의 방향벡터는 $(2,-1,3)$이다. 따라서 구하는 직선의 대칭방정식은 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$이다.

05 다음 두 직선이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$일 때, 양수 k 값을 구하라.

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{3}=-z, \quad \frac{x+5}{3}=\frac{y+1}{k}=\frac{z+6}{2}$$

풀이

두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{d_1}=(2,3,-1)$, $\vec{d_2}=(3,k,2)$이다.

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\Leftrightarrow$ 두 방향벡터가 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\Leftrightarrow \vec{d_1}\cdot\vec{d_2}=|\vec{d_1}||\vec{d_2}|\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow (2,3,-1)\cdot(3,k,2)=\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+k^2+4}\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 6+3k-2=\sqrt{14}\sqrt{k^2+13}\times\dfrac{1}{2}$

마지막 식의 양변을 제곱하고 정리하면 다음과 같다.

$$22k^2+96k-118=0 \Leftrightarrow 2(k-1)(11k+59)=0$$

k는 양수이므로 $k=1$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(p,q,r)$이라 하자.
다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 평면 α와 β가 서로 평행하기 위한 필요충분조건은 $ap+bq+cr=0$이다.

풀이

거짓 $\alpha \mathbin{/\!/} \beta \Leftrightarrow \vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v} \Leftrightarrow (a,b,c)=(kp,kq,kr)=a:b:c=p:q:r$

02 평면 α와 β가 서로 수직이기 위한 필요충분조건은 $a:b:c=p:q:r$이다.

풀이

거짓 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (a,b,c)\cdot(p,q,r)=0 \Leftrightarrow ap+bq+cr=0$

03 점 A$(2,1,1)$을 지나고 직선 $\dfrac{x+1}{2}=-y=\dfrac{z-4}{3}$에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

풀이

주어진 직선의 방향벡터는 $(2,-1,3)$이다. 이 벡터는 구하고자 하는 평면의 법선벡터이기도 하다. 따라서 구하는 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$2(x-2)-(y-1)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z=6$$

04 두 평면 $ax-2y+2z=0$과 $2x+y-4z+1=0$이 서로 수직이 되도록 상수 a 값을 정하라.

풀이

두 평면의 법선벡터는 각각 $(a,-2,2)$, $(2,1,-4)$이다.

두 평면이 서로 수직이다. ⇔ 두 법선벡터는 서로 수직이다. ⇔ $(a,-2,2)\cdot(2,1,-4)=0$

$\therefore a=5$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 점 $\mathrm{P}(1,0,2)$와 평면 $3x-2y+z+2=0$ 사이의 거리를 구하라.

풀이

$$\frac{|3\times1-2\times0+1\times2+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$$

02 원점과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이고, 벡터 $\vec{n}=(1,-2,1)$에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

풀이

평면의 법선벡터가 $\vec{n}$ 이다. $\Leftrightarrow$ 평면의 방정식은 $x-2y+z+d=0$ 이다(단, d는 실수).

원점과 구하는 평면 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이다.

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}=\frac{|0+0+0+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|d|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow|d|=\sqrt{30}$$

$\therefore x-2y+z+\sqrt{30}=0$ 또는 $x-2y+z-\sqrt{30}=0$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 구 위의 점 P에 대해 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$이다.

풀이

참 지름에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

02 이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$은 항상 구의 방정식을 나타낸다.

풀이

거짓 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow$
$\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$ 이므로 $A^2+B^2+C^2-4D \le 0$ 이면 구의 방정식이 될 수 없다.

03 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, -3)$, $\mathrm{B}(4, -1, 3)$을 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구하라.

풀이

구하는 구의 중심은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점이고, 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 길이의 절반이다. 즉 구의 중심은 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$이고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(1-4)^2+(2+1)^2+(-3-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{54}$ 이다.

따라서 구의 방정식은 다음과 같다.

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{27}{2}$$

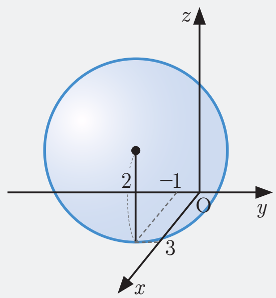
04 중심이 C(3, −1, 2)이고, xy평면에 접하는 구의 방정식을 구하라.

풀이

xy평면에 접한다. ⇔ (반지름의 길이)=(중심에서 xy평면까지 거리)

⇔ (반지름의 길이)=2

$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$



05 반지름의 길이가 5인 구가 있다. 이 구와 xy평면이 만나 생기는 교선의 방정식이 $x^2+y^2+4x=0$ 일 때, 이 구의 방정식을 구하라.

풀이

구의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$라 하자.

xy평면의 방정식은 $z=0$이므로 구의 방정식에 $z=0$을 대입하여 얻은 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2+4x=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=4$$

즉 $a=-2,\ b=0,\ 25-c^2=4 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{21}$ 이다. 따라서 구의 방정식은 다음과 같다.

$(x+2)^2+y^2+\left(z-\sqrt{21}\right)^2=5^2$ 또는 $(x+2)^2+y^2+\left(z+\sqrt{21}\right)^2=5^2$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 세 벡터 $\vec{a}=(1,3,0)$, $\vec{b}=(0,-1,2)$, $\vec{c}=(4,3,2)$에 대하여 다음을 계산하라.

01 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

풀이

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-16\\26\end{pmatrix}$

02 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

풀이

$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-4\\32\end{pmatrix}$

03 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

풀이

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(1,3,0)\cdot(6,-2,-1)=0$

04 다음 벡터는 좌표공간 위의 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 법선벡터임을 보여라.

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\ \ (\text{단, } \vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{c}=\overrightarrow{OC})$$

풀이

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 법선벡터는 두 벡터 $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{a}$ 에 동시에 수직이다.

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})&=(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{a}\\&=\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{a}\\&=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\end{aligned}$$

05 좌표공간에서 다음 세 직선을 생각하자.

$$l_1 : x = -y = \frac{z}{2},\ l_2 : x = y = \frac{z}{2a},\ l_3 : x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{a}$$

세 직선 l_1, l_2, l_3가 한 평면 위에 있을 때, $20a$ 값을 구하라(단, $a \neq 0$).

풀이

주어진 평면의 법선벡터 $\vec{n}$은 세 직선 l_1, l_2, l_3의 방향벡터 $\vec{d_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{d_2} = (1, 1, 2a)$, $\vec{d_3} = (1, -2, a)$와 모두 수직이다.

$\vec{n} \,/\!/\, \vec{d_2} \times \vec{d_3}$이므로 $\vec{d_1} \perp (\vec{d_2} \times \vec{d_3})$이다. 즉, $\vec{d_1}$과 $\vec{d_2} \times \vec{d_3}$는 서로 수직이다.

두 벡터를 외적하면 $\vec{d_2} \times \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ -3 \end{pmatrix}$이므로

$\vec{d_1} \cdot (\vec{d_2} \times \vec{d_3}) = (1, -1, 2) \cdot (5a, a, -3) = 4a - 6 = 0$에서 $a = \frac{3}{2}$이다. 따라서 $20a = 30$이다.

06 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

풀이

두 벡터의 외적 $\vec{a} \times \vec{b}$의 크기는 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 이루어진 평행사변형의 넓이와 같다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 이루어진 평행사변형의 넓이는 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$이다$\left(\text{단, } \cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin\theta \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 임의의 행렬 A에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $A+X=X+A=A$를 만족하는 행렬 X가 항상 존재한다.

풀이

참 영행렬이 이를 만족한다.

02 임의의 행렬 A에 대하여 $A+B=B+A=O$를 만족하는 행렬 B가 항상 존재한다.

풀이

참 $-A$(A의 모든 성분에 -1을 곱한 행렬)이 이러한 행렬이다.

※ 03~06 다음 세 행렬에 대하여 계산하라.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

03 $A+B$

풀이

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+4 & 5+(-1) & 1+3 \\ 4+(-2) & 3+2 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

04 $A+C$

풀이

$$A+C=\begin{pmatrix} 2+1 & 5+3 & 1+5 \\ 4+6 & 3+2 & 0+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

05 $B-C$

풀이

$$B-C=\begin{pmatrix} 4-1 & -1-3 & 3-5 \\ -2-6 & 2-2 & 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

06 $C-B$

풀이

$$C-B=-(B-C)=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

※ 07~08 다음 등식을 만족하는 행렬 X를 구하라(단, X와 O는 모두 2×2 행렬이다).

07 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+X=O$

풀이

$$X=-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+O=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

08 $X+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

풀이

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

※ **09~10 다음 등식이 성립하도록 x, y 값을 구하라.**

09 $\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

풀이

두 행렬의 $(1,1)$ 성분을 비교하면 $x+2y=3$이다. 두 행렬의 $(2,1)$ 성분을 비교하면 $2x-y=1$이다. 따라서 두 식을 연립하면 $x=1$, $y=1$이다.

10 $\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

풀이

두 행렬의 $(1,1)$ 성분을 비교하면 $x^2+y^2=10$이다. 두 행렬의 $(1,2)$ 성분을 비교하면 $xy=-3$이다. 두 행렬의 $(2,1)$ 성분을 비교하면 $x-y=-4$이다. $x^2+y^2=10$에 $x=y-4$를 대입하여 계산하면 다음과 같다.

$$(x,y)=(-3,1),\ (-1,3)$$

따라서 $x=-3$, $y=1$ 또는 $x=-1$, $y=3$이다.

※ **11~12 다음 두 행렬에 대하여 등식을 만족하는 2×2 행렬 X를 구하라.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

11 $X+2A=B$

풀이

$$X=B-2A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

12 $X+2(A+B)=A$

풀이

$$X=A-2(A+B)=-A-2B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

※ 13~14 다음 두 행렬에 대하여 등식을 만족하는 2×2 행렬 X를 구하라.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

13 $3X+2A=X+3B$

풀이

$3X+2A=X+3B$

$\Leftrightarrow 2X=-2A+3B$

$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}(-2A+3B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

14 $X+3A=2(A+B+X)$

풀이

$X+3A=2(A+B+X)$

$\Leftrightarrow X+3A=2A+2B+2X$

$\Leftrightarrow X=3A-2A-2B=A-2B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~04 2차 정사각행렬에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 0이 아닌 실수 p, q에 대하여 $pA+qB=I$이면 $AB=BA$이다.

풀이

참 $pAB=(I-qB)B=B-qB^2=B(I-qB)=pBA$이므로 $AB=BA$이다.

02 $AB=O$이면 $BA=O$이다.

풀이

거짓 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$이면 $AB=O$이지만 $BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\neq O$이다.

03 $A+B=I$이면 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이다.

풀이

참 $AB=(1-B)B=B-B^2=B(1-B)=BA$이므로 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이다.

04 $AB=AC$이면 $A=O$ 또는 $B=C$이다.

풀이

거짓 영의 약수를 생각하면 $A\neq O$이고 $B-C\neq O$이지만 $A(B-C)=O \Leftrightarrow AB=AC$인 경우가 존재한다.

