Section 1.1

1.

$x+5y-\sqrt{2}z=1$: 일차방정식이다.

2.

$x+3y+xz=2$: 일차방정식이 아니다.(xz항)

3.

$x=-7y+3z$: 일차방정식이다.

4.

$x^{-2}+y+8z=5$: 일차방정식이 아니다.(x^{-2}항)

5.

$xyz=x+2y$: 일차방정식이 아니다.(xyz항)

6.

$\pi x-\sqrt{2}y+\frac{1}{3}z=\sqrt[3]{7}$: 일차방정식이다.

7.

$x-2y=5$

8.

$x-2y=5$

9.

$2x-y=-6$

10.

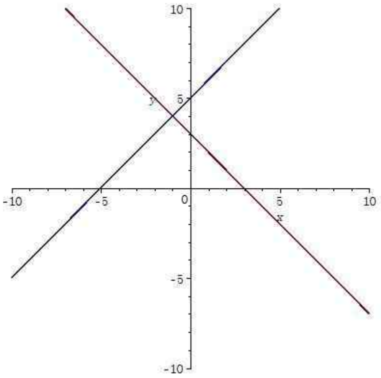
$2x-y=-6$

11.

$x-2y=5$

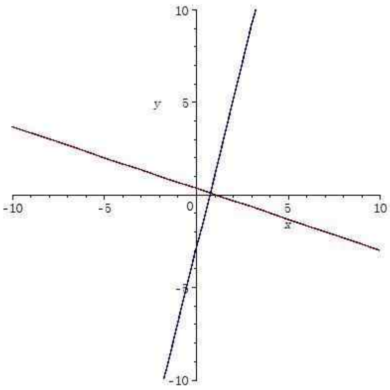
12.

$x = -1, y = 4$



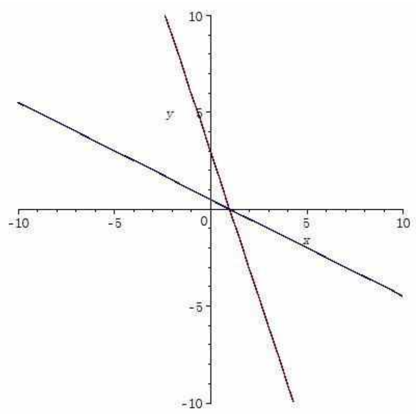
13.

$x = \frac{10}{13}, y = \frac{1}{13}$



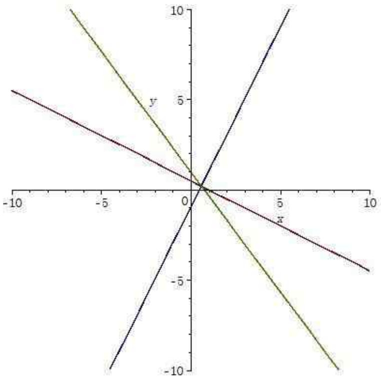
14.

$x = 1, y = 0$



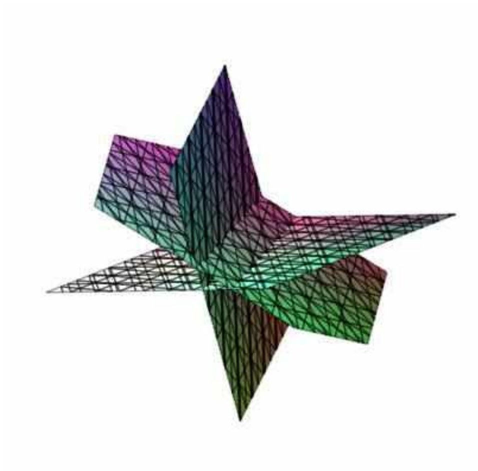
15.

$x = \frac{3}{5}, y = \frac{1}{5}$



16.

해가 없다.



17.

(a) k개의 직선이 교점을 갖지 않는다.

(b) k개의 직선이 유일한 교점을 갖는다.

(c) k개의 직선이 하나의 직선으로 포개어진다.

18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_1 - 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Section 1.2

1.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.

REF, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

4.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7.

REF, RREF , $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

8.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.

$x=-3,\ y=0,\ z=-4$

10.

$x=1,\ y=0,\ z=0$

11.

$x_1=8+7s,\ x_2=2-3s,\ x_3=-5-s,\ x_4=s\ \ (s\in\mathbb{R})$

12.

$x_1=-11-7s+2t,\ x_2=s,\ x_3=-4-3t,\ x_4=9=3t,\ x_5=t\ \ (s,t\in\mathbb{R})$

13.

$x=1, y=2, z=-2$

14.

$x=3, y=-2, z=4$

15.

$x=3-2s,\ y=-4+s,\ z=5-3s,\ w=s\ \ (s\in\mathbb{R})$

16.

해가 없다.

17.

$x = s,\ y = 0,\ z = -2s,\ w = s\ \ (s \in \mathbb{R})$

18.

$x = -5 - 2s,\ y = 2 + 3s,\ z = 3 + 2s,\ w = s\ \ (s \in \mathbb{R})$

19.

$x = 1,\ y = 3,\ z = 1$

20.

$x = -13s,\ y = 10s,\ z = 3s,\ w = s\ \ (s \in \mathbb{R})$

21.

$x_1 = 8 + 8s + 4t,\ x_2 = 2 + \dfrac{26}{3}s + 2t,\ x_3 = 1 - 8s - t,\ x_4 = -1 + 4s - t,\ x_5 = s,\ x_6 = t$

$(s,\ t \in \mathbb{R})$

22.

자명하지 않은 해

23.

자명하지 않은 해

24.

자명한 해

25.

자명한 해

26.

자명한 해

27.

자명하지 않은 해

28.

자명한 해

29.

자명하지 않은 해

30.

주어진 동차 연립일차방정식의 REF를 구하면 $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a-\lambda} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(a-\lambda)(d-\lambda)-bc} & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 자명하지 않은 해를 가지려면 $\dfrac{1}{(a-\lambda)(d-\lambda)-bc}$ 의 분모가 0이어야 한다. 즉, 분모를 전개하면

$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$

31.

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

32.

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

33.

x_4가 0이므로 차례로 모두 0이다.

34.

$a = 3$

35.

$a \neq 3$

36.

$a = 2$

37.

$-5a + 2b + c = 0$

Section 1.3

1.

$a_{12}=-2,\ a_{22}=-3,\ a_{23}=4$

2.

$b_{11}=2,\ b_{31}=5$

3.

$c_{13}=2,\ c_{31}=7,\ c_{33}=-1$

4.

$6,\ 3,\ -1$

5.

$a=4, b=-1, c=\frac{11}{2}, d=\frac{1}{2}$

6.

$a=0, b=2, c=1, d=2$

7.

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 11 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ -12 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10.

$$AB=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -6 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

11.

$x=0,\ y=-3,\ z=-1,\ w=-1$

12.

$x=-1,\ y=-5,\ z=1,\ w=2$

13~16.

$$AB=\begin{bmatrix}67 & 41 & 41\\64 & 21 & 59\\63 & 67 & 57\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}6 & -6 & 70\\6 & 17 & 31\\63 & 41 & 122\end{bmatrix}$$

13.

AB의 $(2,3)$ 성분 59

14.

BA의 $(2,3)$ 성분 31

15.

AB의 1행 $[67\ 41\ 41]$

16.

AB의 3열 $\begin{bmatrix}41\\59\\57\end{bmatrix}$

17.

(a) $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\-3 & 0 & 1\\3 & 7 & 0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\3 & 1 & 1 & -4\\0 & 1 & -5 & 2\end{bmatrix},\ \mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$

18.

$k=0$ 또는 $k=2$

Section 1.4

1.

$A+B=B+A$

$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}=B+A$

2.

$A+(B+C)=(A+B)+C$

$A+B+C=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}=C+B+A$

3.

$(a+b)C=aC+bC$

$(-2+3)C=\begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4.

$a(B-C)=aB-aC$

$-2B+2C=\begin{bmatrix} 4 & -12 & 0 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

5.

$A(BC)=(AB)C$

$A(BC)=(AB)C=\begin{bmatrix} -2 & 34 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$

6.

$a(BC)=(aB)C=B(aC)$ $=\begin{bmatrix} 20 & 2 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}$

7.

$(ab)C=a(bC)=$ $6C=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

8.

$AB=AC$ $=\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

9.

$A^2-2A=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

10.

$3A^3-2A^2+5A-4I_2=\begin{bmatrix} -24 & -30 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$

11.

$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

12.

$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

13.

$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

14.

$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

15.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta \;\; \cos\theta \end{bmatrix}$$

16.

(2) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, $C=[c_{ij}]_{m\times n}$라 하면

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{m\times n} \\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n} \\ &= (A+B)+C \end{aligned}$$

(3) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times r}$, $C=[c_{ij}]_{r\times s}$ 라 하면

$$\begin{aligned} A(BC) &= [a_{ij}][\sum_{p=1}^{r} b_{ip}c_{pj}] \\ &= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ (\sum_{p=1}^{r} b_{kp}c_{pj})] = [\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{r} a_{ik}\ (b_{kp}c_{pj})] \\ &= [\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{r}(a_{ik}b_{kp})c_{\pi}] = [\sum_{p=1}^{r}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp})c_{\pi}] \\ &= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{ij}] = (AB)C \end{aligned}$$

17.

(4) $$\begin{aligned} (A^k)(A^{-1})^k &= (\underbrace{AA\cdots A}_{k})(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k}) \\ &= AA\cdots(AA^{-1})A^{-1}\cdots A^{-1} = I \end{aligned}$$

따라서 $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

Section 1.5

1.

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

3.

비가역행렬

4.

비가역행렬

5.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

6.

비가역행렬

7.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{7} & -2 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{16}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \\ \frac{11}{7} & -1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{9}{7} & 1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

10.

비가역행렬

11.

$$a \neq 0,\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

15.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

16.

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

17.

$$A^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

18.

n차 정사각행렬 A가 가역이므로 $I_n=A^3-2A^2+3A$의 양변에 A^{-1}를 곱해보자.

$A^{-1}=A^2-2A+3I_n$

19.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{k}&0&0&0\\-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}&0&0\\\frac{1}{k^3}&-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}&0\\-\frac{1}{k^4}&\frac{1}{k^3}&-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}\end{bmatrix}\ (k\neq 0)$$

20.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}$$

Section 1.6

1.

$x_1 = 3, x_2 = -1$

2.

$x_1 = -3, x_2 = -3$

3.

$x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$

4.

$x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$

5.

$x_1 = -6, x_2 = 1, x_3 = 10, x_4 = -7$

6.

(a) $x_1 = \frac{22}{17},\ x_2 = \frac{1}{17}$

(b) $x_1 = \frac{21}{17},\ x_2 = \frac{11}{17}$

7.

(a) $x_1 = \frac{7}{15},\ x_2 = \frac{4}{15}$

(b) $x_1 = \frac{34}{15},\ x_2 = \frac{28}{15}$

(c) $x_1 = \frac{19}{15},\ x_2 = \frac{13}{15}$

8.

(a) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,$

(b) $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

9.

(a) $x_1 = 18,\ x_2 = -9,\ x_3 = 2$

(b) $x_1 = -23,\ x_2 = 11,\ x_3 = -2$

(c) $x_1 = 5,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0$

10.

(1) $b_2 - 2b_1 = 0$ (2) $b_2 - \frac{1}{2}b_1 = 0$

11.

(a) 계수행렬이 가역이므로 임의의 실수 $b_1,\ b_2,\ b_3$

(b) $b_3 - b_1 = 0$

12.

$A(\mathrm{x}_1 + \mathrm{y}_1) = A\mathrm{x}_1 + A\mathrm{y}_1 = \mathrm{b} + 0 = \mathrm{b}$

Section 1.7

1.
비가역

2.
가역

3.
가역

4.
비가역

5.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -12 & -1 & 6 \\ 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

7.

$$(A^T)^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}=A$$

8.

$(A+B)^T=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^T+B^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 이므로

$(A+B)^T=A^T+B^T$

9.

$(AC)^T=\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$, $C^TA^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$ 이므로

$(AC)^T=C^TA^T$

10.

$$(-4C)^T=\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -16 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -12 & -4 & -4 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}=-4C^T$$

11.

$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = O \quad \Rightarrow \quad ka_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \text{ or } a_{ij} = 0$ (즉 $A = 0$)

12.

