제 11 장

IIR 필터 설계

책의 1절 'IIR 필터 설계의 개요'에서 아날로그 필터 설계를 거쳐 디지털 IIR 필터를 설계하는 이유에 대한 보충 설명과 필터 변환시 나타나게 되는 나이퀴스트 효과에 대해 간단히 언급하였다.

2절 '극-영점 배치에 의한 IIR 필터 설계'와 관련하여 개념을 이해할 수 있는 예제를 보충하였으며, 3절 '아날로그 필터 설계'와 관련하여 책에서 생략하였던 체비쇼프 필터의 전달함수 유도 과정을 소개하였다.

그리고 4절 '아날로그-디지털 필터 변환'과 5절 'IIR 필터의 주파수 대역 변환'과 관련하여 가장 널리 쓰이고 있는 쌍선형 변환과 D2D 변환의 개념을 쉽게 이해할 수 있는 아주 간단한 예를 추가하였다.

학부 수준에서 다루기 어려운 문제들을 제외한 IIR 필터의 주요 개념과 설계 원리에 대해서는 이미 책에서 충분히 설명하였기 때문에, 특별히 추가된 학습 자료의 양은 많지 않지만 쉽게 손으로 따라 할 수 있는 예제들을 통해 개념과 설계 방법을 확실히 익힐 수 있을 것이다.

11.1 IIR 필터 설계의 개요

IIR 필터 설계에서 군이 아날로그 필터 설계에 의한 우회적인 방법이 사용되는 데에는 다그만한 이유가 있다. 우선 아날로그 IIR 필터의 설계는 이론적으로 매우 발전되어 있고 유용한 결과들이 많이 축적되어 있다. 특히 설계 절차가 체계화되어 있고, 닫힌 꼴의 설계 공식과 많은 표로 잘 정리된 표준 설계 결과들이 제공되기 때문에 설계하기가 매우 편리하다. 또한 설계된 아날로그 필터로부터 디지털 필터를 얻는 과정도 어렵지 않다. 그러나 이러한 잘 갖추어진 아날로그 필터 설계 방법들을 똑같이 디지털 필터에 적용하려 하면, 디지털 필터의 주파수 응답이 아날로그 필터와는 달리 주기 함수여서 아날로그 필터에서처럼 닫힌 꼴의 살계 공식으로 결과가 체계화되지 않는다. 그러므로 번거롭지만 아날로그 필터를 설계한 후에 디지털 필터로 변환하는 것이다. 이때 책에서 강조한 것처럼 안정한 아날로그 필터를 안정한 디지털 필터로 변환하는 것이 핵심 포인트이다.

아날로그 필터를 먼저 설계하여 디지털 필터로 필터 변환할 경우, 설계된 아날로그 필터의 특성-진폭 응답, 위상 응답(위상 지연 및 그룹 지연), 임펄스 응답-이 디지털 필터에서도 조금도 변함없이 유지되지는 않는다. 이는 필터 변환 과정에서 0에서 ∞까지의 아날로그 주파수가 0에서 π(나이퀴스트 샘플링 주파수)까지의 좁은 대역으로 사상되기 때문에 본질적으로 발생하는 왜곡으로서 나이퀴스트 효과라고 한다. 필터 변환의 방법에 따라서 발생하는 나이퀴스트 효과의 양상이 다르므로 주어진 문제에 적합한 필터 변환 기법을 선택해야 한다.

11.2 극-영점 배치에 의한 IIR 필터 설계

극-영점 배치 방법에서는 설계된 필터의 주파수 응답과 설계 사양을 비교하여 오차가 클 경우 다시 극-영점의 위치를 미세 조정하는 과정을 반복하여 원하는 IIR 필터를 얻게 되므로, 설계자의 경험에 많이 의존하고 복잡한 필터의 경우에는 적용하기가 어렵다. 그러나 ***필터의 극과 영점에 따른 주파수 응답 특성의 차이를 잘 볼 수 있다***는 점에서 필터를 이해하는 데에는 매우 유용하다.

11.3 아날로그 필터 설계

(1) 체비쇼프 필터의 전달 함수 결정

체비쇼프 필터의 진폭 제곱 특성 (책)식 (11.28)에 $\omega = s/j$를 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_N^2\left(\dfrac{s}{j\omega_c}\right)} \tag{C11.1}$$

(책)식 (11.30)에서 $\cos^{-1}x = \theta$라 두면 $C_N(x) = \cos N\theta$가 되므로 식 (C11.1)의 분모=0인 방정식은 다음과 같고

$$1 + \epsilon^2\cos^2 N\theta = 0 \tag{C11.2}$$

따라서 다음의 관계를 얻는다.

$$\cos N\theta = \pm j/\epsilon \tag{C11.3}$$

$\theta = \theta_1 + j\theta_2$로 두면 식 (C11.3)은 다음과 같이 되고

$$\cos N\theta = \cos N\theta_1 \cosh N\theta_2 - j\sin N\theta_1 \sinh N\theta_2 = \pm j/\epsilon \tag{C11.4}$$