반례 : $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

※ 05～07 2차 정사각행렬 A, B에 대하여 연산 ★를 $A \star B = AB - BA$라 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

05 $A \star B = B \star A$

풀이

거짓 반례 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

06 $3A \star 2B = 6(A \star B)$

풀이

참 $3A \star 2B = (3A)(2B) - (2B)(3A)$

$= 6(AB - BA)$

$= 6(A \star B)$

07 $(A - B) \star C = (A \star C) - (B \star C)$

풀이

참 $(A - B) \star C = (A - B)C - C(A - B)$

$= (AC - CA) - (BC - CB)$

$= (A \star B) - (B \star C)$

※ 08~10 2차 정사각행렬 A, B에 대하여 연산 ★를 $A \star B=(I-A)(I-B)$로 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

08 $A \star B=B \star A$

풀이

거짓 $A \star B=(I-A)(I-B)=I-A-B+AB$

$B \star A=(I-B)(I-A)=I-B-A+BA$

즉, $AB \neq BA$이면 $A \star B \neq B \star A$이다.

09 $A \star A=I$이면 $A^2=2A$이다.

풀이

참 $A \star A=(I-A)^2=I$이면 $A^2-2A=O$이므로 $A^2=2A$이다.

10 $A \star A=O$이면 $A^3-A^2=A-I$이다.

풀이

참 $A \star A=(I-A)^2=O$이면 $A^2-2A+I=O$에서 $A^2-A=A-I$이므로 $A^3-A^2=A^2-A=A-I$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~05 2차 정사각행렬에 대한 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 A와 B의 역행렬이 존재하면 $AB=BA$이다.

풀이

거짓 반례 : $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

02 $A^2=O$이면 $A+I$는 역행렬이 존재한다.

풀이

참 $A^2=O$이면 $(I-A)(I+A)=I-A^2=I$이므로 $I-A$와 $I+A$는 역행렬이 존재한다.

03 $AB=C$이고 C의 역행렬이 존재하면 A와 B 모두 역행렬이 존재한다.

풀이

참 C의 역행렬이 존재하므로 $\det(C)\neq 0$이다.

또한 $\det(C)=\det(AB)=\det(A)\det(B)$이므로 $\det(A)\neq 0$, $\det(B)\neq 0$이다. 즉 A와 B 모두 역행렬이 존재한다.

04 $AB=A+B$이면 $A-I$의 역행렬이 존재한다.

풀이

참 $AB=A+B$이므로 $(A-I)(B-I)=AB-A-B+I=I$에서

$\det(A-I)(B-I)=\det(A-I)\times\det(B-I)=1\neq 0$이다. 따라서 $A-I$와 $B-I$는 역행렬이 존재한다.

05 $A=A^{-1}$이면 $A+3I$의 역행렬이 존재한다.

풀이

참 $A=A^{-1}$이므로 $A^2=I$이다. 따라서 $(3I+A)(3I-A)=9I-A^2=8I$이고,

$\det(3I+A)(3I-A)=\det(3I+A)\times\det(3I-A)=8\neq 0$이므로 $A+3I$의 역행렬이 존재한다.

※ 06~08 두 2차 정사각행렬 A, B가 $AB+A^2B=I$, $(A-I)^2+B^2=O$를 만족한다. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

06 B의 역행렬이 존재한다.

풀이

참 $AB+A^2B=(A+A^2)B=I$에서 B의 역행렬은 $A+A^2$이다.

07 $AB=BA$

풀이

참 $AB+A^2B=A(I+A)B=I$이므로 $I=\underline{A}\underline{(I+A)B}=\underline{(I+A)B}\underline{A}$이다.

또한 $AB+A^2B=(I+A)AB=I$이므로 $I+A$의 역행렬은 BA이며 동시에 AB이다.

역행렬은 유일하게 존재하므로 $AB=BA$이다.

08 $(A^3-A)^2+I=O$

풀이

참 $B^2=-(A-I)^2$이므로 $(A+A^2)B=I$에서 다음이 성립한다.

$I^2=(A+A^2)^2B^2=-(A+A^2)^2(A-I)^2=-\{A(A+I)(A-I)\}^2=-(A^3-A)^2$

따라서 $(A^3-A)^2+I=O$이다.

※ 09~11 역행렬이 존재하는 두 2차 정사각행렬 A, B가 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4I$를 만족한다. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

09 $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

풀이

참 $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬은 $\frac{1}{4}(A+B)$이다.

10 $A=I$이면 $B=I$이다.

풀이

거짓 반례 : $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

11 $AB=\frac{1}{2}I$ 이면 $A^2+B^2=I$ 이다.

풀이

참 $AB=\frac{1}{2}I$ 이면 $A^{-1}=2B$, $B^{-1}=2A$ 이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$4I=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=(A+B)(2B+2A)=2(A+B)^2$$

즉 $(A+B)^2=A^2+B^2+I=2I$ 이므로 $A^2+B^2=I$ 이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-A-2I=O$이면 $a+b=1$이고 $ad-bc=-2$이다.

풀이

거짓 반례 : $A=2I$

02 $A^2+A+I=O$를 만족하는 2차 정사각행렬 A는 존재하지 않는다.

풀이

거짓 반례 : $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

03 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $a+b+c+d$ 값을 구하라.

풀이

케일리-해밀턴 정리에 의해 $A^2+I=O \Leftrightarrow A^2=-I$이다.

$$A+A^2+A^3+A^4=A-I-A+I=O$$
$$A^5+A^6+A^7+A^8=A^4(A+A^2+A^3+A^4)=O$$
$$\vdots$$
$$A+A^2+A^3+\cdots A^{100}=O$$

$\therefore a+b+c+d=0$

04 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 A^3의 모든 성분의 합이 4이다. 이때, a 값을 구하라.

풀이

A의 모든 성분의 합은 $a-2$이고, I의 모든 성분의 합은 2이다.

케일리–해밀턴 정리에 의해 $A^2+2A+I=O$이다.

$A^2=-2A-I$에서 A^2의 모든 성분의 합은 $(-2)\times(a-2)-2=-2a+2$,

$A^3=-2A^2-A$에서 A^3의 모든 성분의 합은 $(-2)\times(-2a+2)-(a-2)=3a-2$

따라서 $3a-2=4$이므로 $a=2$이다.

05 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{2021}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$일 때, $a+b$ 값을 구하라.

풀이

케일리–해밀턴 정리에 의해 $A^2-A+I=O$이다. 양변에 $A+I$를 곱하면 다음과 같다.

$$(A+1)(A^2-A+I)=A^3+I=O$$

즉, $A^3=-I$, $A^6=I$이고 따라서 $A^{2021}=(A^6)^{336}A^3A^2=-A^2=I-A$이다.

따라서 $a=2, b=1$이고 $a+b=3$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 기울기가 0이 아닌 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

풀이

참 두 직선이 만나지 않으면 $a=c$, $b \neq d$이므로 $ad-bc \neq 0$이다.

02 두 직선이 일치하면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

풀이

거짓 두 직선이 일치하면 $a=c$, $b=d$이므로 $ad-bc=0$이다.

03 두 직선이 x축 위에서 만나면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

풀이

참 두 직선이 x축 위에서 만나면 $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$이므로 $ad-bc=0$이다.

04 역행렬이 존재하는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 생각하자. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$의 해가 $x=5$, $y=4$라고 한다. $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$일 때, $p+q$ 값을 구하라.

풀이

$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

주어진 연립방정식의 해가 $x=5$, $y=4$이므로 $A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$이다. 이 식 양변의 왼쪽에 역행렬을 곱하면

$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$이다.

$\therefore p+q=9$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 연립일차방정식의 해를 가우스 소거법을 이용하여 구하라.

01 $\begin{cases} 4x-6y=-11 \\ -3x+8y=10 \end{cases}$

풀이

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & -11 \\ -3 & 8 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\therefore x=-2,\ y=\frac{1}{2}$

02 $\begin{cases} x+y-z=9 \\ 8y+6z=-6 \\ -2x+4y-6z=40 \end{cases}$

풀이

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 40 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -8 & 58 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 14 & -64 \\ 0 & 6 & -8 & 58 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 14 & -64 \\ 0 & 0 & -50 & 250 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$\therefore x=1,\ y=3,\ z=-5$

03 $\begin{cases} 4y+3z=8 \\ 2x-z=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

풀이

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$\therefore$해가 없다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 두 점 $\mathrm{P}(1,2)$, $\mathrm{Q}(2,4)$를 각각 점 $\mathrm{P}'(2,1)$, $\mathrm{Q}'(3,4)$로 옮기는 선형변환 f가 존재한다.

풀이

거짓 f의 선형성에 따르면 $f(1,2)=(2,1)$이면 $f(2,4)=(4,2)$이어야 한다.

02 선형변환 g의 행렬표현이 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 점 $\mathrm{R}(3,1)$은 선형변환 g에 의해 점 $\mathrm{R}'(4,3)$으로 옮겨진다.

풀이

참 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

03 점 $\mathrm{S}(2,3)$을 점 $\mathrm{S}'(5,4)$로 옮기는 선형변환 h는 유일하게 존재한다.

풀이

거짓 무수히 많이 존재한다. 예를 들어 행렬표현이 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$인 선형변환은 모두 점 $\mathrm{S}(2,3)$을 점 $\mathrm{S}'(5,4)$로 옮긴다.

※ 04~05 다음 변환이 선형변환인지 판별하라.

04 좌표평면 위의 각 점을 그 점에서 x축에 내린 수선의 발로 옮기는 변환 f

풀이

주어진 변환은 $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$과 같다.

$$f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=af\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

따라서 f는 선형변환이다.

05 좌표평면 위의 각 점을 y축 방향으로 3만큼 평행이동한 점으로 옮기는 변환 g

풀이

$g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$이다. g는 원점을 고정하지 않으므로 선형변환이 아니다.

06 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후, 원점을 중심으로 닮음비가 k인 닮음변환을 시키는 선형변환의 행렬을 구하라.

풀이

구하는 선형변환에 의해 점 $(1,0)$과 $(0,1)$은 각각 다음과 같이 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\-k\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-k\\0\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 선형변환의 행렬은 $\begin{pmatrix}0 & -k\\-k & 0\end{pmatrix}$이다.

07 원점을 중심으로 반시계방향으로 90°만큼 회전이동하는 선형변환의 행렬을 구하라.

풀이

원점을 중심으로 90°만큼 회전이동하는 선형변환에 의해 $(1,0)$과 $(0,1)$은 각각 다음과 같이 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 선형변환의 행렬은 $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동하는 변환에 대하여 역변환의 행렬표현은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다.

풀이

참 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동하는 변환의 역변환은 원점을 중심으로 $-\theta$만큼 회전이동하는 변환이다.

02 선형변환 f, g 각각의 행렬을 A, B라고 하면 $AB=BA$이다.

풀이

거짓 $f\circ g \neq g\circ f$이므로 $AB \neq BA$이다.

03 선형변환 h의 행렬표현이 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 좌표평면 위의 점 중에서 h에 의하여 자기 자신으로 옮겨지는 점은 유일하다.

풀이

참 자기 자신으로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라고 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

여기에서 $(a, b)=(0, 0)$이다. 즉, 자기 자신으로 옮겨지는 점은 유일하게 존재한다.

04 선형변환 f의 행렬이 $\begin{pmatrix} k+1 & -2 \\ 1 & -k+2 \end{pmatrix}$일 때, $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$인 점 P가 원점 이외에도 존재하도록 k 값을 구하라.