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$이므로 AA^T은 대칭행렬이다.

13.

$x = 1, -2, 4$를 제외한 모든 실수

14.

(1) $A = [a_{ij}]$라 하면 $A^T = [a_{ji}]$. $(A^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$

(2) $(A+B)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$

(4) $(kA)^T = [ka_{ij}]^T = [ka_{ji}] = k[a_{ji}] = kA^T$

15.

(2) $tr(A^T) = \sum_{k=1}^{n} (a_{kk}) = tr(A)$

(3) $tr(kA) = \sum_{k=1}^{n} (ka_{kk}) = k \sum_{k=1}^{n} (a_{kk}) = k\,tr(A)$

(4) $tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} (a_{1k}b_{k1} + a_{2k}b_{k2} + \cdots + a_{nk}b_{kn}) = \sum_{k=1}^{n} (b_{1k}a_{k1} + b_{2k}a_{k2} + \cdots + b_{nk}a_{kn}) = tr(BA)$

16.

$AB - BA = I_n$을 만족하는 A, B가 존재한다고 하자.

양변에 대각합을 취하면 $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq n = \mathrm{tr}(I_n)$이 되어 모순이 된다.

17.

$$D^k = \mathrm{diag}\left(a_{11}^k,\ a_{22}^k,\ \cdots,\ a_{nn}^k\right) = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

18.

대각행렬이 역행렬을 갖기 위한 조건은 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$이다.

$$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(1/a_{11},\ 1/a_{22},\ \cdots,\ 1/a_{nn}\right) = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

19.

$$P_1^{-1} = [\ 1\ ]$$

20.

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

21.

$$P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

22.

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

23.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

24.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

25.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) = \mathrm{tr}\left([1\,2 \cdots\ n] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \right) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Section 1.8

1.

$x_1 = 400, x_2 = 100, x_3 = 0, x_4 = 500$

2.

$I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = 0.5,\ I_2 = I_3 = 0$

3.

$I_1 = 3\mathrm{A}\ ,\ I_2 = 2\mathrm{A}\ ,\ I_3 = 1\mathrm{A}$

4.

$I_1 = \frac{13}{5}\mathrm{A}\ ,\ I_2 = -\frac{2}{5}\mathrm{A}\ ,\ I_3 = \frac{11}{5}\mathrm{A}$

5.

$I_1 = \frac{7}{22}\mathrm{A},\ I_2 = -\frac{1}{22}\mathrm{A}\ ,\ I_3 = -\frac{8}{22}\mathrm{A}$

6.

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$

7.

$y = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{29}{2}x^2 - \frac{227}{6}x + 33$

Section 2.1

1.
$0+1+2+1+1=5$

2.
$0+0+2+3+2=7$

3.
$0+1+2+1+0=4$

4.
$0+0+0+1+3=4$

5.
짝치환

6.
홀치환

7.
짝치환

8.
홀치환

9.
짝치환

10.
짝치환

11.
7

12.
30

13.
-30

14.
-82

15.
2

16.
4

17.
-30

18.
-2

19.
$|B|=4$

20.
$|C|=-8$

21.
$|D|=4$

22.
$|E|=-4$

23.

$x = 1,\ 2$

24.

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{4}$

25.

행렬식은 한 열을 다른 열에 더하여도 변하지 않는다.

26.

2열을 1열에 더하여 얻은 행렬에서 공통인수 2를 빼낸다. 그런 다음, 행렬의 2열에 1열을 빼고 공통인수 (-1)을 빼낸다.

27.

한 열에 실수를 곱하여 다른 열에 더해도 행렬식은 변하지 않는다.

28.

16

29.

$-\dfrac{1}{4}$

30.

-2^{n+2}

31.

$-\dfrac{1}{2^{n+2}}$

32.

16

33.

-12

34.

$-\dfrac{1}{12}$

35.

$-\dfrac{4}{3}$

36.

$3^{n+1}(-64)$

37.

0

38.

$|A|^2 = |A^2| = |A|$이므로 $|A|^2 - |A| = 0$이다. $|A| = 0$ 또는 $|A| = 1$이다.

39.

$|A| = |A^T| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 이므로 $|A|^2 = 1$이다. $|A| = \pm 1$이다.

40.

$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |B||P|\dfrac{1}{|P|} = |B|$

41.

$0 = |0| = |A^k| = |A|^k$이므로 $|A| = 0$이다. 따라서, 행렬 A는 비가역행렬이다.

Section 2.2

1.

$$\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

2.

-34

3.

$$A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{bmatrix} = \det(A)\, I_3$$

4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{25}{39} & -\frac{14}{39} & \frac{7}{39} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{39} & \frac{4}{39} & -\frac{2}{39} \end{bmatrix}$$

8.

$k \neq 0,\ k \neq 5$

9.

$k \neq \frac{1}{4}$

10.

$x = -\frac{11}{47},\ y = -\frac{100}{47}$

11.

$x = -2,\ y = 0,\ z = 1$

12.

$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

13.

$x = -\dfrac{1}{2},\ y = -\dfrac{19}{22},\ zZ = \dfrac{2}{11}$

14.

$x = y = z = w = 0$

15.

$x = \dfrac{-30}{-30} = 1,\ y = \dfrac{30}{-30} = -1,\ z = \dfrac{0}{-30} = 0,\ w = \dfrac{-60}{-20} = 2$

16.

$x_1 = \dfrac{306}{9} = 34,\ x_2 = \dfrac{198}{9} = 22,\ x_3 = \dfrac{-48}{9} = -\dfrac{16}{3},\ x_4 = \dfrac{-30}{9} = -\dfrac{10}{3},\ x_5 = \dfrac{-63}{9} = -7$

17.

$z = -\dfrac{1}{11}$

18.

$z = 1$

19.

$z = 0$

20.

$a = \dfrac{4}{11}$

21.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22.

행렬식이 ± 1이고 $\mathrm{adj}A$의 성분도 정수이므로 행렬 A^{-1}의 모든 성분이 정수이다.

23.

$A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I_n$이므로 양변에 $\det(A)$을 나누면

$\left(\dfrac{1}{\det(A)}A\right)(\mathrm{adj}A) = I_n$

$\therefore [\mathrm{adj}A]^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A = \mathrm{adj}A^{-1}.$

24.

$A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I_n$이므로 양변에 행렬식을 취하면 $\det(A)\det(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)^n$이다.

$\det(A) = 0$이면 양변 다 0이므로 성립한다.

$\det(A) \neq 0$이면 $\det(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)^{n-1}$이다.

25.

$A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I_n$에서 행렬$A$ 대신 행렬 $\mathrm{adj}A$를 대입하면

$\mathrm{adj}A(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det(\mathrm{adj}A))I_n$이고, 양변에 A를 곱하면 다음과 같다.

$$A\,\mathrm{adj}A(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)) = (\det(\mathrm{adj}A))A$$

$$\Rightarrow \det(A)(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)) = (\det(A))^{n-1}A$$

$$\Rightarrow (\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)) = (\det(A))^{n-2}A$$

Section 2.3

1.

$P(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

2.

$-3x + y + 4 = 0$

3.

$2x + y - 1 = 0$

4.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

5.

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

6.

$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0$

7.

$x + 2y + z = 0$

8.

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2^2$

9.

이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선 등)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0 \tag{1}$$

서로 다른 다섯 점 (x_1, y_1), $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$가 한 2차 곡선 위에 있다고 하자. 이 방정식은 여섯 개 미지수를 포함하므로 다섯 개의 방정식이 더 필요하다. 서로 다른 다섯 개의 점을 (1)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 만족한다.

$$
\begin{aligned}
c_1x_1^2 + c_2x_1y_1 + c_3y_1^2 + c_4x_1 + c_5y_1 + c_6 = 0 \\
c_1x_2^2 + c_2x_2y_2 + c_3y_2^2 + c_4x_2 + c_5y_2 + c_6 = 0 \\
c_1x_3^2 + c_2x_3y_3 + c_3y_3^2 + c_4x_3 + c_5y_3 + c_6 = 0 \\
c_1x_4^2 + c_2x_4y_4 + c_3y_4^2 + c_4x_4 + c_5y_4 + c_6 = 0 \\
c_1x_5^2 + c_2x_5y_5 + c_3y_5^2 + c_4x_5 + c_5y_5 + c_6 = 0
\end{aligned}
$$

위의 다섯 방정식은 변수 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$에 관한 연립일차방정식이 된다. 이 연립일차방정식은 자명하지 않은 해를 가지므로 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서 계수행렬의 행렬식이 영이다. 그러므로 서로 다른 다섯 점을 지나는 2차 곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$
\begin{vmatrix}
x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\
x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\
x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\
x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

10.

세 점 $(x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$을 지나는 평면의 방정식은

$$
\begin{vmatrix}
x & y & z & 1 \\
x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\
x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\
x_4 & y_4 & z_4 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

이므로 점 (x_1, y_1, z_1)이 위의 평면의 방정식을 만족하면, 즉

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\
x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\
x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\
x_4 & y_4 & z_4 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

네 점 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$가 같은 평면에 있다는 것과 같은 의미이다.

11.

$a_{n+1} = \det(A_{n+1}) = 3a_n + 4a_{n-1}$

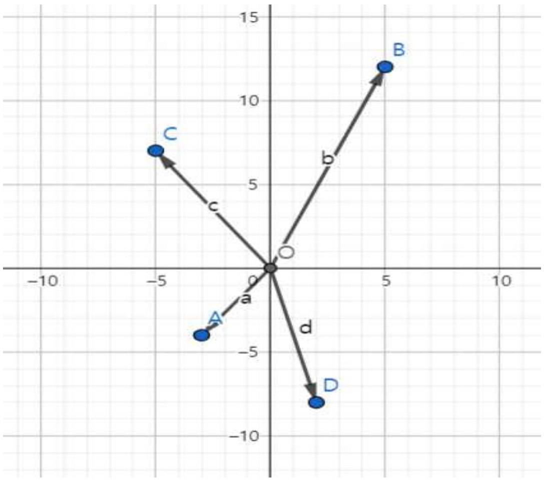
12.

$D_{n+1} = D_n + D_{n-1}$

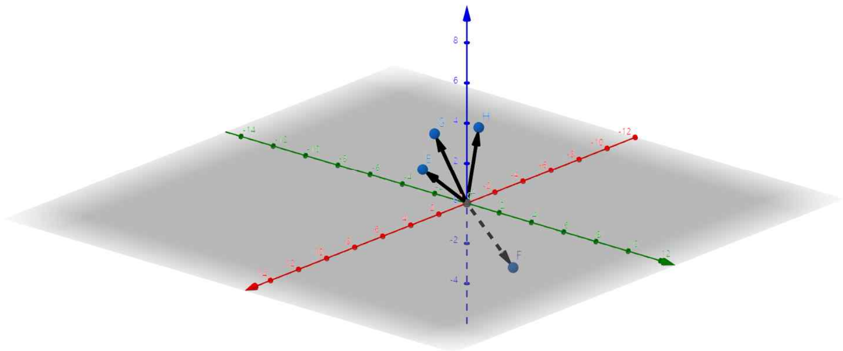
참고 : D_n은 피보나치 수의 형태이다.

Section 3.1

1~4.



5~8.



9.

$\overrightarrow{PQ} = (-3-5,\ 4-(-2)) = (-8,\ 6)$

10.

$\overrightarrow{PQ} = (-4-(-1),\ 3-2,\ -1-(-3))$
$= (-3,\ 1,\ 2)$

11.

$Q(2,\ 3)$

12.

$P(-2,\ -2,\ -1)$

13.

$2u-3v=(-8,\ 10,\ -5)$

14.

$(2u-w)-(3v-3u)=(-2,18,-12)$

15.

$x=(16,-4,5)$

16.

노름 : $\| a \| = \sqrt{5}$

단위벡터 : $u=\frac{a}{\| a \|}=(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

17.

노름 : $\| b \| = \sqrt{6}$

단위벡터 : $u=\frac{b}{\| b \|}=(\sqrt{\frac{2}{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$

18.

노름 : $\| c \| = \frac{3}{2}$

단위벡터는 $u=\frac{c}{\| c \|}=(\frac{3}{4},\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

19.

노름 : $\| d \| = \sqrt{3}$ 이다.

단위벡터 : $u=\frac{d}{\| d \|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$

20.

(1) $a=(-2,1)=(-2,0)+(0,1)=-2e_1+e_2$

(2) $b=(\sqrt{2},2)=(\sqrt{2},0)+(0,2)=\sqrt{2}e_1+2e_2$

(3) $c=(\frac{1}{2},1,-1)=(\frac{1}{2},0,0)+(0,1,0)+(0,0,-1)=\frac{1}{2}e_1+e_2-e_3$

(4) $d=(1,1,-1)=(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,-1)=e_1+e_2-e_3$

21.

$\| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$

22.

그림에 주어진 벡터들의 합은 0이다.

23.

좌표공간 $\mathbb{R}^3$의 경우는 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 경우와 마찬가지이므로 여기서는 $\mathbb{R}^2$의 벡터 $\mathrm{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2)$, $\mathrm{v}=(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$, $\mathrm{w}=(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2)$에 대하여 증명한다.

(1) $\mathrm{u}+\mathrm{v} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)+(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2) = (\mathrm{u}_1+\mathrm{v}_1, \mathrm{u}_2+\mathrm{v}_2)$
$= (v_1+u_1, v_2+u_2)$
$= (v_1, v_2)+(u_1, u_2)$
$= \mathrm{v}+\mathrm{u}$

(2) $\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w}) = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)+((\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)+(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2))$
$= (u_1, u_2)+(v_1+w_1, v_2+w_2)$
$= (u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2))$
$= ((u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2)$
$= (u_1+v_1, u_2+v_2)+(w_1, w_2)$
$= (\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$

(3) $\mathrm{u}+0 = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)+(0,0)$
$= (u_1, u_2)$
$= (0,0)+(u_1, u_2)$
$= 0+\mathrm{u}$
$= \mathrm{u}$

(4) $\mathrm{u}-\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)-(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$
$= (u_1, u_2)+(-1)(u_1, u_2)$
$= \mathrm{u}+(-\mathrm{u})=0$

(5)$1\mathrm{u}=1(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)=(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)=\mathrm{u}$

(6) $(ck)\mathrm{u} = (\mathrm{ck})(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$
$= ((ck)u_1, (ck)u_2)$
$= (c(ku_1), c(ku_2))$
$= c(ku_1, ku_2)$
$= c(k\mathrm{u})$

마찬가지로 $(ck)\mathrm{u}=\mathrm{k}(\mathrm{cu})$

(7) $(c+k)\mathrm{u} = (\mathrm{c}+\mathrm{k})(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$
$= ((c+k)u_1, (c+k)u_2)$
$= (cu_1+ku_1, cu_2+ku_2)$
$= (cu_1, cu_2)+(ku_1, ku_2)$
$= c\mathrm{u}+\mathrm{ku}$

(8) $c(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \mathrm{c}(\mathrm{u}_1+\mathrm{v}_1,\ \mathrm{u}_2+\mathrm{v}_2)$
$= (c(u_1+v_1),\ c(u_2+v_2))$
$= (cu_1+cv_1,\ cu_2+cv_2)$
$= (cu_1,\ cu_2)+(cv_1,\ cv_2)$
$= c\mathrm{u}+\mathrm{cv}$

24.

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

25.

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

26.

$\mathrm{z} = \mathrm{i}+2\mathrm{j}-3\mathrm{k}$

27.

$\mathrm{w} = -\sqrt{2}\mathrm{j}+5\mathrm{k}$

28.

$x=0,\ y=0$ 또는 $x=-2, y=-4$

29.

$x=2, y=3, z=-2$

Section 3.2

1.

$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 3$

2.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = -10$

3.

$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 0$

4.

$\mathrm{p} \cdot \mathrm{q} = 0$

5.

$$\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

6.

$$\cos\theta = \frac{-2}{\frac{2\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

7.

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

8.

$$\cos\theta = \frac{-23}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = \frac{-23}{\sqrt{1189}}$$

9.

$\mathrm{u} \cdot \mathrm{u} = 5$

10.

$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = 0$

11.

$(3\mathrm{u}) \cdot \mathrm{v} = \mathrm{u} \cdot (3\mathrm{v}) = 0$

12.

$3(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}) = 3 \cdot 0 = 0$

13.

x_1과 수직인 벡터는 x_5, x_7이고, x_2와 수직인 벡터는 x_8, x_3와 수직인 벡터는 x_7, x_6과 수직인 벡터는 x_7이다. 특히 영벡터인 x_4는 모든 벡터와 수직이다.

14.

x_1과 평행인 x_3, x_6이다. 또 영벡터는 모든 벡터와 평행이므로 x_4는 모든 벡터와 평행이다.

15.

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$, $\cos\gamma = \dfrac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$

16.

$\cos\alpha = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$

17.

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$

18.

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-4}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\| \sqrt{29} \|}$

19.

세 점 $P(3,1,2)$, $Q(7,0,1)$, $R(2,3,-4)$을 각각 시작점과 끝점으로 하는 벡터는 $\overrightarrow{PQ} = (4,\ -1,\ -1)$, $\overrightarrow{PR} = (-1,\ 2,\ -6)$이고, 두 벡터의 내적은 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$이다. 따라서 두 벡터는 수직이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

20.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{u}+\mathrm{v}) \cdot \mathrm{w} &= ((\mathrm{u}_1,\ \mathrm{u}_2,\ \mathrm{u}_3) + (\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3)) \cdot (\mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2,\ \mathrm{w}_3) \\
&= (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3) \cdot (w_1,\ w_2,\ w_3) \\
&= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + (u_3+v_3)w_3 \\
&= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\
&= \mathrm{u} \cdot \mathrm{w} + \mathrm{v} \cdot \mathrm{w}
\end{aligned}
$$

21.

z가 x,y와 각각 직교하므로 내적은 $\mathrm{z} \cdot \mathrm{x} = 0$, $\mathrm{z} \cdot \mathrm{y} = 0$이다. 한편

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z} \cdot (\mathrm{ax}+\mathrm{by}) &= \mathrm{a}(\mathrm{z} \cdot \mathrm{x}) + \mathrm{b}(\mathrm{z} \cdot \mathrm{y}) \\
&= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

이므로 z는 벡터 $a\mathrm{x} + \mathrm{b}\,\mathrm{y}$ $(\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{R})$와 직교한다.

22.

$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3)$라 하면 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1\mathrm{i} + \mathrm{x}_2\mathrm{j} + \mathrm{x}_3\mathrm{k}$ 이고,

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{x}_1$, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{j} = \mathrm{x}_2$, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{k} = \mathrm{x}_3$이므로 주어진 식이 성립한다.

23.

$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \|\mathrm{u}\| \|\mathrm{v}\| \cos\theta = \cos\theta$이다. 이때 $|\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}| = |\cos\theta| \leq 1$이다. 따라서 두 단위벡터의 내적은 1보다 작거나 같다.

24.

임의의 벡터를 $\mathrm{x} \neq 0$라 하자.

$\mathrm{x} \cdot 0 = x_1 \times 0 + x_2 \times 0 + x_3 \times 0 = 0$이므로 수직이다.

25.

$$\| \mathrm{x}+\mathrm{y} \|^2 = \| \mathrm{x}-\mathrm{y} \|^2 \Leftrightarrow (\mathrm{x}+\mathrm{y}) \cdot (\mathrm{x}+\mathrm{y}) = (\mathrm{x}-\mathrm{y}) \cdot (\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

$$\Leftrightarrow 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = -2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) \Leftrightarrow 4(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = 0$$

26.

$\cos A = \frac{-11}{\sqrt{146}}$, $\sin A = \frac{5}{\sqrt{146}}$, 삼각형 넓이=10

27.

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Section 3.3

1.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-2\mathrm{i}-9\mathrm{j}-3\mathrm{k}$

2.

$\mathrm{y}\times\mathrm{x}=2\mathrm{i}+9\mathrm{j}+3\mathrm{k}$

3.

$\mathrm{x}\times(\mathrm{y}\times\mathrm{z})=6\mathrm{i}+9\mathrm{j}+13\mathrm{k}$

4.

$(\mathrm{x}\times\mathrm{y})\times\mathrm{z}=-12\mathrm{i}+\mathrm{j}+5\mathrm{k}$

5.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=\mathrm{i}-4\mathrm{j}-7\mathrm{k}$, $-(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=-\mathrm{i}+4\mathrm{j}+7\mathrm{k}$

6.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-6\mathrm{i}+6\mathrm{j}-6\mathrm{k}$, $-(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=6\mathrm{i}-6\mathrm{j}+6\mathrm{k}$

7.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-18\mathrm{i}-36\mathrm{j}+18\mathrm{k}$, $-(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=18\mathrm{i}+36\mathrm{j}-18\mathrm{k}$

8.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-2\mathrm{i}+6\mathrm{j}-2\mathrm{k}$, $-(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=2\mathrm{i}-6\mathrm{j}+2\mathrm{k}$

9.

$\mathrm{x}=(1/2-\mathrm{t}/2,-1/2+3\mathrm{t}/2,\mathrm{t})$, ($t$는 실수)

10.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=(2,-7,-6)$이므로,

$\mathrm{x}\cdot(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=1\cdot2+2\cdot(-7)+(-2)\cdot(-6)=0$

$\mathrm{y}\cdot(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=3\cdot2+0\cdot(-7)+1\cdot(-6)=0$

11.

$\sqrt{59}$

12.

$3\sqrt{26}$

13.

0

14.

$\sqrt{101}$

15.

$\dfrac{\sqrt{699}}{2}$

16.

$\dfrac{\sqrt{56}}{2}$

17.

15번에서 평행육면체의 부피는 18이다.
16번에서 평행육면체의 부피는 8이다.

18.

$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_3 \end{vmatrix}$ 이고, 행렬식은 두 행을 교환하면 부호가 바뀌므로 $\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-\mathrm{y}\times\mathrm{x}$ 이다.

19.

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\times(\mathrm{y}+\mathrm{z}) &= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{y}_1+\mathrm{z}_1 & \mathrm{y}_2+\mathrm{z}_2 & \mathrm{y}_3+\mathrm{z}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{z}_1 & \mathrm{z}_2 & \mathrm{z}_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{x}\times(\mathrm{y}+\mathrm{z})=(\mathrm{x}\times\mathrm{y})+(\mathrm{x}\times\mathrm{z})$이다.

20.

$$\begin{aligned}(\mathrm{x}+\mathrm{y})\times\mathrm{z} &= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1+\mathrm{y}_1 & \mathrm{x}_2+\mathrm{y}_2 & \mathrm{x}_3+\mathrm{y}_3 \\ \mathrm{z}_1 & \mathrm{z}_2 & \mathrm{z}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{z}_1 & \mathrm{z}_2 & \mathrm{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_3 \\ \mathrm{z}_1 & \mathrm{z}_2 & \mathrm{z}_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(\mathrm{x}+\mathrm{y})\times\mathrm{z}=(\mathrm{x}\times\mathrm{z})+(\mathrm{y}\times\mathrm{z})$이다.

21.

행렬식의 k배는 한 행에 k배 한 행렬의 행렬식과 같으므로
$k(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=(k\mathrm{x})\times\mathrm{y}=\mathrm{x}\times(k\mathrm{y})$ 가 성립한다.

22.

한 행이 모두 0인 행렬의 행렬식은 0이다. 따라서 $\mathrm{x}\times 0 = 0\times \mathrm{x} = 0$

23.

두 행이 같은 행렬의 행렬식은 0이므로 $\mathrm{x}\times \mathrm{x} = 0$

24.

x와 y가 평행이라면 적당한 스칼라 k에 대하여 $\mathrm{x} = k\mathrm{y}$이다. 즉, x의 각 성분은 y의 각 성분에 k배한 것이다. 따라서 행렬식의 성질에 의하여 $\mathrm{x} = k\mathrm{y}$일 필요충분조건은 $\mathrm{x}\times \mathrm{y} = 0$ 이다.

25.