풀이

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$라고 하자. 다음이 성립한다.

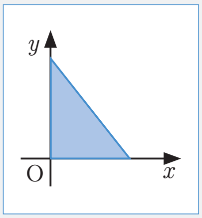
$$f(\mathrm{P})=\mathrm{P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k+1 & -2 \\ 1 & -k+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k & -2 \\ 1 & -k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $\begin{pmatrix} k & -2 \\ 1 & -k+1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$를 만족하는 원점 이외의 점 P가 존재한다. 이제 다음이 성립한다.

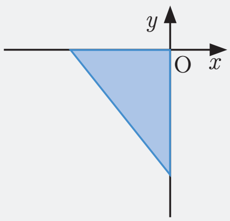
$$\det\begin{pmatrix} k & -2 \\ 1 & -k+1 \end{pmatrix}=k(-k+1)-(-2)\times 1=-k^2-k-2=0$$

$k=-1, 2$가 구하는 k 값이다.

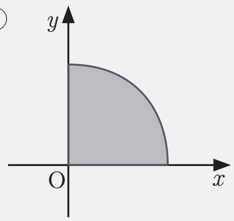
05 다음 중 아래 왼쪽 그림과 같은 직각삼각형이 선형변환에 의하여 옮겨질 수 있는 도형을 있는 대로 고르면?



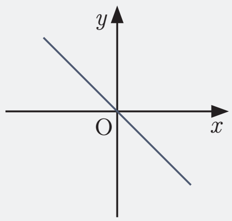
①



②



③



풀이

직선은 선형변환에 의하여 점 또는 직선으로 옮겨진다. 따라서 ②와 같이 옮겨질 수는 없다.

주어진 직각삼각형을 원점에 대하여 대칭이동한 뒤 원점을 중심으로 닮음변환하면 ①로 옮겨진다.

③에서 직선의 기울기를 m이라 하자. 행렬표현이 $\begin{pmatrix} a & b \\ ma & mb \end{pmatrix}$인 선형변환에 의해 주어진 직각삼각형은 ③으로 옮겨진다.

$\therefore$ ①, ③

06 원점을 중심으로 $\theta+\alpha$만큼 회전이동하는 선형변환 f의 행렬을 구하라. 이로부터 삼각함수의 덧셈 정리를 유도하라.

풀이

선형변환 f의 행렬표현은 $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$이다.

원점을 중심으로 각각 θ, α만큼 회전이동하는 선형변환을 각각 g, h라고 하자. $f=g\circ h$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

이제 등식 오른쪽의 행렬 곱셈을 계산하여 등식 왼쪽과 비교하면 다음을 얻는다.

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$$
$$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 모든 항이 1인 수열 1, 1, 1, 1, ⋯ 은 등차수열이 아니다.

풀이

거짓 공차가 0인 등차수열이다.

02 등차수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$의 합으로 이루어진 수열 $\{a_n+b_n\}$은 등차수열이다.

풀이

참 등차수열은 n에 대한 일차식이다. 일차식과 일차식을 더하면 일차식이므로 두 등차수열의 합은 여전히 등차수열이다. 예를 들어, $a_n=2n+1$, $b_n=3n+7$이라 하면 $a_n+b_n=5n+8$이다.

03 등차수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$의 곱으로 이루어진 수열 $\{a_nb_n\}$은 등차수열이다.

풀이

거짓 반례 : $a_n=n$, $b_n=2n$일 때 $a_nb_n=2n^2$이다. 이때 수열 $\{a_nb_n\}$: $2, 8, 18, \cdots$은 등차수열이 아니다.

04 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4=8$, $a_7=52$가 성립한다고 하자. 이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d를 구하라.

풀이

$a_2+a_4=8$이므로 등차중항인 a_3 값은 $4\left(=\frac{8}{2}\right)$에서 $a_3=4$이다. 두 점 $(3, 4)$, $(7, 52)$를 지나는 직선의 기울기는 주어진 등차수열의 공차 d와 같다.

$$\therefore d=\frac{52-4}{7-3}=12$$

05 다음 수열이 등차수열이 되도록 하는 실수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$ 값을 구하라.

$$-1,\ x,\ y,\ z,\ 35$$

풀이

주어진 수열이 등차수열이면 $-1+35=x+z=2y$이다.

$\therefore x+y+z=34+\dfrac{34}{2}=51$

06 어느 직각삼각형에서 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 a, b, 3이고, 이 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이 직각삼각형의 넓이를 구하라.

풀이

세 변 중 길이가 가장 긴 변이 빗변이므로 주어진 직각삼각형에서 빗변의 길이는 3이다. 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$a^2+b^2=3^2 \quad \cdots ①$$

또한 $a, b, 3$ 순서로 등차수열을 이루므로 다음이 성립한다.

$$a+3=2b \Leftrightarrow a=2b-3 \quad \cdots ②$$

식 ①, ②를 연립하여 풀면 $(2b-3)^2+b^2=3^2 \Leftrightarrow 5b^2-12b=(5b-12)b=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{12}{5}, 0$

b는 양수이므로 $\dfrac{12}{5}$이고 $a=\dfrac{9}{5}$이다.

$\therefore$ 직각삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{54}{25}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 모든 항이 1인 수열 1, 1, 1, 1, ⋯ 은 등비수열이 아니다.

풀이

거짓 공비가 1인 등비수열이다.

02 등비수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$의 합으로 이루어진 수열 $\{a_n+b_n\}$은 등비수열이다.

풀이

거짓 반례 : $a_n=2^n$, $b_n=1$일 때 $a_n+b_n=2^n+1$이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$: 3, 5, 9, ⋯는 등비수열도 등차수열도 아니다.

03 등비수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$의 곱으로 이루어진 수열 $\{a_nb_n\}$은 등비수열이다.

풀이

참 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 각각의 공비를 r_1, r_2라고 하자. $a_n=a_1r_1^{n-1}$, $b_n=b_1r_2^{n-1}$이므로 $a_nb_n=a_1b_1(r_1r_2)^{n-1}$이다. 즉, 수열 $\{a_nb_n\}$은 공비가 r_1r_2인 등비수열이다.

04 각 항이 실수이고 제4항이 24, 제7항이 192인 등비수열의 일반항 a_n을 구하라.

풀이

첫 번째 항을 a_1, 공비를 r이라 하자.

$$a_4=a_1r^3=24 \quad \cdots ①$$
$$a_7=a_1r^6=192 \quad \cdots ②$$

② ÷ ①을 하면 a_1이 소거되고 $r^3=8$을 얻는다. 각 항이 실수이므로 공비 또한 실수다. 즉 $r=2$이다. 위 결과를 ①에 대입하면 $a_1=3$이다. 주어진 등비수열의 일반항은 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이다.

05 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2a_4=16$, $a_3a_5=64$가 성립할 때, a_7 값을 구하라.

풀이

두 조건은 등비중항을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$16 = a_2a_4 = (a_3)^2 \Leftrightarrow a_3 = 4$$
$$64 = a_3a_5 = (a_4)^2 \Leftrightarrow a_4 = 8$$

주어진 등비수열의 공비는 $r = \frac{a_4}{a_3} = 2$이고 $a_7 = a_4 \times 2^3 = 64$이다.

06 1이 아닌 양수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\log_b a + \log_b c$ 값을 구하라.

풀이

a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 밑이 b인 로그를 취하면 $\log_b a,\ 1(=\log_b b),\ \log_b c$는 순서대로 등차수열을 이룬다. 즉 $\log_b a + \log_b c = 2$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$이면 모든 k에 대해 $a_k=0$ 또는 $b_k=0$이다.

풀이

거짓 반례 : k가 홀수일 때 $a_k=0$, $b_k=1$이고 k가 짝수일 때 $a_k=1$, $b_k=0$인 경우가 있다.

02 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n+m-1} a_{k-m+1}$

풀이

참 $\sum_{k=m}^{n+m-1} a_{k-m+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

03 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$ 일 때 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$ 값을 구하라.

풀이

$a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = 1^2 - 1 = 0$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} = 2(n-1)$ (단, $n \geq 2$)

모든 n에 대하여 $a_n = 2(n-1)$이다.

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1-1) = 4(k-1)$이고 구하는 값은

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{10} 4(k-1) = \frac{0+36}{2} \times 10 = 180$이다.

04 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{n=1}^{k} n\right)$을 구하라.

풀이

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{n=1}^{k} n\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}\right)=220$$

05 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$을 간단히 하라.

풀이

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$이므로 구하는 식은 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

풀이

거짓 반례 : $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$

02 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이다.

풀이

거짓 반례 : $a_n = n+1$, $b_n = n$

03 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$이다.

풀이

거짓 반례 : $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

04 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(n+4)a_n = 5$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}(5n+2)a_n$ 값을 구하라.

풀이

수렴하는 수열은 극한과 사칙연산의 순서를 바꿀 수 있다.

$(5n+2)a_n = (n+4)a_n \times \frac{5n+2}{n+4}$이므로 구하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}(5n+2)a_n = \lim_{n\to\infty}(n+4)a_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n+4} = 5 \times 5 = 25$$

05 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+3n+1}$ 의 소수부분을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}100a_n$ 값을 구하라.

풀이

$n^2+2n+1 < n^2+3n+1 < n^2+4n+4 \Leftrightarrow n+1 < \sqrt{n^2+3n+1} < n+2$

$\sqrt{n^2+3n+1}$ 의 정수부분은 $n+1$이므로 $a=\sqrt{n^2+3n+1}-(n+1)$이다.

$$\left\{\sqrt{n^2+3n+1}-(n+1)\right\}\times\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+(n+1)}{\sqrt{n^2+3n+1}+(n+1)}$$
$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+1}+(n+1)}=\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+1}+(n+1)}\times\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{1+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}100a_n=100\times\frac{1}{2}=50$

06 수열 $\left\{x^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 x의 개수를 구하라.

풀이

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\leq 1$이고 수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<\frac{x^2-x}{2}\leq 1$이다.

$$-1<\frac{x^2-x}{2}\leq 1 \Leftrightarrow x^2-x+2>0\text{이고 } x^2-x-2\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 2$$

주어진 수열이 수렴하기 위한 정수 x 개수는 4개다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

풀이

거짓 반례 : $\{a_n\}$: 1,0,1,0, 1,0, $\cdots$, $\{b_n\}$: 0,1,0,1,0,1, $\cdots$

02 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

풀이

거짓 반례 : $a_n = 1$

03 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

풀이

거짓 반례 : $\{a_n\}$: 1,0,1,0, 1,0, $\cdots$, $\{b_n\}$: 0,1,0,1,0,1, $\cdots$

04 다음 급수의 수렴 또는 발산을 판정하고 수렴한다면 그 값을 구하라.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots$$

풀이

급수의 부분합을 S_n이라고 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$이다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$이다. 따라서 주어진 급수는 발산한다.

05 급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$의 수렴 또는 발산을 판정하고 수렴한다면 그 값을 구하라.

풀이

급수의 부분합을 S_n이라고 하면 $S_n=\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$이다.

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)\\&=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\\&=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\right\}\\&=\log\frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\log\frac{1}{2}$이다. 따라서 주어진 급수는 $\log\frac{1}{2}$로 수렴한다.

06 첫 번째 항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$ 값을 구하라.

풀이

$a_n=2+3(n-1)=3n-1$이고 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$이다.

급수의 부분합을 S_n이라고 하면 다음이 성립한다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 다음 급수의 수렴 또는 발산을 판정하라.

$$1+(-1)+1+(-1)+1+\cdots$$

풀이

주어진 급수의 부분합을 S_n이라 하면 $S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$이다.

$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1\neq 0=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

02 다음 급수의 수렴 또는 발산을 판정하고 수렴한다면 그 값을 구하라.

$$1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}+\cdots$$

풀이

주어진 급수의 부분합을 S_n이라 하면 $S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$이다.

$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=1$이므로 주어진 급수는 1로 수렴한다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 다음 급수의 수렴 또는 발산을 판정하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

풀이

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

따라서 주어진 급수는 비교판정법에 따라 수렴한다.

02 첫 번째 항이 2인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 값이 3이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 값을 구하라.

풀이

공비를 r이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{1-r}=3 \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$이다.

$a_n=\frac{2}{3^{n-1}}$이므로 $a_n^2=\frac{4}{9^{n-1}}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~05 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 $\lim\limits_{x \to a}\{f(x)g(x)\}=0$이면 $\lim\limits_{x \to a}f(x)=0$ 또는 $\lim\limits_{x \to a}g(x)=0$이다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=\begin{cases} 0 \ (x>a) \\ 1 \ (x<a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 \ (x>a) \\ 0 \ (x<a) \end{cases}$

02 $x=a$에서 $y=|f(x)|$가 연속이면 $y=f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=\begin{cases} 1 \quad (x>a) \\ -1 \ (x \le a) \end{cases}$

03 $x=a$에서 $y=f(x)$가 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=a$에서 연속이다.

풀이

참 $y=|x|$는 연속함수이므로 $y=f(x)$와 $y=|x|$의 합성함수 $y=|f(x)|$도 연속이다.

04 $x=a$에서 $y=f(x)+g(x)$가 연속이면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=\begin{cases} 0 \ (x \ge a) \\ 1 \ (x<a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 \ (x \ge a) \\ 0 \ (x<a) \end{cases}$

05 $x=a$에서 $f(x)$가 연속이고 $g(x)$는 불연속이면 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=x-a$, $g(x)=\begin{cases} 1 \ (x>a) \\ 0 \ (x \le a) \end{cases}$

06 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 3$일 때 $\lim_{x \to 0} \frac{x-2f(x)}{x^2+f(x)}$ 값을 구하라.

풀이

$t=x-2$라 하자. $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 3$이다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-2f(x)}{x^2+f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-2\frac{f(x)}{x}}{x+\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0}\left\{1-2\frac{f(x)}{x}\right\}}{\lim_{x \to 0}\left\{x+\frac{f(x)}{x}\right\}} = \frac{1-2\times 3}{0+3} = -\frac{5}{3}$$

07 다음 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to -1} f(x)$ 값을 구하라.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-3}{f(x)} = \frac{1}{3}$	(나) $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x^2-4} = 2$

풀이

조건 (가)에서 $f(x)$가 일차식이라면 주어진 극한은 양의 무한대로 발산한다. $f(x)$가 3차 이상이라면 주어진 극한은 0으로 수렴한다. 즉 $f(x)$의 차수는 2이고 최고차항의 계수는 3이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x \to -2}(x^2-4) = 0$이므로 $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 0$이다. 즉, $f(x) = 3(x+2)(x-a)$라 쓸 수 있다.
(단, a는 상수)

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)(x-a)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x-a)}{x-2} = \frac{3(a+2)}{4} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

$\therefore f(x) = (x+2)(3x-2) \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -5$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 방정식 $x^{99}+x+a=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
이 실근이 0보다 크고 1보다 작을 때 상수 a 값의 범위를 구하라.

풀이

$f(x)=x^{99}+x+a$라 할 때 $f(0)f(1)<0$이면 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
$f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

$$f(0)f(1)<0 \iff a(a+2)<0 \iff -2<a<0$$

02 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 다음 방정식이 서로 다른 두 실근을 가짐을 설명하라.

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

풀이

$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$라 두면 $f(x)=0$은 이차방정식이다.
$f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(b)=(b-c)(b-a)<0$, $f(c)=(c-a)(c-b)>0$
$\Rightarrow f(a)f(b)<0$, $f(b)f(c)<0$
$\Rightarrow$ 구간 (a, b)와 구간 (b, c)에서 $f(x)=0$의 실근이 각각 적어도 하나씩 존재한다.
$\Rightarrow f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 함수가 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는지 판단하라.

01 $f(x)=x^2-3x \quad [-1,3]$

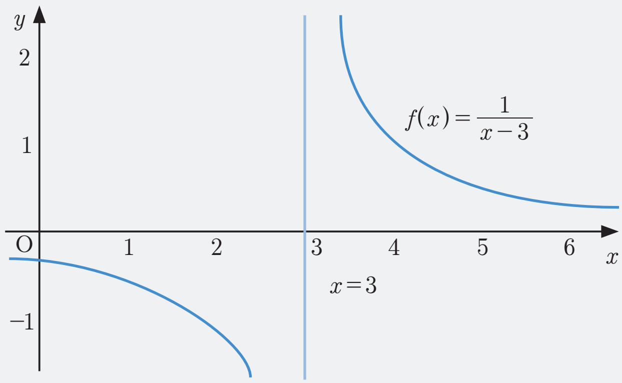
풀이

$f(x)=x^2-3x$ 는 연속함수이고 $[-1,3]$은 닫힌구간이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

02 $f(x)=\dfrac{1}{x-3} \quad [2,4]$

풀이

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$은 구간 $[2,4]$에서 연속함수가 아니므로 최대·최소 정리를 적용할 수 없다. 실제로 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 최댓값과 최솟값이 모두 없다.



※ 03~04 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하라.

03 $f(x)=x^2-2x-1 \quad [-1, 2]$

풀이

$f(x)=(x-1)^2-2$이므로 $x=1$에서 최솟값 $f(1)=-2$를 갖는다.

$f(-1)=2$, $f(2)=-1$이므로 $x=-1$에서 최댓값 $f(-1)=2$를 갖는다.

04 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \quad [0, 3]$

풀이

$f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면

$x=0$에서 최솟값이 $f(0)=-1$이고 $x=3$에서 최댓값이 $f(3)=\dfrac{1}{2}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a-nh)}{h}$는 수렴한다.

풀이

참 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a-nh)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a)+f(a)-f(a-nh)}{h}$

$=m\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a)}{mh}+n\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+(-nh))-f(a)}{-nh}$

$=(m+n)f'(a)$

02 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 값이 존재하면 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=|x-a|$

03 함수 $f(x)=x^2-2$에 대하여 x 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때의 평균변화율과 $x=2$에서 미분계수가 같을 때, 상수 a 값을 구하라.

풀이

(평균변화율)$=\dfrac{f(a+2)-f(a)}{2}=\dfrac{4a+4}{2}$

($x=2$에서의 미분계수)$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+4)=4$

$\therefore \dfrac{4a+a}{2}=4 \Leftrightarrow a=1$

04 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해 $f(3)$, $f'(3)$을 이용하여 다음 극한값을 나타내라.

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{xf(x)-3f(3)}$$

풀이

$$\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=\frac{xf(x)-xf(3)+xf(3)-3f(3)}{x-3}=x\times\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+f(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to3}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left\{x\times\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}+f(3)\right\}=3\times f'(3)+f(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to3}\frac{x-3}{xf(x)-3f(3)}=\left\{\lim_{x\to3}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}\right\}^{-1}=\frac{1}{3f'(3)+f(3)}$$

05 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=2$일 때 다음 극한값을 구하라.

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{9}{n}\right)\right\}$$

풀이

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{9}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{9}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-f(1-9h)}{h}$$

$$\frac{f(1+3h)-f(1-9h)}{h}=3\times\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+9\times\frac{f(1-9h)-f(1)}{-9h}$$

$f(x)$는 미분가능하므로 $\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이다.

$$\Rightarrow \lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-f(1-9h)}{h}=3f'(1)+9f'(1)=12f'(1)=24$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 항상 미분가능하다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$은 미분가능한 함수지만 도함수 $f'(x)=2|x|$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

02 함수 $f(x)$의 도함수는 유일하다.

풀이

참 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 a마다 대응되는 미분계수 $f'(a)$는 유일하게 존재한다.

03 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 다른 함수이면 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$도 서로 다른 함수다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=x^2+3$과 $g(x)=x^2-5$는 서로 다른 함수이지만 $f'(x)=2x=g'(x)$이다.

04 함수 $f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x+1$에 대하여 $f'(1)$ 값을 구하라.

풀이

x^n(n은 자연수)의 도함수는 nx^{n-1}이다.

$$f'(x)=100x^{99}+99x^{98}+\cdots+2x+1$$

$\Rightarrow f'(1)=100+99+\cdots+2+1=\dfrac{100+1}{2}\times 100=5050$

05 함수 $f(x)=x^8-2x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$로 정의한다. 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속일 때 $g(2)$ 값을 구하라.

풀이

$g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $g(2)=\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이다.

$$f'(x)=8x^7-2 \quad \Rightarrow \quad f'(2)=1022$$

$\therefore g(2)=1022$

06 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2} & (x<1) \\ -x^2+4x & (x\geq 1) \end{cases}$일 때, 다음 중 옳은 것을 있는 대로 고르라.

ㄱ $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

풀이

ㄱ $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(-x^2+4x)=3$, $f(1)=3$이므로 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{-(1+h)^2+4(1+h)-3}{h}=2$,

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{\dfrac{(1+h)^2}{2}+(1+h)+\dfrac{3}{2}-3}{h}=2$이므로 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ 도함수 $f'(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ 2 & (x=1) \\ -2x+4 & (x>1) \end{cases}$은 $\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f'(x)=2=f'(1)$이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음을 만족한다고 하자.

$$(x+1)f(x)=x^3+x^2+x+1$$

$f'(1)$ 값을 구하라.

풀이

주어진 식에 $x=1$을 대입하면 $2f(1)=4$, $f(1)=2$이다. 주어진 식의 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$f(x)+(x+1)f'(x)=3x^2+2x+1$$

$\Rightarrow x=1$을 대입하면 $f(1)+2f'(1)=6$이다.

$\therefore f'(1)=2$

02 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=\dfrac{2x}{g(x)-1}$, $f'(0)=3$일 때, $g(0)$ 값을 구하라(단, $g(x)\neq 1$).

풀이

$f(x)=\dfrac{2x}{g(x)-1} \Leftrightarrow f(x)\{g(x)-1\}=2x$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)\{g(0)-1\}=0$, $f(0)=0$이다($\because g(0)\neq 1$).

$f(x)\{g(x)-1\}=2x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$f'(x)\{g(x)-1\}+f(x)g'(x)=2$$

$\Rightarrow f'(0)\{g(0)-1\}=2$

$\therefore g(0)=\dfrac{5}{3}$

03 다항식 $x^{10}-x+3$을 $(x+1)(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(2)$ 값을 구하라.

풀이

3차식으로 나누었으므로 나머지의 차수는 2차 이하다.