외적의 성질에 의하여 $(\mathrm{x}\times \mathrm{y})\times \mathrm{z} = (\mathrm{x}\cdot \mathrm{z})\mathrm{y} - (\mathrm{y}\cdot \mathrm{z})\mathrm{x}$ 이므로

$(\mathrm{x}\times \mathrm{y})\times \mathrm{z} + (\mathrm{y}\times \mathrm{z})\times \mathrm{x} + (\mathrm{z}\times \mathrm{x})\times \mathrm{y}$ 에서
$(\mathrm{x}\times \mathrm{y})\times \mathrm{z} = (\mathrm{x}\cdot \mathrm{z})\mathrm{y} - (\mathrm{y}\cdot \mathrm{z})\mathrm{x}$, $(\mathrm{y}\times \mathrm{z})\times \mathrm{x} = (\mathrm{y}\cdot \mathrm{x})\mathrm{z} - (\mathrm{z}\cdot \mathrm{x})\mathrm{y}$,
$(\mathrm{z}\times \mathrm{x})\times \mathrm{y} = (\mathrm{z}\cdot \mathrm{y})\mathrm{x} - (\mathrm{x}\cdot \mathrm{y})\mathrm{z}$

한편 내적은 교환법칙이 성립하므로

$$\begin{aligned}&(\mathrm{x}\times \mathrm{y})\times \mathrm{z} + (\mathrm{y}\times \mathrm{z})\times \mathrm{x} + (\mathrm{z}\times \mathrm{x})\times \mathrm{y}\\ &= (\mathrm{x}\cdot \mathrm{z})\mathrm{y} - (\mathrm{y}\cdot \mathrm{z})\mathrm{x} + (\mathrm{y}\cdot \mathrm{x})\mathrm{z} - (\mathrm{z}\cdot \mathrm{x})\mathrm{y} + (\mathrm{z}\cdot \mathrm{y})\mathrm{x} - (\mathrm{x}\cdot \mathrm{y})\mathrm{z} = 0\end{aligned}$$

Section 3.4

1.

$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{6}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2, 0, 1, -1)$

2.

$\| \mathrm{x} \| = 5\sqrt{2}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(-4, 3, 4, -3)$

3.

$\| \mathrm{x} \| = \dfrac{\sqrt{163}}{3}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{163}}(9, -3, -6, 1, -6)$

4.

$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{55}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{55}}(1, 2, -3, 4, -5)$

5.

$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{11}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(-2, 0, 1, 1, -1, 2)$

6.

$\| \mathrm{x} \| = 2\sqrt{7}, \ \dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}(-1, 3, 2, -2, 3, -1)$

7.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 4$

8.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 4$

9.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$

10.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \dfrac{5}{2}$

11.

(a) $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 1$이고,
$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}, \quad \| \mathrm{y} \| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$이다. 따라서 $1 \leq \sqrt{13} \cdot 2$이므로 $|\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}| \leq \|\mathrm{x}\| \|\mathrm{y}\|$ 이 성립한다.

(b) $\mathrm{x}+\mathrm{y}=(3,0,-1,-3)$이므로 $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$이다.
따라서 $\sqrt{19} \le \sqrt{13}+2$이므로 $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\| \le \|\mathrm{x}\|+\|\mathrm{y}\|$ 이 성립한다.

12.

(1) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$에 대하여 행렬의 덧셈에 대한 교환법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+\mathrm{y} &= \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{y}+\mathrm{x} \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{z}=\begin{bmatrix} \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{z}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{z}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$에 대하여 행렬의 결합법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} (\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z} &= \left(\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_\mathrm{n} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{z}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{z}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{y}+(\mathrm{x}+\mathrm{z}) \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$, $0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$에 대하여

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+0 &= \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= 0+\mathrm{x}=\mathrm{x} \end{aligned}$$

(4) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$에 대하여 $-\mathrm{x}=\begin{bmatrix} -\mathrm{x}_1 \\ -\mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ -\mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+(-\mathrm{x}) &= \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\mathrm{x}_1 \\ -\mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ -\mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (-\mathrm{x})+\mathrm{x}=0 \end{aligned}$$

13.

(1) $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$에 대하여 $\begin{aligned} x \cdot y &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \\ &= y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + \cdots + y_n \cdot x_n \\ &= y \cdot x \end{aligned}$

(2) $z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$에 대하여 $\begin{aligned} (x+y) \cdot z &= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \cdots + (x_n+y_n)z_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots\ x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots\ y_nz_n) \\ &= x \cdot z + y \cdot z \end{aligned}$

(3) $\begin{aligned} k(x \cdot y) &= k(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \\ &= (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + (kx_n)y_n = (kx) \cdot y \\ &= x_1(ky_1) + x_2(ky_2) + \cdots + x_n(ky_n) = x \cdot (ky) \end{aligned}$

(4) $x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \| x \|^2 \geq 0$

14.

$|x \cdot y| = |\, \| x \| \| y \| \cos\theta | = \| x \| \| y \| |\cos\theta|$이므로 코시-슈바르츠 부등식 $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은 $|\cos\theta| = 1$, 즉 두 벡터 x, y 사이의 각 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이다. 따라서 두 벡터 x, y는 방향이 같거나 반대인 평행인 벡터이다.

15.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 &= \frac{1}{4}((x+y) \cdot (x+y) - (x-y) \cdot (x-y)) \\ &= \frac{1}{4}(x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y - x \cdot x + 2x \cdot y - y \cdot y) \\ &= \frac{1}{4}(4x \cdot y) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} x \cdot (Ay) &= (Ay)^T x \\ &= (y^T A^T) x \\ &= y^T (A^T x) \\ &= (A^T x) \cdot y \end{aligned}$$

17.

$a = 1,\ 5$

Section 3.5

1.

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{-2}$$

2.

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$$

3.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{0} \text{ 또는 } \frac{x-1}{3}=\frac{y}{1},\ z=-2$$

4.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{5}$$

5.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-7}$$

6.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-7}{-7}=\frac{z+2}{5}$$

7.

$\mathrm{a}=(5,\ -3,\ 2)$

8.

$\mathrm{a}=(-2,\ 3,\ 5)$

9.

$2x-3y+z+6=0$

10.

$y=0$

11.

$x+y+z-2=0$

12.

$7x+39y+17z-195=0$

13.

$\mathrm{n}=(1,\ -3,\ 5)$

14.

$\mathrm{n}=(3,\ 5,\ -6)$

15.

거리 : $D=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\|}\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}\| = \dfrac{3\sqrt{77}}{3\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{77}{13}}$

점 : $(x,\ y,\ z)=(\dfrac{95}{39},\ \dfrac{131}{39},\ -\dfrac{185}{39})$

16.

거리 : $D=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\|}\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}\| = \dfrac{11\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$

점 : $(x,\ y,\ z)=(\dfrac{142}{21},\ \dfrac{22}{21},\ \dfrac{31}{21})$

17.

$D=\dfrac{9}{\sqrt{14}}$

18.

$D=\dfrac{2}{\sqrt{46}}$

19.

세 점은 동일한 직선 위에 있지 않다.

20.

$2x-3y+5z-23=0$

21.

$2x+y+z-3=0$

22.

$\dfrac{1}{6}$

23.

$-2x+3y-z=0$

24.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Section 4.1

1.
벡터공간이 아니다.

2.
벡터공간이다.

3.
벡터공간이 아니다.

4.
벡터공간이 아니다.

5.
벡터공간이 아니다.

6.
부분공간이다.

7.
부분공간이 아니다.

8.
부분공간이다.

9.
부분공간이 아니다.

10.
부분공간이다.

11.
부분공간이다.

12.
부분공간이 아니다.

13.
부분공간이다.

14.

부분공간이 아니다.

15.

부분공간이 아니다.

16.

부분공간이다.

17.

부분공간이 아니다.

18.

부분공간이 아니다.

19.

$a\mathbf{x}=b\mathbf{x} \Rightarrow a\mathbf{x}-b\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow (a-b)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{b}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 이므로)

20.

$k\mathbf{x}=\mathbf{x} \Rightarrow (k-1)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 일 때는 $k=1$ 또는 $k \neq 1$일 때는 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

21.

(a) $(1,7,-4)=-3(1,-3,2)+2(2,-1,1)$

(b) $(2,-5,4)$는 일차결합으로 표현할 수 없다.

(c) $k=-8$

22.

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in l$일 때

$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=(ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)=c+c=2c$

이므로 $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\notin l$이다. $\mathbb{R}^2$의 부분공간이 될 수 없다.

23.

W_1, W_2 가 벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 두 부분공간이라 하자.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2 \Rightarrow \mathrm{c}_1\mathbf{x}_1+\mathrm{c}_2\mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2$ 을 보이면 된다.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_2$

$\Rightarrow c_1\mathbf{x}_1+\mathrm{c}_2\mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1,\ \mathrm{c}_1\mathbf{x}_1+\mathrm{c}_2\mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_2$ (W_1, W_2는 $\mathbb{R}^n$의 부분공간)

$\Rightarrow c_1\mathbf{x}_1+\mathrm{c}_2\mathbf{x}_2 \in \mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2$

$W_1 \cup W_2$ 는 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이 아니다.

반례 : $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$이므로 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이 아니다.

24.

S가 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이므로 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathbf{x}_2 \in \mathrm{S}$ 이다.

$A\mathbf{x}_1, \mathrm{A}\,\mathbf{x}_2 \in \mathrm{A}(\mathrm{S}) \Rightarrow \mathrm{c}_1\mathrm{A}\mathbf{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{A}\mathbf{x}_2 = \mathrm{A}(\mathrm{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathbf{x}_2) \in \mathrm{A}(\mathrm{S})$

25.

생성한다.

26.

생성하지 않는다.

Section 4.2

1.
$(2,1,-3)=a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(0,1,-1) \Rightarrow a=4,\ b=-2,\ c=3$

2.
$(2,1,-3)=a(-3,1,2)+b(1,0,-1) \Rightarrow a=1,\ b=5$

3.
일차독립

4.
일차종속

5.
일차독립

6.
일차독립

7.
일차종속

8.
일차독립

9.
$k=\frac{1}{2},\ -1$

10.
일차종속

11.
일차독립

12.
일차독립

13.
일차독립

14.
일차종속

15.
$\det(T)=t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}\neq 0$이므로 일차독립이다.
또는 T의 행벡터가 일차독립임을 보이자.

$$c_1(t_{11},t_{12},t_{13},\ \cdots,t_{1n})+c_2(0,t_{22},t_{23},\ \cdots,t_{2n})+\cdots+c_n(0,0,0,\ \cdots,0,t_{nn})=0$$
$$c_1t_{11}=0,\ c_1t_{12}+c_2t_{22}=0,\ c_1t_{13}+c_2t_{23}+c_3t_{33}=0,\ \cdots,c_1t_{1n}+c_2t_{2n}+\cdots+c_nt_{nn}=0$$

$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$이므로 일차독립이다.
T의 열벡터가 일차독립임을 보이는 것은 행 대신 열로 바꾸어서 똑같은 방법으로 하면 일차독립임을 보일 수 있다.

16.
$a_1(A\mathbf{x}_1)+\mathrm{a}_2(\mathrm{A}\mathbf{x}_2)+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{A}\mathbf{x}_\mathrm{n})=\mathbf{0}$ 일 때 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$임을 보이면 일차독립이다.

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=a_1(A\mathbf{x}_1)+\mathrm{a}_2(\mathrm{A}\mathbf{x}_2)+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{A}\mathbf{x}_\mathrm{n})\\&=A(a_1\mathbf{x}_1)+\mathrm{A}(\mathrm{a}_2\mathbf{x}_2)+\cdots+\mathrm{A}(\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathbf{x}_\mathrm{n})\\&=A(a_1\mathbf{x}_1+\mathrm{a}_2\mathbf{x}_2+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathbf{x}_\mathrm{n})\end{aligned}$$

행렬 A가 가역행렬이므로 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$A^{-1}\mathbf{0}=A^{-1}A(a_1\mathbf{x}_1+\mathrm{a}_2\mathbf{x}_2+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathbf{x}_\mathrm{n})=\mathrm{a}_1\mathbf{x}_1+\mathrm{a}_2\mathbf{x}_2+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathbf{x}_\mathrm{n}$$
$$\Rightarrow\mathbf{0}=a_1\mathbf{x}_1+\mathrm{a}_2\mathbf{x}_2+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathbf{x}_\mathrm{n}$$

그런데 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_\mathrm{n}\}$ 이 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이므로 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$이 되어
$\{A\mathbf{x}_1,\mathrm{A}\mathbf{x}_2,\ldots,\mathrm{A}\mathbf{x}_\mathrm{n}\}$ 도 일차독립이다.

17.
만일 $\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$이라 하면 임의의 스칼라 $c_1(\neq 0)$에 대하여

$$c_1\mathbf{0}+0\mathbf{x}_2+\cdots+0\mathbf{x}_\mathrm{k}=\mathbf{0}$$

이므로 $S=\{\mathbf{0},\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_\mathrm{k}\}$는 일차종속이다.

18.

S의 부분집합 S'을 $S' = \{\mathrm{x}_1, \ \mathrm{x}_2, \ \ldots, \ \mathrm{x}_{\mathrm{h}}\}$, $(2 \le \mathrm{h} \le \mathrm{k})$라 하고 S'이 일차종속이라 하면 $c_i \ne 0 (1 \le i \le h)$에 대하여 $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathrm{c_h}\mathbf{x}_{\mathrm{h}} = \mathbf{0}$ 을 만족한다. 따라서

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathrm{c_h}\mathbf{x}_{\mathrm{h}} + 0\mathbf{x}_{\mathrm{h}+1} + 0\mathbf{x}_{\mathrm{h}+2} + \cdots + 0\mathbf{x}_{\mathrm{k}} = \mathbf{0}$$

이므로 S는 일차종속이다. 또한 이 명제의 대우도 참이므로 S가 일차독립이므로 S'도 일차독립이다.

Section 4.3

1.
기저이다.

2.
기저가 될 수 없다.

3.
기저가 될 수 없다.

4.
기저이다.

5.
기저이다.

6.
기저가 될 수 없다.

7.
기저가 될 수 없다.
$(1,2,3)=(1,0,0)+(0,2,0)+(0,0,3)$

8.
기저는 $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$이고 $\dim W=2$이다.

9.
기저는 $\{(2,0,1), (0,1,0)\}$이고 $\dim W=2$이다.

10.
기저는 $\{(1,2,3)\}$이고 $\dim W=1$이다.

11.
기저는 $\{(1,-2,4)\}$이고 $\dim W=1$이다.

12.
U의 기저는 $\{(1,0,0,0), (0,-1,1,0), (0,-1,0,1)\}$이고 $\dim U=3$이다.

13.
W의 기저는 $\{(-1,1,0,0), (0,0,2,1)\}$이고 $\dim W=2$이다.

14.

$U \cap W$의 기저는 $\{(3, -3, 2, 1)\}$이고 $\dim(U \cap W) = 1$이다.

15.

$a \neq -1, 0, 1$인 모든 실숫값

16.

두 벡터 (1,0,1,0)과 (0,1,-1,0)은 일차독립이므로 표준단위벡터 $(1,0,0,0), (0,0,0,1)$를 추가하면 $\mathbb{R}^4$의 기저가 된다.

17.

$\{(1,-2,5,-3), (2,3,1,-4), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

18.

$\{A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$가 일차독립임을 보이면 $\mathbb{R}^n$의 기저이다.

$a_1(A\mathbf{x}_1) + a_2(A\mathbf{x}_2) + \cdots + a_n(A\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$ 일 때 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$임을 보이면 일차독립이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= a_1(A\mathbf{x}_1) + a_2(A\mathbf{x}_2) + \cdots + a_n(A\mathbf{x}_n) \\ &= A(a_1\mathbf{x}_1) + A(a_2\mathbf{x}_2) + \cdots + A(a_n\mathbf{x}_n) \\ &= A(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

행렬 A가 가역행렬이므로 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$A^{-1}\mathbf{0} = A^{-1}A(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$
$$\Rightarrow \mathbf{0} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$

그런데 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$이 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이므로 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$이 되어 $\{A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$ 도 일차독립이다.

19.

$\mathbb{R}^n$의 모든 부분공간은 항상 벡터공간이므로 항상 기저를 갖는다.

20.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ 가 일차독립이면 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

$$a\mathbf{v}_1 + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\mathbf{v}_1 + (b+c)\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ 가 기저이므로 $a+b+c=0,\ b+c=0,\ c=0,\quad a=b=c=0$이므로
$\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ 가 일차독립이다.

Section 4.4

1.

행공간의 기저는 $\{(1,0),\ (0,1)\}$이므로 차원은 2이다.

2.

행공간의 기저는 $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$이므로 차원은 3이다.

3.

행공간의 기저는 $\{(1,2,-3),(0,-3,6),\ (0,0,1)\}$이므로 차원은 3이다.

4.

행공간의 기저는 $\{(1,3),(0,1)\}$이므로 차원은 2이다.

5.

행공간의 기저는 $\{(1,0,0,2),\ (0,1,0,20),\ (0,0,1,6)\}$이므로 차원은 3이다.

6.

행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$이므로 차원은 4이다.

7.

행공간의 기저는 $\{(1,0,0,1,2),\ (0,1,0,-1,-1),\ (0,0,1,-1,-2)\}$이므로 차원은 3이다.

8.

행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0),\ (0,0,1,0,-1),\ (0,0,0,1,0)\}$이므로 차원은 4이다.

9.

행공간의 기저 $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

10.

행공간의 기저 $\{(1,0,1),\ (0,1,2),\ (0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

11.

행공간의 기저 $\{(1,3,2,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

12.

행공간의 기저 : $\{(1,2,3,4), (0,1,3,0), (0,0,1,2), (0,0,0,1)\}$,

열공간의 기저 : $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

13.

해공간의 기저는 $(3,-2,1)$이고 차원은 1이다.

14.

해공간의 기저는 $(-3,1,1,0), (2,-2,0,1)$이고 차원은 2이다.

15.

영공간의 기저는 ϕ이고 $\text{nullity}(\mathrm{A})$은 0이다.

16.

영공간의 기저는 ϕ이고 $\text{nullity}(\mathrm{A})$은 0이다.

17.

영공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$이고 $\text{nullity}(\mathrm{A})$은 2이다.

18.

영공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$이고 $\text{nullity}(\mathrm{A})$은 2이다.

19.

$k=4$

20.

$A=\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}$는 $\text{rank}\,(A)=2$이다.

$AA^T=\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{bmatrix}$는 $\text{rank}\,(AA^T)=2$이다.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 18 & 54 & 12 & -60 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \\ -20 & -60 & -20 & 80 \end{bmatrix}$$ 는 $\mathrm{rank}\,(A^TA) = 2$이다.

21.

$x = 2, y = 1$

22.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 계수는 2이고 퇴화차수는 1이다.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 계수는 2이고 퇴화차수는 2이다.

(c) 계수는 2이고 퇴화차수는 $n-2$이다.

23.

$S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k\}$은 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$의 해집합의 부분집합이면 모든 $i = 1, 2, \cdots, k$에 대하여 $A\mathrm{x}_i = \mathbf{0}$을 만족한다.

$\langle S \rangle = \{c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k \mid c_i \in \mathbb{R}\}$이므로

$A(c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k) = c_1A\mathrm{x}_1 + c_2A\mathrm{x}_2 + \cdots + c_kA\mathrm{x}_k = c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} + \cdots + c_2\mathbf{0} = \mathbf{0}$이다.

$\langle S \rangle = \{c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k \mid c_i \in \mathbb{R}\}$속하는 모든 벡터는 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$의 해이다.

24.

동차 연립일차방정식 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ 의 계수행렬 A가 성분이 모두 0인 열을 j번째 열이라면 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ 의 해공간 벡터 x의 j번째 성분 x_j는 임의의 실수 값이므로 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ 는 자명하지 않은 해를 갖는다.

25.

$A\mathrm{x} = \mathbf{0}$가 자명하지 않은 해를 갖는다면 역행렬을 갖지 않으므로 $\mathrm{rank}(A) = 1$ 또는 2 이므로 rank-nullity정리에 의하여 $\mathrm{nullity}(\mathrm{A})$=1 또는 2이다.

26.

(1)⇒(2) : rank-nullity정리에 의하여 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n$이므로 $\mathrm{nullity}(\mathrm{A}) = 0$이다.

(2)⇒(6) : $\mathrm{nullity}(\mathrm{A}) = 0$이면 rank-nullity정리에 의하여 $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$이다. 그러면 행렬 A의 RREF는 I_n이므로 A는 I_n과 행동치이다.

(6)⇒(7) : A와 I_n가 행동치이므로 다음을 만족하는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_k$가 존재하면 $E_k \cdots E_2E_1A = I_n$이다. 따라서

$$\det(E_k \cdots E_2E_1A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1)\det(A) = \det(I_n) \neq 0$$

$\therefore \det(A) \neq 0$

A는 가역이다.

(7)⇒(8) : A는 역행렬이 존재하고 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adjA}$ 이므로 $|A| \neq 0$ 이다.

(8)⇒(7) : $|A| \neq 0$ 이고 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adjA}$ 이므로 A는 역행렬이 존재한다.

(7)⇒(5) : 행렬 A가 가역이면 A의 역행렬 A^{-1}가 유일하게 존재하므로

$A^{-1}(A\mathrm{x}) = A^{-1}\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}$ 이다.

즉, 연립일차방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 가 유일한 해를 $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$ 갖는다.

(5)⇒(4) : $\mathrm{b} = 0$ 이면 $A^{-1}(A\mathrm{x}) = A^{-1}0 \Rightarrow \mathrm{x} = A^{-1}0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0$.

(4)⇒(3) : $A\mathrm{x} = 0$은 자명한 해 $\mathrm{x} = 0$만을 갖으면 행렬 A는 역행렬이 존재하므로 $\det(A) \neq 0$이므로 [정리 6-2]에 의하여 A의 모든 행(열) 벡터는 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립
이다.

(3)⇒(1) : A의 모든 행(열) 벡터는 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이면 [정리 6-2]에 의하여 $\det(A) \neq 0$ 이다. 그러면 행렬 A의 행공간의 차원은 n이므로 $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$

Section 4.5

1.

$$[\mathrm{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.

$$[\mathrm{x}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

6.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \dfrac{9}{2} \\ 3 \\ \dfrac{7}{2} \end{bmatrix}$$

7.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

8.

$$[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9.

$(5,-3)=a(2,1)+b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$(3,-5)=a(2,1)+b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\\frac{13}{11}\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\\frac{13}{11}\end{bmatrix}$

10.

$P=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}$

11.

$(5,-3)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$

$(3,-5)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

12.

$Q=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4&-3\\-1&2\end{bmatrix}$

13.

$(5,4)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

$(1,5)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

14.

$P=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}$

15.

$(5,4)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$

$(1,5)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{y}]_S=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

16.

$Q=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}$

17.

$\begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 43 & 8 \end{bmatrix}$

18.

$S = \{(1,1,0), (1,0,2), (0,2,1)\}$

19.

$S = \left\{(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}), (\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), (-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})\right\}$

20.

$S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$가 n 차원 벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 기저라 하면 $\mathbb{R}^n$의 벡터 x_i는

$\mathrm{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{v}_i$, ($\mathrm{a}_{ij} \in \mathbb{R}$) 로 유일하게 표현되므로

$$[\mathrm{x}_i]_S = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{\in} \end{bmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n)$$

따라서

$$[c_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{c}_n\mathrm{x}_n]_S = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1\mathrm{a}_{11} + \cdots + \mathrm{c}_n\mathrm{a}_{n1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathrm{c}_1\mathrm{a}_{1n} + \cdots + \mathrm{c}_n\mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix}_S = \mathrm{c}_1 \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{1n} \end{bmatrix}_S + \cdots + \mathrm{c}_n \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{n1} \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix}_S$$
$$= c_1[\mathrm{x}_1]_S + \mathrm{c}_2[\mathrm{x}_2]_S + \cdots + \mathrm{c}_n[\mathrm{x}_n]_S$$

21.

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y} = a_1\mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}_n \Leftrightarrow [\mathrm{x}]_S = [\mathrm{y}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Section 4.6

1.
두 벡터는 직교이다.

2.
두 벡터는 직교가 아니다.

3.
두 벡터는 직교가 아니다.

4.
두 벡터는 직교이다.

5.
$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$

6.
정규직교집합이다.

7.
정규직교집합이다.

8.
$a=b=\pm\frac{1}{2}$

9.
$\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_2=1\times(-1)+(-1)\times(-1)+0\times2+2\times0=0,$
$\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_3=1\times1+(-1)\times1+0\times1+2\times0=0,$
$\mathrm{x}_2\cdot\mathrm{x}_3=(-1)\times1+(-1)\times1+2\times1+0\times0=0$
이므로 주어진 세 개의 벡터가 서로 수직이다.

10.
$\mathrm{x}_4=(-\mathrm{t},\mathrm{t},0,\mathrm{t})=\mathrm{t}(-1,1,0,1)$

11.
10번에서 구한 벡터는 서로 수직이므로 각 벡터의 크기만 나누어 주면 정규직교벡터가 된다.

$$\left\{ y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

12.