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

몫을 $Q(x)$라 두면 다음과 같다.

$$x^{10}-x+3=(x+1)(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots ①$$

①의 양변에 $x=-1$을 대입 : $5=a-b+c$

①의 양변에 $x=1$을 대입 : $3=a+b+c$

두 식을 연립하면 $b=-1$이다. ①에서 양변을 x에 대하여 미분하자.

$$10x^9-1=(x-1)^2Q(x)+2(x+1)(x-1)Q(x)+(x+1)(x-1)^2Q'(x)+2ax+b$$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입 : $9=2a+b$

$b=-1$이므로 $a=5$, $c=-1$이다. 따라서 $R(x)=5x^2-x-1$이다.

$\therefore R(2)=17$

04 미분가능한 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$, $f'(x)=f(x)$이다. 이때 함수 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{f(x)}$에 대하여 $g'(1)$ 값을 구하라.

풀이

$$g'(x)=\frac{2xf(x)-(x^2+1)f'(x)}{\{f(x)\}^2}=-\frac{(x-1)^2f(x)}{\{f(x)\}^2}=-\frac{(x-1)^2}{f(x)}$$

$\therefore g'(1)=0$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 미분가능한 함수 $g(x)$에 대해 합성함수 $g(f(x))$가 미분가능하면 $f(x)$도 미분가능하다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$

02 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해 합성함수 $g(f(x))$가 미분가능하면 $g(x)$도 미분가능하다.

풀이

거짓 반례 : $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$

03 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(1)=1$, $f'(1)=3$, $F(x)=f(f(x))$일 때, $F'(1)$ 값을 구하라.

풀이

$F'(x)=f'(f(x))f'(x) \Rightarrow F'(1)=f'(f(1))f'(1)=f'(1)f'(1)=3\times3=9$

04 함수 $f(x)=(2x-3)^3(x^2+1)^2$에 대하여 $f'(1)$ 값을 구하라.

풀이

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(2x-3)^3\}'(x^2+1)^2+(2x-3)^3\{(x^2+1)^2\}' \\ &= 6(2x-3)^2(x^2+1)^2+(2x-3)^3\times2(x^2+1)\times2x \end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=24-8=16$

05 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{2}$이라 하자. $\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x))}{2x^2 - x - 1}$ 값을 구하라.

풀이

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to 0} x = 1 \times 0 = 0$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} \times \lim_{x \to 1} (x-1) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(f(1)) = f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1, \ f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x))}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{f(f(x)) - f(f(1))}{(x-1)(2x+1)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{f(f(x)) - f(f(1))}{x-1} \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x+1} \\
&= (f \circ f)'(1) \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} f'(f(1)) f'(1) \\
&= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 다음 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to-1} f(x)$ 값을 구하라.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{f(x)}=\frac{1}{3}$	(나) $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2-4}=2$

풀이

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{f(x)}=\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)=3x^2+ax+b$

$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2-4}\times\lim_{x\to-2}(x^2-4)=2\times0=0 \Rightarrow 12-2a+b=0$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}=f'(-2)\times\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f'(-2)=-8$

이때 $f'(x)=6x+a$이므로 $12+a=-8$이다.

두 식을 연립하면 $a=4$, $b=-4$이므로 $f(x)=3x^2+4x-4$이다.

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=-5$

02 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 두 조건을 만족한다. 이때 $f(2)$ 값을 구하라.

(가) $\frac{1}{2}(x+1)f'(x)=f(x)+2$	(나) $f(0)=0$

풀이

$f(x)=a_nx^n+\cdots$라 하자. (가)에서 양변의 최고차항을 비교하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}na_nx^n=a_nx^n \Leftrightarrow n=2$$

$f(x)=ax^2+bx+c$라고 두면 (나)에서 $f(x)=ax^2+bx$이다.

이제 (가)에서 $ax^2+\frac{2a+b}{2}x+\frac{b}{2}=ax^2+bx+2$이다.

$\Rightarrow b=4,\ a=2,\ f(x)=2x^2+4x$

$\therefore f(2)=16$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 식이 성립함을 보여라.

01 $(\sec x)' = \sec x \tan x$

풀이

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

02 $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

풀이

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

03 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{2x^3+2x^2+x}$ 값을 구하라.

풀이 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{2x^3+2x^2+x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x} \times \frac{3x^3+5x^2+4x}{2x^3+2x^2+x}\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x} \times \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+2x+1} = 1 \times 4 = 4\end{aligned}$$

풀이 2

$x \to 0$일 때 $\sin x \simeq x$이므로 $\dfrac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{2x^3+2x^2+x} \simeq \dfrac{3x^3+5x^2+4x}{2x^3+2x^2+x} \to 4$

04 두 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\tan x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(g(x))}{x}$ 값을 구하라.

풀이

$f(g(0))=f(0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(g(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(g(x))-f(g(0))}{x}=(f\circ g)'(0)$

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=\cos(\tan x)\sec^2 x$

$\Rightarrow (f\circ g)'(0)=\cos 0\times \sec^2 0=1$

05 함수 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 의 도함수를 구하라.

풀이 1

$y'=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$\quad =2\sin 2x(-\cos 2x)=-\sin 4x$

풀이 2

$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{2}\times 2\sin 2x\times 2\cos 2x=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 극한을 계산하라.

01 $\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

풀이

$(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}=(1+x+x^2)^{\frac{1+x}{x(1+x)}}=\left\{(1+x+x^2)^{1/x(1+x)}\right\}^{1+x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^1=e$

02 $\lim_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-(x-1)^2}{x-2}$

풀이

$f(x)=e^{x-2}-(x-1)^2$이라 두면 $f(2)=e^0-1^2=0$이다.

$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-(x-1)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$f'(x)=e^{x-2}-2(x-1)\Rightarrow f'(2)=e^0-2=-1$

03 함수 $f(x)=\begin{cases} b\sin\dfrac{\pi}{2}x+x & (x>1) \\ ae^{-x}+1 & (x\le 1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때 상수 a, b 값을 구하라.

풀이

미분가능한 함수는 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow b+1=ae^{-1}+1$

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\left(b\sin\dfrac{\pi}{2}x+x\right)'\Big|_{x=1}=1$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=(ae^{-x}+1)'\Big|_{x=1}=-ae^{-1}\Rightarrow 1=-ae^{-1}$

$\therefore a=-e,\ b=-1$

04 다음 극한값을 구하라.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{\frac{n}{2}}$$

풀이

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}=\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{\frac{n}{2}}=\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{4}}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 역함수 미분법을 이용하여 다음 함수의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라(단, $x>0$).

01 $x=y^2+2y+1$

풀이

$$\frac{dx}{dy}=2y+2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+2}$$

02 $y^5+y^2+xy+1=0$

풀이

$$x=-y^4-y-\frac{1}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy}=-4y^3-1+\frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{-4y^5-y^2+1}$$

03 로그함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3}$의 도함수를 구하라.

풀이

$$|y|=\frac{|x-1|^2|x+1|}{|x+3|^3} \;\Rightarrow\; \ln|y|=2\ln|x-1|+\ln|x+1|-3\ln|x+3|$$

양변을 x에 대해 미분하면 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$이다.

$$\therefore y'=\frac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}\times\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3}=\frac{(10x+6)(x-1)}{(x+3)^4}$$

04 함수 $f(x)=2x^2+4x+3\ (x>-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음을 구하라.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}$$

풀이

$$\frac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}=\frac{x^2\{g(3)-g(x)\}+(x^2-9)g(x)}{x-3}=(x+3)g(x)-x^2\times\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}=6g(3)-9g'(3)$$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이고 $f(0)=3 \Leftrightarrow g(3)=0$이므로 $g'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{4}$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}=6\times 0-9\times\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$$

05 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 관계를 만족할 때, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 값을 구하라.

$$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$$

풀이

$$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x \ \Leftrightarrow\ 3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}=f(x) \ \Leftrightarrow\ f(x)=\frac{1}{e^x+e^{2x}}$$

$$f'(x)=-\frac{e^x+2e^{2x}}{(e^x+e^{2x})^2}$$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이고 $f(0)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$이므로 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f'(0)}=-\dfrac{2^2}{3}=-\dfrac{4}{3}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 함수 $y=\sqrt[3]{4x-x^3}$을 미분하라(단, $x<-2$).

풀이 1

$$y^3=4x-x^3 \Leftrightarrow \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx}=4-3x^2 \Leftrightarrow 3y^2\frac{dy}{dx}=4-3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4-3x^2}{3y^2}=\frac{4-3x^2}{3\sqrt[3]{(4x-x^3)^2}}$$

풀이 2

합성함수의 미분법에 의해 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}(4x-x^3)^{-\frac{2}{3}}\times(4-3x^2)$이다.

02 음함수 $xy^2-1=0$의 도함수를 구하라.

풀이

$$y^2+x\frac{dy^2}{dx}=0 \Leftrightarrow y^2+x\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{2xy}=-\frac{y}{2x}\text{(단, } xy\neq 0)$$

03 다음과 같이 매개변수로 나타낸 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

$$x=\frac{2t}{1+t^2},\quad y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

풀이

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\times 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

04 함수 $y=\dfrac{e^x\cos x}{1+\sin x}$를 미분하라.

풀이 1

$$(1+\sin x)y=e^x\cos x \Rightarrow (\cos x)y+(1+\sin x)\frac{dy}{dx}=e^x\cos x-e^x\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{e^x\cos^2 x}{1+\sin x}+(1+\sin x)\frac{dy}{dx}=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow (1+\sin x)\frac{dy}{dx}=\frac{e^x(\cos x-\sin x)(1+\sin x)-e^x\cos^2 x}{1+\sin x}=e^x(\cos x-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x(\cos x-1)}{1+\sin x}$$

풀이 2

양변에 자연로그를 취하면 $\ln|y|=x+\ln|\cos x|-\ln|1+\sin x|$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=1+\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\cos x-1}{\cos x}$$

$$\therefore y'=\frac{\cos x-1}{\cos x}\times\frac{e^x\cos x}{1+\sin x}=\frac{e^x(\cos x-1)}{1+\sin x}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~04 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 극댓값은 항상 극솟값보다 크다.

풀이

거짓 함수의 극대·극소는 local한 구간에 대한 이야기다. 반례는 본문 342쪽의 그래프를 참고하라.

02 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분불가능하지만 극소다.

풀이

참 함수의 극대·극소는 미분가능성과 무관하게 정의된다.

03 함수 $g(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$는 $x=0$에서 불연속이지만 극대다.

풀이

참 함수의 극대·극소는 연속성과 무관하게 정의된다.

04 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 $h'(a)=0$이면 $x=a$에서 극값을 가진다.

풀이

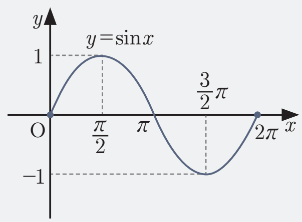
거짓 반례: $h(x)=x^3$은 $h'(0)=0$이지만 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

05 함수 $f(x)=\sin x$가 증가하는 구간을 구하라(단, $0\le x\le 2\pi$).

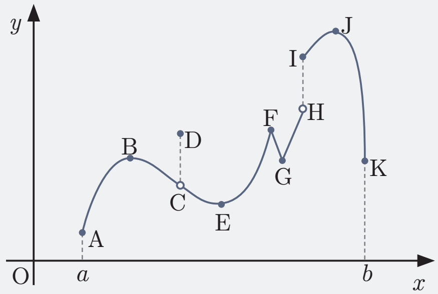
풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)=\sin x$는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$에서 증가한다.



06 구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 f의 그래프가 다음과 같다고 하자. 이 구간에서 함수의 극대점과 극소점을 분류하라.



풀이

- 극대점 : B, D, F, J
- 극소점 : A, E, G, K

07 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(x)$의 극댓값을 구하라(단, a, b, c는 상수).

(가) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x-3}=3$

(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가진다.

풀이

(가)에서 $f(3)=0$, $f'(3)=3$이고 (나)에서 $f'(0)=0$이다.

$\Rightarrow f'(3)=6a+b+27=3,\ f'(0)=b=0$에서 $a=-4$, $b=0$

$\Rightarrow f(3)=9a+3b+c+27=0$에서 $c=9$

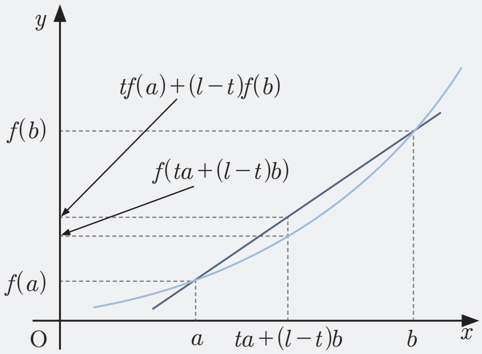
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=9$를 가진다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 구간 $[a, b]$에서 함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록이라고 하자.
서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$와 실수 $t\,(0 \le t \le 1)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$$

힌트 ▶ $ta+(1-t)b$는 수직선 위의 두 점 a와 b를 $(1-t):t$로 내분하는 점의 좌표다.



풀이

구간 $[a, b]$에 속하는 점의 좌표는 실수 $t(0 \le t \le 1)$에 대하여 $ta+(1-t)b$이다.

$\Rightarrow$ 구간 $[a, b]$에서 곡선 위 점의 y좌표는 $f(ta+(1-t)b)$이다.
구간 $[a, b]$에서 선분 PQ 위 점의 y좌표는 $tf(a)+(1-t)f(b)$이다.

구간 $[a, b]$에서 함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록이다.
$\Leftrightarrow$ 구간 $[a, b]$에서 함수 $y=f(x)$가 나타내는 곡선이 항상 선분 PQ 아래쪽에 있다.
$\Leftrightarrow$ 구간 $[a, b]$에서 곡선 위 점의 y좌표가 선분 위의 점의 y좌표보다 작다.
$\Leftrightarrow f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 곡선 $y=x^3-x+2$의 접선 중 직선 $y=2x-1$과 평행한 접선은 2개 존재한다.
이 두 접선 사이의 거리를 구하라.

풀이

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 다음이 성립한다.

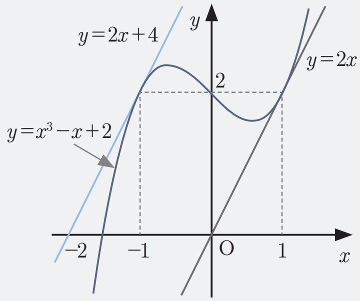
$$y'|_{x=a}=3a^2-1=2 \Rightarrow a=\pm1$$

두 접점의 좌표는 $(-1,2)$, $(1,2)$이다.

$\Rightarrow$ 두 접선의 방정식은 $y=2x+4$, $y=2x$이다.

두 직선 사이의 거리는 $y=2x$ 위의 점 $(0,0)$에서 직선 $y=2x+4$까지 거리와 같다.

$$\therefore \frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$



02 점 $(0,-2)$에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접선이 점 $(3,k)$를 지난다. 이때 k 값을 구하라.

풀이

접점의 좌표를 (a,a^3)이라 하면 다음이 성립한다.

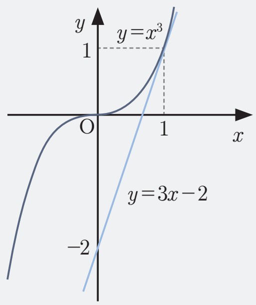
(접점에서 기울기)=(두 점 $(0,-2)$와 (a,a^3) 사이 기울기)

$$\Leftrightarrow 3a^2=\frac{a^3-(-2)}{a-0}$$

$$\Leftrightarrow a=1$$

곡선 위의 점 $(1,1)$에서 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+1=3x-2$이다.

$\Rightarrow k=3\times3-2=7$



개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이면 $f(x)=g(x)+C$ (C는 상수)임을 증명하라.

풀이

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$는 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하다.

구간 (a,b)의 모든 x에 대하여 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

$\Rightarrow$ 구간 (a,b)에서 $h(x)$는 상수함수다.

$h(x)=f(x)-g(x)=C$(C는 상수)이므로 $f(x)=g(x)+C$이다.

02 2차함수 $y=f(x)$ 위 서로 다른 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

풀이

2차함수의 식을 $f(x)=px^2+qx+r$이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)}{b-a}=\frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}=p(b+a)+q$$

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=2p\left(\frac{a+b}{2}\right)+q=p(a+b)+q$$

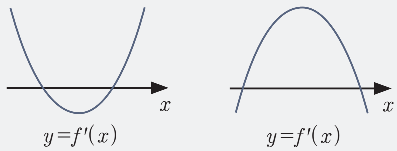
따라서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$이다.

03 3차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 극값이 존재할 조건은 $b^2-3ac>0$임을 보여라.

풀이

$f(x)$는 미분가능한 함수이므로 극값이 존재할 필요충분조건은 도함수 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 순간이 존재하는 것이다.

3차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$는 2차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $f(x)$의 극값이 존재한다.



방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$가 서로 다른 두 실근을 가지므로 $D/4=b^2-3ac>0$이다.

04 평균값 정리를 사용하여 다음을 증명하라.

$$0<x<\frac{\pi}{2}\text{일 때 } \sin x<x\text{이다.}$$

풀이

닫힌구간 $[0,x]$에서 함수 $y=\sin x$에 대하여 평균값 정리를 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos c \quad (\text{단, } c\in(0,x))$$

$\cos c<1$이므로 $\frac{\sin x}{x}<1 \Leftrightarrow \sin x<x$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~03 로피탈 정리를 이용하여 다음의 극한값을 계산하라.

01 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

풀이

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$$

02 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

풀이

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

03 $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$

풀이

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$$

04 다항함수 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$에 대하여 다음을 증명하라.

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x}=0$$

풀이

로피탈 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$이다.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=0$$

$$\vdots$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^ne^{-x}=0$(단, n은 자연수)

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x}&=a_n\left(\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}\right)+a_{n-1}\left(\lim_{x\to\infty}x^{n-1}e^{-x}\right)+\cdots+a_1\left(\lim_{x\to\infty}xe^{-x}\right)+a_0\left(\lim_{x\to\infty}e^{-x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+ax+2$가 극값을 갖도록 하는 실수 a 값의 범위는 $a<\alpha$ 또는 $a>\beta$이다. 이때 $\alpha^2+\beta^2$ 값을 구하라.

풀이

3차함수 $y=f(x)$의 극값이 존재한다.

$\Rightarrow$ 2차함수 $f'(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\Rightarrow f'(x)=6x^2+2ax+a=0$에서 판별식이 0보다 크다.

$$D/4=a^2-6a>0 \Leftrightarrow a(a-6)>0 \Leftrightarrow a<0 \text{ 또는 } a>6$$

$\therefore \alpha=0,\ \beta=6,\ \alpha^2+\beta^2=36$

02 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+kx^2+3kx+5$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 k 값의 범위를 구하라.

풀이

3차함수 $f(x)$가 구간 $(-1,1)$에서 극대, 극소를 모두 갖는다.

$\Rightarrow$ 2차함수 $f'(x)$는 구간 $(-1,1)$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

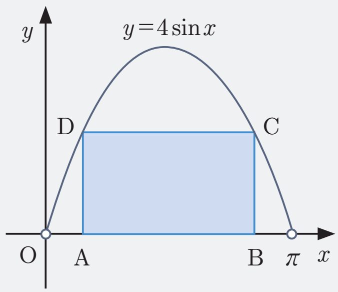
$f'(x)=x^2+2kx+3k=(x+k)^2+3k-k^2$에서 다음과 같다.

$$f'(-1)>0,\ f(-1)>0,\ f'(-k)>0$$
$$\Leftrightarrow k+1>0,\ 5k+1>0,\ 3k-k^2<0$$

$\therefore -\dfrac{1}{5}<k<0$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=4\sin x \ (0<x<\pi)$의 그래프에 내접하는 직사각형 ABCD의 둘레 길이가 최대일 때, 선분 AB의 길이를 구하라.



풀이

점 A의 좌표를 a라고 하면 대칭성에 의해 점 B의 x좌표는 $\pi-a$이다.

$\Rightarrow$ 직사각형 ABCD의 둘레 길이는 $2(\overline{AD}+\overline{AB})=2(4\sin a+\pi-2a)$이다.

$f(a)=2(4\sin a+\pi-2a)$라고 하면 $f'(a)=8\cos a-4=0$에서 $a=\frac{\pi}{3}$이다. 이제 다음이 성립한다.

$$\text{구간 } \left(0, \frac{\pi}{3}\right)\text{에서 } f'(a)>0\text{이고 구간 } \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\text{에서 } f'(a)<0$$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값이자 최댓값을 가진다.

그러므로 둘레의 길이가 최대일 때, 선분 AB의 길이는 $(\pi-a)-a=\pi-2a=\frac{\pi}{3}$이다.

02 $x>0$일 때 부등식 $e^x \geq e\ln x+e$가 성립함을 증명하라.

풀이

$f(x)=e^x-(e\ln x+e)$라고 하면 $x=1$에서 $f'(x)=e^x-\frac{e}{x}=0$이다. 이때 다음이 성립한다.

$$\text{구간 } (0,1)\text{에서 } f'(x)<0\text{이고 구간 } (1,\infty)\text{에서 } f'(x)>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값이자 최솟값을 가진다.

최솟값은 $f(1)=e-e=0$이므로 $x>0$일 때 다음이 성립한다.

$$f(x)\geq 0 \ \Leftrightarrow \ e^x \geq e\ln x+e$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 조사하라.

01 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

풀이

$f'(x)=x^2-x-2=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f''(x)=2x-1$에서

(i) $f''(-1)=-3<0$이므로 $f(-1)=\frac{13}{6}$은 극댓값이다.

(ii) $f''(2)=3<0$이므로 $f(2)=-\frac{7}{3}$은 극솟값이다.

02 $f(x)=x^2e^x$

풀이

$f'(x)=(x^2+2x)e^x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

$f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$에서

(i) $f''(-2)=-\frac{2}{e^2}<0$이므로 $f(-2)=\frac{4}{e^2}$는 극댓값이다.

(ii) $f''(0)=2>0$이므로 $f(0)=0$은 극솟값이다.

※ 03~04 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 오목·볼록을 조사하라.

03 $f(x)=x^3-3x^2+x-1$

풀이

$f'(x)=3x^2-6x+1 \Rightarrow f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$\Rightarrow x>1$일 때 $f''(x)>0$이고 $x<1$일 때 $f''(x)<0$

$\Rightarrow x>1$일 때 아래로 볼록하고 $x<1$일 때 위로 볼록하다.