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

13.

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

14.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

15.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

16.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$$

17.

[정리 4-15]에 의하여

$x = (x \cdot u_1)u_1 + (x \cdot u_2)u_2 + \cdots + (x \cdot u_n)u_n$,

$y = (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \cdots + (y \cdot u_n)u_n$로 표현할 수 있으므로

$$x \cdot y = \{(x \cdot u_1)u_1 + (x \cdot u_2)u_2 + \cdots + (x \cdot u_n)u_n\} \cdot \{(y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \cdots + (y \cdot u_n)u_n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x \cdot u_i)(u_i \cdot y)$$

Section 4.7

1.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$

7.

$\begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$

8.

$x_1 = \frac{20}{11}, x_2 = -\frac{8}{11}$

9.

$x_1 = 12, x_2 = -3, x_3 = 9$

10.

최소제곱해 : $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, x_2 = t$; 오차벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

11.

최소제곱해 : $x_1 = -\frac{7}{6} - t, x_2 = \frac{7}{6} - t, x_3 = t$; 오차벡터 $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{49}{6} \end{bmatrix}$

Section 5.1

1.
선형변환

2.
선형변환 아님 : $L(kx) = (kx, 1) \neq (kx, k) = k(x, 1) = kL(x)$

3.
선형변환 아님 : $L(kx) = (1, kx) \neq (k, kx) = k(1, x) = kL(x)$

4.
선형변환 아님
: $L(kx, ky, kz) = (2kx - ky,\ k^2 yz) = k(2x - y, kyz) \neq k(2x - y, yz) = kL(x,y,z)$

5.
선형변환 아님 : $L(kx,\ ky) = k^2 xy \neq kxy = kL(x,y)$

6.
선형변환

7.
선형변환

8.
선형변환 아님 : $L(kx,\ ky) = (kx,\ \tan ky) \neq k(x, \tan y) = kL(x,y)$

9.
선형변환 아님 : $L(kx,\ ky) = (0,\ k^2 xy) \neq k(0, xy) = kL(x,y)$

10.
선형변환 아님 : $L(-x, -y, -z) = (|x|, 0) \neq -(|x|, 0) = -L(x,y,z)$

11.
$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

12.
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

15.

$L(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 이므로, $L(2,3,4) = (21,-11)$

16.

$L(1,2,3) = (14,-5)$

17.

$L(1,-2,3) = (2,15)$

18.

$L(1,1,-1) = (3,-12)$

19.

$L(x,y,z) = (2x+3y+2z,\ -4x-5y+3z)$

20.

$L(3\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_3) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

21.

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 라 하면 $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]$, $k(A+B) = [k(a_{ij}+b_{ij})]$ 이므로

(1) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B) &= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}) \\ &= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}) \\ &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{tr}\,(k(A+B)) = k\,\mathrm{tr}(A) + k\mathrm{tr}(B)$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(k(A+B)) &= k(a_{11}+b_{11}) + k(a_{22}+b_{22}) + \cdots + k(a_{nn}+b_{nn}) \\ &= k(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + k(b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}) \\ &= k\,\mathrm{tr}(A) + k\,\mathrm{tr}(B)\end{aligned}$$

22.

$a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$일 때, $L(\mathbf{0}) = (a,b) \neq (0,0)$

23.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

25.

$L: R^n \to R^n$ 일대일 함수이고, $L(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = \mathbf{0}$ 이므로 $\mathrm{u}-\mathrm{v} = \mathbf{0}$ 이다. 그러므로 $\mathrm{u} = \mathrm{v}$ 이다.

Section 5.2

1.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$\tan 2\theta = a$일 때, $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\tan^{-1} a) & \sin(2\tan^{-1} a) \\ \sin(2\tan^{-1} a) & -\cos(2\tan^{-1} a) \end{bmatrix}$

3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7.

$$L(\mathrm{u}) = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix}$$

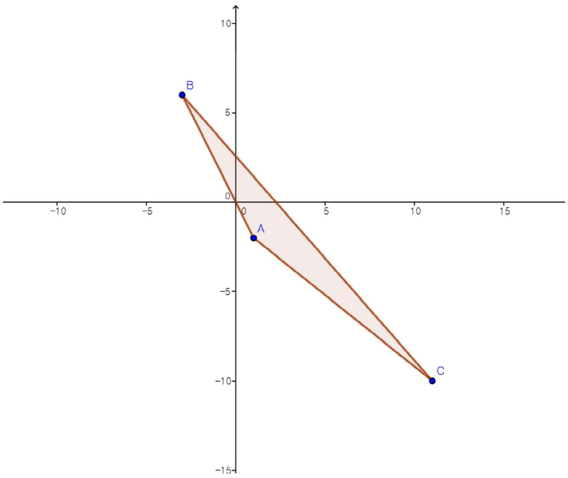
8.

$$L(\mathrm{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

9.

$\triangle ABC$의 넓이=6

10.



11.

24

12.

$A\mathrm{x}= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 이므로 $y' = 3x+6y = 3(x+2y) = 3x'$

13.

회전변환은 도형의 크기를 변화시키지 않으므로 넓이가 변하지 않는다.

14.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$x = 2x' - y'$, $y = y' - x'$을 $2x - y + 1 = 0$에 대입하면 $5x' - 3y' + 1 = 0$ 이다.

15.

y-축 층밀림, y-축 확대, y-축 대칭, x-축 층밀림

16.

$(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$

17.

$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

18.

$(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$

그러므로 이 벡터의 크기는 $\sqrt{2}$이다.

19.

$\tan\theta = m$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$, $\sin\theta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

그러므로 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta cos\,\theta \\ \sin\theta cos\,\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+m^2} & \frac{m}{1+m^2} \\ \frac{m}{1+m^2} & \frac{m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}$$

20.

$(L_1 \circ L_2)(A) = 2$

Section 5.3

1.
예

2.
아니오

3.
예

4.
아니오

5.
$\ker L = \{(x,y)|x=0\} = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$

6.
$Im L = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$

7.
예

8.
아니오

9.
예

10.
아니오

11.
$\ker L = \{(x,y)|y=0\} = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$

12.
$Im L = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$

13.
아니오

14.
예

15.
예

16.
아니오

17.
$\ker L = \{t(-2,1) | t \in \mathbb{R}\}$

18.
$ImL = \{t(1,2) | t \in \mathbb{R}\}$

19.
L은 단사이다.

20.
$rank(L) = 3$

21.
$rank(L) = 2$

22.
$nullity(L) = 0$

23.
선형변환 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 $L(\mathrm{x}) = \mathrm{Ax}$ 일 때, L 이 단사일 필요충분조건은 표준행렬의 계수 n이므로 가역이다. 그러므로 $\det(\mathrm{A}) \neq 0$ 이다.

24.
$L(\mathrm{x}) = \mathrm{Ax}$ 일 때, ImL 은 A 의 열벡터들의 모든 일차결합이므로 열공간이다.

25.
$L(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 1) = (1,0,3)$이므로 $\mathrm{b} = (1,0,3)$은 열공간에 들어있다.

26.
$(1,1)$은 ImL에 들어 있지 않다.

27.

A

28.

V의 임의의 원소는 $\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_\mathrm{k}$이므로 ImL의 원소는 다음과 같다.

$$L(\mathrm{x}) = L(c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_\mathrm{k}) = c_1L(\mathrm{x}_1) + c_2L(\mathrm{x}_2) + \cdots + c_kL(\mathrm{x}_\mathrm{k})$$

그러므로 $ImL = span\{L(\mathrm{x}_1), \mathrm{L}(\mathrm{x}_2), \ldots, \mathrm{L}(\mathrm{x}_\mathrm{k})\}$이다.

Section 5.4

1.
직교행렬

2.
직교행렬

3.
직교행렬이 아니다.

4.
직교행렬이 아니다.

5.
$L(\mathrm{x}) \cdot L(\mathrm{y}) = -2$

6.
$\|L(\mathrm{x})\| = \sqrt{38}$, $\|L(\mathrm{y})\| = \sqrt{19}$

7.
행렬식 : $\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = 1$, 역행렬 : $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

8.
행렬식 : $\det\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 1$, 역행렬 : $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

9.
$a = 0, b = -\frac{2}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10.
$2a^2 + 2b^2 = 1$

11.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 3$

12.

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \frac{1}{4}\{\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2\}$이므로 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$이다.

13.

R_θ, $\theta = -\frac{\pi}{6}$

14.

R_θ, $\theta = \frac{\pi}{4}$

15.

$H_{\frac{\theta}{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{8}$

16.

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, 행렬식=1

17.

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$, 행렬식=-1

18.

A가 직교행렬이므로 각을 보존한다. 그러므로 사잇각은 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{26}}$

19.

$A^{-1} = A^T$, $B^{-1} = B^T$이므로,
$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$이다.
따라서 AB는 직교행렬이다.

20.

$H_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

21.

$P^{-1} = P^T$이므로 P는 직교행렬이다. 따라서 [정리 5-9]에 의해 P의 열벡터들은 정규직교한다.

22.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Section 5.5

1.

$$AB = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -5 & -15 & -8 \\ 44 & -11 & 45 \end{bmatrix}$$

2.

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 21 \\ 10 & -8 & 4 \\ 45 & 3 & 25 \end{bmatrix}$$

3.

$T(L(x,\ y)) = (3x + 3y, 6x - 2y),\ \ L(T(x,\ y)) = (5x + 4y, x - 4y)$

4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6.

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$: x방향의로 2배만큼의 층밀림

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$:y-축 방향으로 2배 확대

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$: x-축에 대하여 대칭

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$: y-축 방향으로 3배 만큼 층밀림

7.

$\mathbb{R}^2$에서 x축에 대칭인 선형변환

8.

$\mathbb{R}^2$에서 y축에 대칭인 선형변환

9.

$\mathbb{R}^2$에서 $k = 1/3$ 축약인 선형변환

10.

$\mathbb{R}^2$에서 $k=2$ 늘림인 선형변환

11.

$$\begin{cases} w_1 = -x_1 + 2x_2 \\ w_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

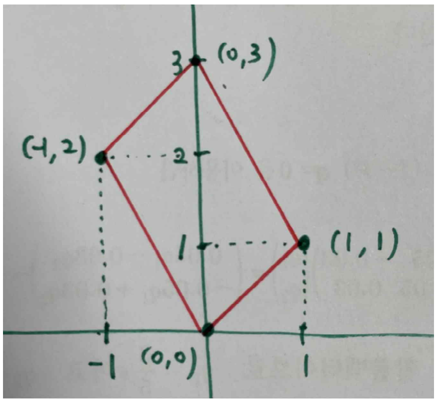
12.

$$\begin{cases} w_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ w_3 = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

13.

$L \circ T = T \circ L$이다.

14.



15.

$$T_2 \circ T_1(\mathrm{x}) = T_2 \circ T_1(\mathrm{y}) \xrightarrow[\text{단사}]{T_2} T_1(\mathrm{x}) = T_1(\mathrm{y}) \xrightarrow[\text{단사}]{T_1} \mathrm{x} = \mathrm{y}$$

16.

직선의 매개방정식을 $l: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}$라 하면 $L(l): \begin{cases} (ax_0 + by_0) + (au_1 + bu_2)t \\ (cx_0 + dy_0) + (cu_1 + du_2)t \end{cases}$이므로 직선이다.

17.

$L(x,y,z)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z\\x\\y\end{bmatrix}$이므로 선형변환의 행렬은 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$이고, $A^3=I$이다.

따라서 $L^3=I$이다. 또 $L^3=I$이므로 $L^{-1}=L^2$이다. 즉, $L^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$이다.

18.

$$\begin{aligned}[(T_3 \circ T_2) \circ T_1](\mathrm{x}) &= [(T_3(T_2)) \circ T_1](\mathrm{x})\\ &= (T_3(T_2(T_1(\mathrm{x}))))\\ &= [T_3 \circ (T_2(T_1(\mathrm{x}))]\\ &= [T_3 \circ (T_2 \circ T_1)](\mathrm{x})\end{aligned}$$

Section 5.6

1.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-1\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}&-\frac{56}{11}\\-\frac{2}{11}&\frac{3}{11}\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11}&-1\\-\frac{1}{11}&0\end{bmatrix}$$

2.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}-\frac{4}{11}&-\frac{49}{11}\\\frac{1}{11}&-\frac{18}{11}\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}\frac{3}{11}&-\frac{10}{11}\\\frac{2}{11}&-\frac{3}{11}\end{bmatrix}$$

3.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

4.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}5&2\\-2&0\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}4&4\\0&1\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}4&4\\-1&-2\end{bmatrix}$$

5.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&2&-2\\0&-1&1\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

6.

$$[L]_S=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-2&3\\-2&0&-2\end{bmatrix},\ [L]_T=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-2&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ [L]_{S,\,T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1&0\\\frac{3}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&0&1\end{bmatrix}$$

7.