04 $f(x)=x\ln x$

풀이

$f'(x)=\ln x+1 \Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow x>0$인 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$

$\Rightarrow x>0$일 때 아래로 볼록하다.

05 함수 $f(x)=e^{-2x^2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간에 속하는 정수 x의 개수를 구하라.

풀이

$f'(x)=-4xe^{-2x^2} \Rightarrow f''(x)=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$일 때 $f''(x)<0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$일 때 위로 볼록하다.

$\therefore$ 위로 볼록한 구간에 속하는 정수의 개수는 1개다.

06 $a<x<b$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 선분 AB가 A, B 사이에 있는 곡선보다 항상 아래쪽에 있을 때, a의 최솟값과 b의 최댓값의 합을 구하라.

풀이

선분 AB가 두 점 A, B 사이에 있는 곡선의 부분보다 항상 아래쪽에 있으므로 $a<x<b$에서 곡선이 위로 볼록하다.

$y'=-2xe^{-x^2} \Rightarrow y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

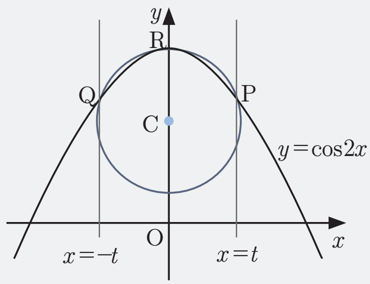
$\Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $y''<0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 위로 볼록하다.

$\therefore$ a의 최솟값은 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, b의 최댓값은 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 구하는 합은 0이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R이라 하자. 세 점 P, Q, R을 지나는 원의 중심을 C$(0, r(t))$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} r(t)$를 구하라.



풀이

세 점을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\overline{RC}=\overline{OR}-\overline{OC}=1-r(t)$이다.

$\Rightarrow \lim_{t\to 0+}\{1-r(t)\}$는 곡선 $y=\cos 2x$의 원점에서의 곡률 반지름이다.

$\varkappa=\frac{|y''|}{\{\sqrt{1+(y')^2}\}^3}=\frac{4}{\{\sqrt{1+0^2}\}^3}=4$이므로 곡률 반지름은 $\frac{1}{4}$이다.

$\Rightarrow \lim_{t\to 0+}\{1-r(t)\}=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\lim_{t\to 0+} r(t)=\frac{3}{4}$이다.

02 다음과 같이 매개변수로 나타낸 곡선의 곡률은 $\varkappa=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}$임을 보여라.

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\quad (0\le t\le 2\pi)$$

풀이

$\dot{x}=1-\cos t,\ \dot{y}=\sin t,\ \ddot{x}=\sin t,\ \ddot{y}=\cos t$이므로

$$|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|=|(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t|=|\cos t-1|=1-\cos t$$
$$\{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2\}^{3/2}=\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\}^{3/2}=(2-2\cos t)^{3/2}=2^{3/2}(1-\cos t)^{3/2}$$

$\Rightarrow \varkappa=\frac{1}{2^{3/2}(1-\cos t)^{1/2}}$

이때 $(1-\cos t)^{1/2}=\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{1/2}=2^{1/2}\sin\frac{t}{2}$이므로 $\varkappa=\frac{1}{2^{3/2}2^{1/2}\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 명제의 참, 거짓을 판정하라.

01 모든 역도함수는 미분가능하다.

풀이

참 역도함수의 정의를 생각해 보자.

02 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

풀이

거짓 반례 : $f(x)=g(x)$일 때,

$$\int f(x)g(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad \int f(x)dx \int g(x)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + C'\right)$$

03 일차함수 $f(x)$에 대하여 $2\int f(x)dx = f(x) + xf(x) - x + 3$이 성립한다. $f(1)=4$일 때, $f(2)$ 값을 구하라.

풀이

일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$라 두고 주어진 식의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} &2f(x) = f'(x) + f(x) + xf'(x) - 1 \\ \Leftrightarrow\ &f(x) = f'(x)(x+1) - 1 \\ \Leftrightarrow\ &ax + b = a(x+1) - 1 = ax + (a-1) \\ \therefore\ &b = a - 1 \end{aligned}$$

$f(1)=4$에서 $a+b=4$이므로 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이다.

$\therefore f(2) = \frac{13}{2}$

04 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\int f(x)dx = xf(x) - 3x^2 + 2x^2$이 성립한다. $f(0) = 2$일 때, $f(2)$ 값을 구하라.

풀이

주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + xf'(x) - 9x^2 + 4x \\ &\Leftrightarrow xf'(x) = 9x^2 - 4x \\ &\Leftrightarrow f'(x) = 9x - 4 \\ &\Leftrightarrow f(x) = \frac{9}{2}x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

$f(0) = 2$이므로 $C = 2$이고 $f(2) = \frac{9}{2} \times 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 12$이다.

05 함수 $f(x) = \int (5x^2 + ae^{-x} + x)dx$를 생각하자. 곡선 $y = f(x)$ 위 $x = 1$인 점에서 접선의 기울기가 $e^2 + 6$일 때, 상수 a 값을 구하라.

풀이

$x = 1$인 점에서 접선의 기울기가 $e^2 + 6$

$\Leftrightarrow f'(1) = e^2 + 6$

$\Leftrightarrow (5x^2 + ae^{-x} + x)|_{x=1} = ae^{-1} + 6 = e^2 + 6$

$\therefore a = e^3$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 임의의 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt = x^2 + x + a$를 만족하는 함수 $f(x)$와 상수 a 값을 각각 구하라.

풀이

주어진 식의 양변을 미분하면 $f(x) = 2x + 1$을 얻는다.

주어진 식의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $\int_1^1 f(t)dt = 0 = 1^2 + 1 + a$에서 $a = -2$이다.

02 등식 $\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{1}{6}(a-b)^3$이 성립함을 보여라.

풀이

$(x-a)(x-b) = (x-b+b-a)(x-b) = (x-b)^2 + (b-a)(x-b)$이므로

$\int (x-a)(x-b)dx = \frac{1}{3}(x-3)^3 + \frac{b-a}{2}(x-b)^2$이다.

$\Rightarrow \int_a^b (x-a)(x-b)dx = 0 - \left\{\frac{1}{3}(a-b)^3 + \frac{b-a}{2}(a-b)^2\right\} = \frac{1}{6}(a-b)^3$

※ 03~04 다음 극한값을 구하라.

03 $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2+1)dt$

풀이

함수 $F(x) = \int_1^x (t^2+1)dt$는 x^2+1의 부정적분이다.

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2+1)dt = \lim_{x \to 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) = (x^2+1)|_{x=1} = 2$

04 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} (t^4 + 3t)dt$

풀이

함수 $G(x) = \int_2^x (t^4 + 3t)dt$는 $x^4 + 3x$의 부정적분이다.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} (t^4 + 3t)dt = \lim_{h \to 0} \frac{G(2+h) - G(2)}{h} = G'(2) = (x^4 + 3x)|_{x=2} = 22$

05 $\int_1^x (x-t)f(t)dt = 2x^3 - 3x^2 + 1$을 만족할 때, $f(1)$ 값을 구하라.

풀이

$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$이므로 이를 x에 대해 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(t)dt$$

$\int_1^x (x-t)f(t)dt = 2x^3 - 3x^2 + 1$의 양변을 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt = 6x^2 - 6x$$

이를 한 번 더 미분하면

$$f(x) = 12x - 6$$

따라서 $f(1) = 12 - 6 = 6$이다.

06 함수 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)dt$의 극댓값을 구하라.

풀이

$f'(x) = (x-1)(x-2) = 0$에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$이다.

도함수의 부호가 (+)에서 (−)로 바뀔 때 극대이므로 $f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값을 가진다.

$$f(1) = \int_0^1 (t-1)(t-2)dt = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

07 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$의 극한값을 구하라.

풀이

주어진 식의 분모와 분자를 급수로 적절하게 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^5}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)^2}$$

위 식에서 우변의 분모와 분자를 똑같이 n^6으로 나누면 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\frac{1}{n}}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right\}^2}$이다.
정적분의 정의로부터 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\frac{1}{n}=\int_0^1 x^5\,dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right\}^2=\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2=\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right)^2=\frac{1}{9}$$

그러므로 구하는 극한값은 $\dfrac{1/6}{1/9}=\dfrac{3}{2}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 다음 등식을 만족하는 상수 a 값을 구하라(단, C는 적분상수).

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx = a(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$$

풀이

$t=x^2+3$이라 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이다.

$\Rightarrow \displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t\sqrt{t}+C = \frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$

02 함수 $f(x)$에 대해 $f'(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}+\tan^2 x$이고 $f(0)=0$일 때, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 값을 구하라.

풀이

삼각함수의 덧셈정리로부터 $1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos x \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$이다.

$\Rightarrow f'(x)=1-\cos x+\tan^2 x=(1+\tan^2 x)-\cos x=\sec^2 x-\cos x$

$\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int(\sec^2 x - cosx)dx=\tan x-\sin x+C$

$f(0)=0$이므로 $f(0)=0-0+C$에서 $C=0$이다.

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

03 부정적분 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+1}dx$를 구하라.

풀이

부분분수로 분해하면 $\displaystyle\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{2}{x+1}\right)$

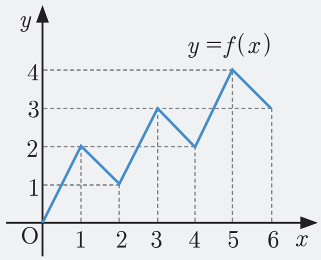
$\displaystyle\Rightarrow \int\frac{x-1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x+1}dx$

$t=x^2-x+1$로 치환하면 $\displaystyle\frac{dt}{dx}=2x-1$이므로

$\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|x^2-x+1|+C$

$\displaystyle\Rightarrow \int\frac{x-1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x^2-x+1|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C'$

04 $0\le x\le 6$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\displaystyle\int_1^2 f(3x-2)dx$ 값을 구하라.



풀이

$t=3x-2$로 치환하면 $\displaystyle\frac{dt}{dx}=3$이고, $x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^2 f(3x-2)dx=\frac{1}{3}\int_1^2 f(3x-2)3dx=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt$$

$y=f(x)$와 $x=1$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\displaystyle\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=6$이다.

$\displaystyle\Rightarrow \frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt=\frac{1}{3}\times 6=2$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

※ 01~02 다음 부정적분을 구하라.

01 $\int x\ln x dx$

풀이

	미분	적분
$+$	$\ln x$	x
$-\int$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}x^2$

왼쪽 표에서

$$\begin{aligned}\int x\ln x dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2 dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

02 $\int e^x\cos x dx$

풀이

	미분	적분
$+$	$\cos x$	e^x
$-\int$	$-\sin x$	e^x
$+\int$	$-\cos x$	e^x

왼쪽 표에서

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x dx &= e^x\cos x - \int(-\sin x)e^x dx\\ &= e^x\cos x + \int e^x\sin x dx\\ &= e^x\cos x + e^x\sin x - \int(-\cos x)e^x dx\\ &= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x\cos x dx\end{aligned}$$

$$\therefore \int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

이 결과는 특히 재미있다. 미분만 3번 했더니 적분이 되어버렸다.

03 미분가능한 함수 $f(x)$가 $xf'(x)+f(x)=(\ln x)^2$, $f(1)=2$를 만족한다고 하자. 방정식 $f(x)=10$의 두 실근의 곱을 구하라.

풀이

$xf'(x)+f(x)=\{xf(x)\}'$이므로 $\int\{xf'(x)+f(x)\}dx=xf(x)$이다.

부분적분법을 사용하면

$$\begin{aligned}\int(\ln x)^2dx&=x(\ln x)^2-\int x\times 2(\ln x)\frac{1}{x}dx=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx\\&=x(\ln x)^2-2\left(x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx\right)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 양변을 적분하면

$$xf(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

이고 $f(1)=2$이므로 위 식에서 $C=2$이다. 즉 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x+2$

$f(x)=10\Leftrightarrow(\ln x)^2-2\ln x-8=0$의 두 실근을 α,β라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\ln\alpha+\ln\beta=\ln\alpha\beta=2$$

따라서 $\alpha\beta=e^2$이다.

04 함수 $f(x)$가 $f(x)=x\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$를 만족할 때, $f(0)$ 값을 구하라.

풀이

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=C$라 두면 $f(x)=x\cos x+C$

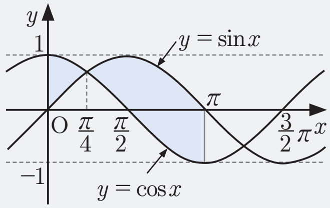
$\Rightarrow$양변을 $x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$까지 정적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}C\,dx&\Leftrightarrow C=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\frac{\pi}{2}C\\&\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}C\end{aligned}$$

따라서 $C=-1$이고 $f(x)=x\cos x-1$, $f(0)=-1$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하라.



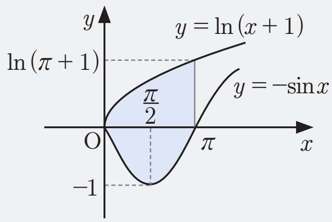
풀이

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 $\sin x \le \cos x$이고 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \pi\right]$에서 $\sin x \ge \cos x$이다.

구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx &= \int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\\ &= [\sin x+\cos x]_0^{\pi/4}+[-\cos x-sinx]_{\pi/4}^{\pi}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

02 두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=-\sin x$와 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하라.



풀이

구하는 도형의 넓이는 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

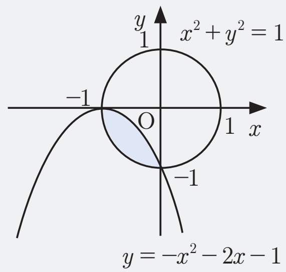
$$\int_0^{\pi}|\ln(x+1)-(-\sin x)|dx=\int_0^{\pi}\{\ln(x+1)+\sin x\}dx$$

부분적분법으로부터

$$\int_0^{\pi}\ln(x+1)dx=[(x+1)\ln(x+1)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1dx=(\pi+1)\ln(\pi+1)-\pi$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^{\pi}\{\ln(x+1)+\sin x\}dx &= \int_0^{\pi}\ln(x+1)dx+\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\ &= (\pi+1)\ln(\pi+1)-\pi+2\end{aligned}$$

03 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=-x^2-2x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하라.



풀이

구하는 도형의 넓이는 사분원 넓이에서 곡선 $y=-x^2-2x-1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같다. 곡선 $y=-x^2-2x-1=-(x+1)^2$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}|-(x+1)^2|dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

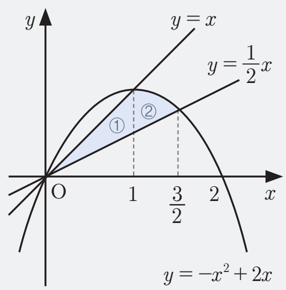
따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$이다.

04 곡선 $y=-x^2+2x$와 두 직선 $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하라.

풀이

그래프를 그려 구하는 도형을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

구하는 도형의 넓이는 ①과 ② 부분으로 나누어 구할 수 있다.



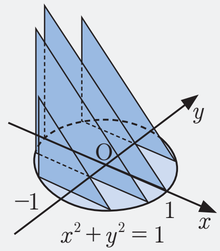
$$① =\int_{0}^{1}\left|x-\frac{1}{2}x\right|dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}② &=\int_{1}^{3/2}\left|(-x^2+2x)-\frac{1}{2}x\right|dx\\ &=\int_{0}^{3/2}\left(-x^2+\frac{3}{2}x\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2\right]_{1}^{3/2}=\frac{7}{48}\end{aligned}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{4}+\frac{7}{48}=\frac{19}{48}$이다.

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 직각이등변삼각형일 때, 입체도형의 부피를 구하라.



풀이

직각삼각형의 밑변의 길이를 a라고 하면 $x^2+y^2=1$에서

$$a=2x=2\sqrt{1-y^2}$$

$\Rightarrow$ 점 y에서 단면의 넓이 $S(y)$는

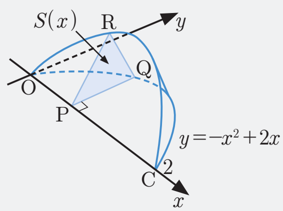
$$S(y)=\frac{1}{2}a^2=2(1-y^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는 $\int_{-1}^{1}2(1-y^2)dy=\frac{8}{3}$이다.

02 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, -x^2+2x)$를 이은 선분을 한 변으로 하고, 이 평면에 수직으로 세운 정삼각형 PQR을 만든다. 점 P가 원점에서 점 $\mathrm{C}(2, 0)$까지 x축 위를 움직일 때, 정삼각형 PQR이 그리는 입체도형의 부피를 구하라.

풀이

$\overline{\mathrm{PQ}}=-x^2+2x$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정삼각형 PQR의 넓이 $S(x)$는 다음과 같다.



$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)$$

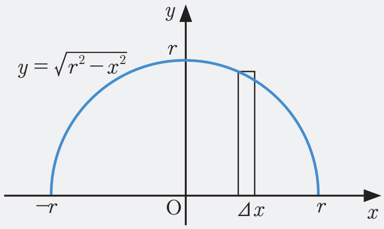
따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^2 S(x)dx&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4\sqrt{3}}{15}\end{aligned}$$

03 정적분을 이용하여 반지름의 길이가 r인 구의 부피를 구하라.

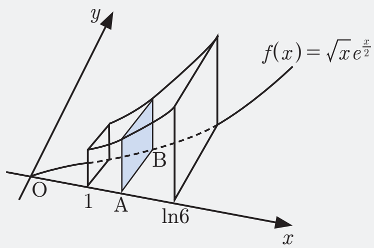
풀이

반지름의 길이가 r인 구는 곡선 $y=\sqrt{r^2-x^2}$과 x축 및 $x=-r$, $x=r$를 경계로 하는 도형을 x축을 중심으로 회전시켜 얻은 입체도형이다.



따라서 구하는 구의 부피는 $\pi\int_{-r}^{r} y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\frac{4\pi r^3}{3}$이다.

04 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$에 대하여 좌표 평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x, 0)$, $\mathrm{B}(x, f(x))$를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A의 x좌표가 $x=1$에서 $x=\ln 6$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하라.



풀이

단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.

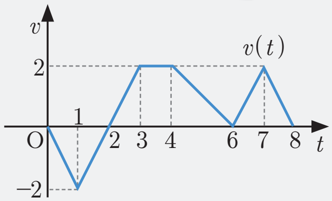
$$S(x)=\{f(x)\}^2=xe^x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는 다음과 같다.

$$\int_1^{\ln 6} S(x)dx=\int_1^{\ln 6} xe^x dx=[xe^x]_1^{\ln 6}-\int_1^{\ln 6} e^x dx=6\ln 6-[e^x]_1^{\ln 6}=6\ln 6-6+e$$

개념 쏙쏙 확인예제 풀이

01 오른쪽 그림은 $x=1$인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도 $v(t)$를 나타낸 그래프다. 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라(단, $0 \le t \le 8$).



㉠ 점 P의 시각 $t=3$에서 위치는 원점이다.

㉡ 점 P의 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 위치의 변화량은 3이다.

㉢ 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=8$까지 움직인 거리는 9이다.

㉣ 점 P는 출발 후 운동 방향을 2번 바꾸었다.

풀이

㉠ **참** $x=1$인 점에서 출발하므로 $s(0)=1$이다. 따라서 $s(3)$은 다음과 같다.

$$s(3)=s(0)+\int_0^3 v(t)dt=1+\int_0^3 v(t)dt=1+(-2+1)=0$$

즉 $t=3$에서 위치는 원점이다.

㉡ **거짓** $s(4)-s(1)=\int_1^4 v(t)dt=\int_1^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt=-1+3=2$이므로 위치의 변화량은 2이다.

㉢ **참** $\int_0^8 |v(t)|dt=\int_0^2 \{-v(t)\}dt+\int_2^6 v(t)dt+\int_6^8 v(t)dt=3+5+2=9$이므로 움직인 거리는 9이다.

㉣ **거짓** $v(t)$는 구간 $(0, 2)$에서 $v(t)<0$이고 구간 $(2, 8)$에서 $v(t) \ge 0$이므로 운동 방향을 $t=2$일 때 1번 바꾸었다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

02 어느 놀이동산에서 2분 동안 운행하는 열차의 운행속도 $v(t)$(m/초)가 다음과 같다고 하자.

$$v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & (0\le t<10)\\ k & (10\le t<100)\\ \frac{1}{4}(120-t) & (100\le t\le 120)\end{cases}$$

이 열차가 출발 후 정차할 때까지 운행한 거리를 구하라(단, 단위는 m이고 k는 상수).

풀이

열차의 운행속도 $v(t)$는 연속함수이므로 $\lim_{t\to 10+}v(t)=k=\lim_{t\to 100-}v(t)$에서 $k=5$이다.

따라서 열차가 정차할 때까지 운행한 거리는 다음과 같다.

$$\int_0^{120}|v(t)|dt=\int_0^{10}\frac{1}{2}tdt+\int_{10}^{100}5dt+\int_{100}^{120}\frac{1}{4}(120-t)dt=525(\mathrm{m})$$

03 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서 속도가 각각 $3t^2$, $2t-3$이다. 점 P는 원점을 출발하고 점 Q는 3인 점을 출발했을 때, 두 점 P, Q가 만나는 지점까지 점 Q가 움직인 거리를 구하라.

풀이

시각 t에서 두 점 P, Q 각각의 위치를 $s_P(t)$, $s_Q(t)$라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

$$s_P(t)=0+\int_0^t 3t^2dt=t^3,\ s_Q(t)=3+\int_0^t(2t-3)dt=t^2-3t+3$$

두 점 P, Q가 만나는 시각은 각각의 위치가 같을 때다.

$$s_P(t)=s_Q(t)\Leftrightarrow t^3-t^2+3t-3=0\Leftrightarrow(t-1)(t^2+3)=0$$

위 식에서 $t=1$일 때 두 점 P, Q가 만남을 알 수 있다. 따라서 $t=0$에서 $t=1$까지 점 Q가 움직인 거리는 다음과 같다.

$$\int_0^1|2t-3|dt=\int_0^1(-2t+3)dt=[-t^2+3t]_0^1=2$$