$P^{-1}AP=B$

8.

$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$ 인 P, Q가 존재하므로 닮음이다.

$$P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{-3\sqrt{5}+5}{10}\\-\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{-\sqrt{5}+5}{10}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{5}+5}{10}\end{bmatrix}$$

9.

임의의 양의 정수 k 에 대하여 A^k 는 $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$이므로 닮음행렬이다.

10.

$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^T)^{-1} = Q^{-1}A^TQ$

11.

$P^{-1}AP = B$이므로 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$이다. 그러므로 A^{-1}와 B^{-1}는 닮음행렬이다.

12.

$AB = B^{-1}B(AB) = B^{-1}(BA)B$

$BA = A^{-1}A(BA) = A^{-1}(AB)A$

따라서 AB와 BA는 닮음행렬이다.

13.

선형변환이 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이고 $S = \{\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$, $T = \{\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{m}\}$가 각각 $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{R}^m$의 기저이면, 행렬 $[\mathrm{y}_1 \mathrm{y}_2 \cdots \mathrm{y}_m \mid L(\mathrm{x}_1) \mid L(\mathrm{x}_2) \mid \cdots \mid L(\mathrm{x}_n)]$을 $[I_n \mid A]$와 같은 형태의 RREF로 변환하여 $A = [L]_{S,T}$ 를 쉽게 구한다. 그런데 행렬의 RREF는 유일하다.

14.

기저는 $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$이다.

15.

기저는 $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$이다.

16.

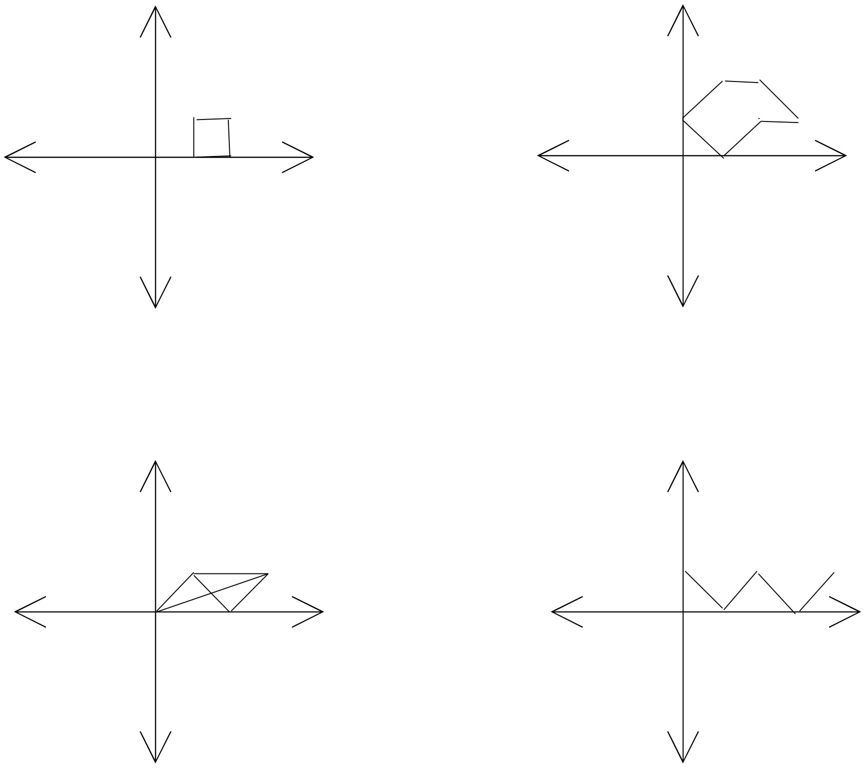
$$[\mathrm{x}]_B = [I]_{S,B}[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

17.

$$[\mathrm{x}]_{B'} = [I]_{S,B'}[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Section 5.7

1~4.



5.

$$V=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

6.

$$V=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

7.

$$V=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&0&-1&-1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

8.

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&1&1&1 \\ 1&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.

```
L1=list( [  [0,0], [0,1], [1,0],[1,1]  ])
SL1=polygon(L1, alpha=0.3, rgbcolor=(1,0,0))
SL1.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```

12.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
A=matrix([[1/2,0], [0,1/2]])
```

```
L2=matrix_transformation(A, L1)
SL2=polygon(L2, alpha=0.8, rgbcolor=(0,0,1))
SL2.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
B=matrix([[1,0], [3,1]])
```

```
L3=matrix_transformation(B, L1)
SL3=polygon(L3, alpha=0.8, rgbcolor=(1,0,1))
SL3.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```

14.

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

```
C=matrix([[cos(pi/6), sin(pi/6)], [-sin(pi/6), cos(pi/6)]])
```

```
L4=matrix_transformation(C, L1)
SL4=polygon(L4, alpha=0.4, rgbcolor=(0,0,1))
SL4.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```

15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
D=matrix([[1,0], [0,-1]])
```

```
L5=matrix_transformation(D, L1)
SL5=polygon(L5, alpha=0.4, rgbcolor=(0,0,1))
SL5.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```

Section 6.1

1.

$\lambda^2 - 4\lambda + 3$

2.

$\lambda^2 + \lambda - 6$

3.

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda - 19$

4.

$\lambda^3 - 6\lambda^2$

5.

$\lambda = 1$

6.

$\lambda = 0$

7.

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$

8.

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$

9.

$\lambda = 4$(다른 두 고윳값은 복소수)

10.

$\lambda = 3$

11.

주어진 대각행렬의 고윳값은 $d_1,\ d_2,\ \cdots, d_n$이다.

12.

주어진 행렬의 고윳값은 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$이다.

$\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_1 = \mathrm{s}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{s} \neq 0)$이다.

$\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_2 = \mathrm{t}\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{t} \neq 0)$이다.

고윳값 $\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$이다.

13.

주어진 행렬의 고윳값은 $\lambda_1 =-1,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2}$이다.

$\lambda_1 =-1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = r\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ (r \neq 0)$이다.

$\lambda_2 = 3+\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = s\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1} \\ \frac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1} \\ 1 \end{bmatrix}\ (s \neq 0)$이다.

$\lambda_3 = 3-\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3 = t\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1} \\ \frac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1} \\ 1 \end{bmatrix}\ (t \neq 0)$이다.

고윳값 $\lambda_1 =-1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_2 = 3+\sqrt{2}$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1} \\ \frac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_3 = 3-\sqrt{2}$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1} \\ \frac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$이다.

14.

주어진 행렬의 고윳값은 $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 =-1,\ \lambda_4 =-2$이다.

$\lambda_{1,2} = 1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_{1,2} = r\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ (r,\ s \neq 0)$이다.

$\lambda_3 =-1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3 = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ (t \neq 0)$이다.

$\lambda_4 = -2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_4 = \mathrm{w}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{w} \neq 0)$이다.

고윳값 $\lambda_{1,2} = 1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_3 = -1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_4 = -2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$이다.

15.

주어진 행렬의 고윳값은 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$이다.

$\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = \mathrm{s}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{s} \neq 0)$이다.

$\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = \mathrm{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{t} \neq 0)$이다.

고윳값 $\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$이다.

고윳값 $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$이다.

16.

고윳값은 $\lambda = 1,\ \lambda = 2$이다.
고윳값 $\lambda = 1$에 대한 고유공간의 차원은 1이다.
고윳값 $\lambda = 2$에 대한 고유공간의 차원은 1이다.

17.

주어진 행렬의 특성방정식은 $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 5$,
$P_A(A) = A^3 - 3A^2 + 5A - 5I_3 = 0$임을 알 수 있다.

18.

$$A^5=\begin{bmatrix}16 & 1 & 4\\ -1 & 14 & 6\\ 2 & -3 & 13\end{bmatrix},\ A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

19.

$A,\ B$가 닮음행렬이라면 가역행렬 P에 대하여 $A=P^{-1}BP$이다.

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=|\lambda I_n-A|\\&=|\lambda I_n-P^{-1}BP|\\&=|P^{-1}(\lambda P-BP)|\\&=|P^{-1}(\lambda I_n-B)P|\\&=|P^{-1}||\lambda I_n-B||P|\\&=|P^{-1}P||\lambda I_n-B|\\&=|\lambda I_n-B|=P_B(\lambda)\end{aligned}$$

따라서 닮음행렬 A,B는 동일한 특성다항식과 고윳값을 갖는다.

20.

$$\begin{aligned}P_{A^T}(\lambda)&=|\lambda I_n-A^T|\\&=|(\lambda I_n-A)^T|\\&=|\lambda I_n-A|=P_A(\lambda)\end{aligned}$$

21.

[정리 6-3]에 의하여 $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$이다.
따라서 $\lambda_i=0$일 필요충분조건은 $\det(A)=0$이다.

22.

n차 정사각행렬 A가 하삼각행렬이라면 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$이다. 그러면 λI_n-A도 하삼각행렬이므로 고윳값을 구하면 $P_A(\lambda)=|\lambda I_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & \\ & & \lambda-a_{33}\cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots & 0\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$이므로

고윳값은 행렬 A의 고윳값은 주대각선 성분 $a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}$임을 알 수 있다.

23.

행렬 A의 특성다항식은

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{2n} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

이고, $(n-1)$차 항의 계수는 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ 항에서만 만들어지므로

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots$$

그런데 A의 고윳값을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라 하면

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

따라서 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$이다.

Section 6.2

1.

고윳값은 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$이고, 이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$이다.

2.

고윳값은 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$이고, 이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$이다.

3.

고윳값은 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$이고, 이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D$이다.

4.

고윳값은 실수범위에서 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화 가능하지 않다.

5.

고윳값은 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$이고,

이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로

$P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2 \ \ \mathrm{x}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D\text{이다.}$$

6.

고윳값은 실수범위에서는 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화할 수 없다.

7.

고윳값은 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$이고,

이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로

$P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D\text{이다.}$$

8.

고윳값은 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$이고,

이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D\text{이다.}$$

9.

고윳값은 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$이고,

이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3\ \ \mathrm{x}_4]=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-2&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=D\text{이다.}$$

10.

고윳값은 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$이고,

이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\1\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3\ \ \mathrm{x}_4]=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-4\\1&0&0&1\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{4}&1\\0&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-4\\1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}=D\text{이다.}$$

11.

$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$의 특성다항식을 구하면 $P_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$이다.
따라서 일반적으로 A가 대각화 가능하려면 이 방정식이 서로 다른 두 근을 가져야 한다.
즉, $(a+d)^2-4(ad-bc)=a^2+2ad+d^2-4ad+4bc=(a-d)^2+4bc>0$이다.

12.

$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$의 특성다항식을 구하면 $P_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$이다.
따라서 일반적으로 A가 대각화 가능하지 않으려면 이 방정식이 근을 갖지 않아야 한다. 즉, $(a+d)^2-4(ad-bc)=a^2+2ad+d^2-4ad+4bc=(a-d)^2+4bc<0$이면 A는 대각화 가능하지 않다.

13.

행렬 $A=\begin{bmatrix}4&1\\1&4\end{bmatrix}$의 고윳값을 구하면 $\lambda_1=3,\ \lambda_2=5$이다. 한편 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix}$이므로 행렬 P는 행렬 A를 대각화하는 행렬이다.

14.

행렬 $A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$의 고윳값을 구하면 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=5$이고, 이 고윳값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 다음 행렬이 행렬 A를 대각

화 하는 행렬이다.

$$P=\begin{bmatrix}\mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

15.

행렬 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 8\\ 1 & 0 & -17\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$의 고윳값을 구하면 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$이다. 즉, 3개의 고윳값이 모두 다르므로 주어진 행렬은 대각화 가능하다.

16.

고윳값은 $\lambda=1,\ \lambda=2$이다.
$\lambda=1$에 대한 대수적 중복도는 2, $\lambda=2$에 대한 대수적 중복도는 1이다.
$\lambda=1$의 기하적 중복도는 1, $\lambda=2$의 기하적 중복도도 1이다.

17.

고윳값은 1과 –2이다.
고윳값 1의 대수적 중복도는 2이고 고윳값 2의 대수적 중복도는 1이다.

18.

고윳값은 –1과 3이다.
두 고윳값의 대수적 중복도는 2이다.

19.

행렬 A가 대각화 가능하므로 대각행렬 D에 대하여 $D=P^{-1}AP$인 행렬 P가 존재한다. 이때 D^{-1}은 다시 대각행렬이고,

$$\begin{aligned}D^{-1}&=(P^{-1}AP)^{-1}\\&=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}\\&=P^{-1}A^{-1}P\end{aligned}$$

따라서 A^{-1}도 대각화 가능하다.

20.

행렬 A가 대각화 가능하면 가역행렬 P와 대각행렬 D에 대하여 $D=P^{-1}AP$이다. 그런데 대각행렬 D에 대하여 D^k도 대각행렬이고 ,

$$\begin{aligned}D^k&=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)\\&=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(P^{-1}P)\\&=P^{-1}A^kP\end{aligned}$$

따라서 A^k도 대각화 가능하다.

21.

행렬 A가 대각화 가능하면 가역행렬 P와 대각행렬 D에 대하여 $D=P^{-1}AP$이다. 그런데 대각행렬 D의 역행렬 D^T도 대각행렬이고,

$$\begin{aligned} D^T &= (P^{-1}AP)^T \\ &= P^T A^T (P^{-1})^T \\ &= ((P^{-1})^{-1})^T A^T (P^{-1})^T \\ &= (P^{-1})^T)^{-1} A^T (A^{-1})^T \end{aligned}$$

따라서 A^T도 대각화 가능하다.

22.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$에 대하여,

	행렬식	계수	고윳값	일차독립인 고유벡터	
A	1	2	$\lambda=1$	$(1,0)$	
I	1	2	$\lambda=1$	$(1,0)$	$(0,1)$

위 표에서와 같이 고윳값에 대응하는 일차독립인 고유벡터의 수가 다르므로 닮음행렬이 아니다.

Section 6.3

1.
고윳값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$이다.
고윳값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이고, 고윳값 $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

2.
고윳값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6$이다.
고윳값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.
고윳값 $\lambda_2 = 6$에 대응하는 고유공간의 차원은 2이다.

3.
고윳값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$이다.
고윳값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 2이다.
고윳값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

4.
고윳값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 8$이다.
고윳값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 3이다.
고윳값 $\lambda_2 = 8$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

5.
직교행렬이다.

6.
직교행렬이다.

7.

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

8.

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

9.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

10.

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

12.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

13.

$$P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

14.

$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$이므로 A는 직교행렬이다. 즉 $A^{-1}=A^T$이다.

따라서 $\mathbb{R}^2$의 임의의 두 벡터 x,y에 대하여,

$$\begin{aligned}(A\mathrm{x})\cdot(\mathrm{Ay}) &= \mathrm{A}(\mathrm{x}\cdot\mathrm{A})\cdot\mathrm{y} \\ &= A(A^T\mathrm{x}^\mathrm{T})\mathrm{y} \\ &= AA^{-1}(\mathrm{x}^\mathrm{T}\mathrm{y}) \\ &= \mathrm{x}^\mathrm{T}\mathrm{y} \\ &= \mathrm{x}\cdot\mathrm{y}\end{aligned}$$

15.

A가 직교행렬이면 $A^{-1}=A^T$이고, 행렬식의 성질에 의하여 $\det(A)=\det(A^T)$이므로 다음이 성립한다.

$$\det(AA^{-1})=\det(A)\det(A^{-1})=\det(A)\det(A^T)=\det(A)\det(A)=(\det(A))^2=1$$

따라서 $\det(A)=\pm 1$이다.

16.

A와 A^T의 고윳값은 같다. 그런데 A가 직교행렬이면 $A^T=A^{-1}$이므로 A와 A^{-1}의 고윳값은 같다. 따라서 $\mathrm{x}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{x}=\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{x}=\lambda^2\mathrm{x}$이다. 그러므로 $\lambda^2=1$이므로 고윳값의 절댓값은 1이다.

17.

A, B가 직교행렬이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(AB)^T &= B^TA^T \\ &= B^{-1}A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}\end{aligned}$$

따라서 AB는 직교행렬이다.

18.

A가 직교행렬이므로 $(A^T)^T=(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$이다. 따라서 A^T도 직교행렬이다.

19.

(a)⇒(b) : A가 직교행렬이면 $A^T=A^{-1}$이므로 $A^TA=A^{-1}A=I_n=AA^{-1}=AA^T$

(b)⇒(c) : $A^TA=I_n=AA^T$이면 서로 다른 열(행)벡터의 내적은 0이고 같은 벡터의 내적은 1이다. 따라서 A의 열(행)벡터들은 정규직교집합을 이룬다.

(c)⇒(a) : A의 열(행)벡터들이 정규직교집합을 이루면 A는 직교행렬이다.

20.

$A^5 = \begin{bmatrix} 63 & -62 \\ 31 & -30 \end{bmatrix}$

21.

$A^5 = \begin{bmatrix} -1 & -62 & 31 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -62 & 32 \end{bmatrix}$

22.

행렬 A의 특성방정식을 구하면 $\lambda^2 - (a+c)\lambda - b^2 = 0$이고, 이차방정식의 판별식을 구하면 $D = (a-c)^2 = 4b^2 \geq 0$이다. 그러므로 특성방정식은 실근을 가지므로 행렬 A는 실수인 고윳값을 갖는다.

Section 6.4

1.

3,1

2.

3,0

3.

4,1

4.

9,1

5.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

10.

직교행렬 U의 행렬식 $\det(U)=\pm 1$이다. 만일 $A=U\Sigma V^T$이고 A가 정사각행렬이면 U, V도 정사각행렬이므로 $\det(A)=\det(U)\det(\Sigma)\det(V^T)=\pm det(\Sigma)=\pm\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$

Section 6.5

1.

$A^5 = \begin{bmatrix} 65 & -66 \\ 33 & -34 \end{bmatrix}$

2.

$A^5 = \begin{bmatrix} 94 & -93 \\ 62 & -61 \end{bmatrix}$

3.

$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -62 & 31 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -62 & 32 \end{bmatrix}$

4.

$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -93 & 31 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$

5.

$A^n = \begin{bmatrix} \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} & -(-4)^n + 4^n \\ \dfrac{-(-4)^n + 4^n}{4} & \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} \end{bmatrix}$

6.

A 의 고윳값은 $\lambda = 0, 2$이다.

$\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x} = \mathrm{s}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{s} \neq 0)$이다.

$\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x} = \mathrm{r}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{r} \neq 0)$이다.

A는 일차독립인 두 개의 고유벡터를 가지므로

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이고, $D^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$이다. 따라서 $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{bmatrix}$이다.

7.

$A=\begin{bmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_0=\begin{bmatrix}\mathrm{C}_0\\ \mathrm{R}_0\end{bmatrix}$라 하면

$$\mathrm{x}_k=\begin{bmatrix}C_k\\ R_k\end{bmatrix}=A^k\mathrm{x}_0=A^k\begin{bmatrix}C_0\\ R_0\end{bmatrix}$$

따라서 A^k을 계산하면 k년 후의 인구분포를 알 수 있다. 그런데 행렬 A의 고윳값이 $\lambda=1,\ \frac{4}{5}$이고 이에 대응하는 고유벡터는 각각

$$\mathrm{v}_1=\mathrm{s}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ \mathrm{v}_2=\mathrm{t}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\quad(\mathrm{s},\ \mathrm{t}\in\mathbb{R})$$

이므로 A는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

이때 k가 충분히 크면 $\left(\frac{4}{5}\right)^k$는 점점 작아져 0에 수렴하게 되므로

$$A^k=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(\frac{4}{5}\right)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{x}_\mathrm{k}&\approx\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{C}_0\\ \mathrm{R}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{C}_0+\mathrm{R}_0)\\ \frac{1}{2}(\mathrm{C}_0+\mathrm{R}_0)\end{bmatrix}\\ &=(C_0+R_0)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

그러므로 초기 인구분포에는 상관없이 오랜 기간 후에는 전 인구의 $\frac{1}{2}$는 도시에 $\frac{1}{2}$은 시골에 거주하게 된다.

8.

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0.85-\lambda & 0.05 \\ 0.15 & 0.95-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-0.8)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1 = 1 \ \ \mathrm{v}_1 = (1,3), \quad \lambda_2 = 0.8 \ \ \mathrm{v}_2 = (1,-1)$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$

$A^k = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

장기간 후의 인구 분포는 도시 25% 교외 75%로 구성된다.

9.

k년 후의 호랑이의 수는 전년도 수의 50%와 전년도 산토끼의 수의 30%를 더한 것과 같고, k년 후의 산토끼의 수는 전년도 수의 130%에서 호랑이에게 잡혀 먹힌 수를 뺀 것과 같다. 따라서 k년 후의 호랑이와 산토끼의 수를 각각 T_k, H_k라고 하면

$$\mathrm{x_k} = \begin{bmatrix} \mathrm{T_k} \\ \mathrm{H_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5\mathrm{T_{k-1}} + 0.3\mathrm{H_{k-1}} \\ -\mathrm{c}\mathrm{T_{k-1}} + 1.3\mathrm{H_{k-1}} \end{bmatrix}$$

이고, $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -c & 1.3 \end{bmatrix}$의 고윳값은 $\lambda = \dfrac{9 \pm \sqrt{16-30c}}{10}$이다. 포획률을 $c=0.5$라고 하면 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.8$이고 이에 대응하는 고유벡터는 각각

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{s}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

따라서

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.8)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \ \mathrm{x}_k = A^k\mathrm{x}_0 \approx \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}H_0 - \frac{3}{2}T_0 \\ \frac{5}{2}H_0 - \frac{5}{2}T_0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\alpha = \frac{3}{2}H_0 - \frac{3}{2}T_0$라 하면

$$\mathrm{x_k} = \begin{bmatrix} \mathrm{T_k} \\ \mathrm{H_k} \end{bmatrix} \approx \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

그러므로 최초의 마리수와는 상관없이 안정적인 상태가 된다.
한편 포획률이 $c = 0.4$일 때, 위와 같은 방법으로 A^k를 계산하면,

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{11}{10}\right)^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

k 가 충분히 커지면,

$$\mathrm{x_k} \approx \left(\frac{11}{10}\right)^{\mathrm{k}} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\mathrm{H_0} - \frac{1}{2}\mathrm{T_0} \\ \frac{3}{2}\mathrm{H_0} - \mathrm{T_0} \end{bmatrix}$$

여기서 $\beta = \frac{3}{4}H_0 - \frac{1}{2}T_0$라 하면 $\mathrm{x_k} = \beta\left(\frac{11}{10}\right)^{\mathrm{k}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$이다. 그러므로 매년 호랑이와 산토끼의 수는 증가하고 호랑이와 산토끼의 비율은 $1:2$이다.

또한 포획률이 $c = 0.532$일 때도 마찬가지로 계산하면

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{9.2}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{8.8}{10}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k 가 충분히 커지면

$$\mathrm{x}^{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} \mathrm{T_k} \\ \mathrm{H_k} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{T_0} \\ \mathrm{H_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.

이상을 종합하면 포획률 c 가 $c = 0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 조화를 이루며 살아가고, $c < 0.5$일 때는 호랑이와 산토끼의 수가 매년 증가하여 결국 인구폭발이 되며, $c > 0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.

10.

$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$ 에 대응하는 $(I - P)\mathrm{q} = \mathbf{0}$ 을 이용하면

$$\begin{pmatrix} 0.05 & -0.03 \\ -0.05 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05q_1 - 0.03q_2 \\ -0.05q_1 + 0.03q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

이다. $q_2 = s$라 하면 q 는 확률벡터이므로 $q_1 = \frac{3}{5}s$이고 $q_1 + q_2 = \frac{8s}{5} = 1$이다. 따라서 $q_1 = \frac{3}{8}$, $q_2 = s = \frac{5}{8}$이다. 따라서 오랜 시간이 지난 후의 인구분포는 다음과 같다.

$$125000 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46875 \\ 78125 \end{pmatrix}$$

11.

2,4,1,3