식 (C11.4)가 성립되기 위해서는 θ_1과 θ_2에 대해 다음이 만족되어야만 한다.

$$\begin{cases} \cos N\theta_1 = 0 \\ \sin N\theta_1 = \pm 1 \end{cases} \tag{C11.5}$$

$$\sinh N\theta_2 = \frac{1}{\epsilon} \tag{C11.6}$$

위의 두 식으로부터 다음과 같이 θ_1과 θ_2를 구할 수 있다.

$$\theta_1 = \frac{2k+1}{N}\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \cdots, 2N-1 \tag{C11.7}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{N}\ln\frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon} = \frac{1}{N}\ln a \tag{C11.8}$$

따라서 $x = s/j\omega_c = \cos\theta$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(\theta_1 + j\theta_2) = \cos\theta_1\cosh\theta_2 - j\sin\theta_1\sinh\theta_2 \\ &= \cos\left(\frac{2k+1}{N}\frac{\pi}{2}\right)b - j\sin\left(\frac{2k+1}{N}\frac{\pi}{2}\right)a, \quad k = 0, \cdots, 2N-1 \end{aligned} \tag{C11.9}$$

여기서

$$\begin{cases} a = \sinh\theta_2 = \sinh(\frac{1}{N}\ln a) = \frac{1}{2}(\sqrt[N]{a} - \sqrt[N]{1/a}) \\ b = \cosh\theta_2 = \cosh(\frac{1}{N}\ln a) = \frac{1}{2}(\sqrt[N]{a} + \sqrt[N]{1/a}) \\ \alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon} \end{cases} \tag{C11.10}$$

그러므로 식 (C11.1)의 극은 다음과 같이 얻어진다.

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k = \omega_c\left\{-a\sin\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) + jb\cos\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad \text{(C11.11)}$$

버터워스 필터의 경우와 마찬가지로, 식 (C11.11)과 (책)식 (11.40)을 이용하여 계산한 원형($\omega_c=1$) 1형 체비쇼프 필터의 전달 함수 분모 다항식을 [표 C11-1]에 나타내었다.

[표 C11-1] **체비쇼프 1형 필터의 전달 함수의 분모 다항식**

필터 차수 N	분모 다항식 $P(s)$ ($A_p=1$[dB])	분모 다항식 $P(s)$ ($A_p=3$[dB])
1	$s+1.9652$	$s+1$
2	$s^2+0.0977s+0.1025$	$s^2+0.6436s+0.7071$
3	$s^3+0.9883s^2+0.2384s+0.4913$	$s^3+0.5961s^2+0.9277s+0.2500$
4	$s^4+0.9528s^3+1.4539s^2+0.7426s+0.2756$	$s^4+0.5805s^3+1.1685s^2+0.4039s+0.1768$

11.4 아날로그-디지털 필터 변환

■ 예제 C11-1 : *쌍선형 변환을 이용한 필터 변환*

아래의 전달 함수를 갖는 1차 저역 통과 아날로그 필터를 쌍선형 변환을 이용하여 차단 주파수 $\Omega_c=0.2\pi$인 저역 통과 디지털 필터로 변환하라.

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

<풀이>

샘플링 주기를 T라고 하면 (책)식 (11.67)로부터

$$\omega_c = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{T} = \frac{0.8284}{T}$$

따라서 아날로그 LP 필터의 전달 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(\omega) = \frac{\frac{0.8284}{T}}{s+\frac{0.8284}{T}} = \frac{0.8284}{Ts+0.8284}$$

위 식에 $s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ 을 대입하여 정리하면

$$H(z)=\frac{0.8284}{T\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+0.8284}=\frac{0.8284(z+1)}{2.8284z-1.1716}=\frac{0.2929(z+1)}{z-0.4142}$$

결과를 확인하기 위해 DC 이득과 고주파 이득, 그리고 차단 주파수에서의 이득 값을 구해 보자.

$$\text{DC 이득 : } H(z)|_{z=1}=\left.\frac{0.2929(z+1)}{z-0.4142}\right|_{z=1}=\frac{0.5858}{0.5858}=1$$

$$\text{고주파 이득 : } H(z)|_{z=-1}=\left.\frac{0.2929(z+1)}{z-0.4142}\right|_{z=-1}=0$$

$$H(z)|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}}=\left.\frac{0.2929(z+1)}{z-0.4142}\right|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}}=\frac{0.2929(1.7071+j0.7071)}{0.2929+0.7071}=\frac{0.5412}{0.7654}=07071$$

따라서 변환된 디지털 필터는 저역 통과 특성을 보이며, 차단주파수에서 정확히 반전력을 만족한다. ■

11.5 IIR 필터의 주파수 대역 변환

■ 예제 C11-2 : *주파수 대역 변환*

[예제 C3-11]에서 구한 디지털 LP 필터를 통과 대역 중심 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{2}$, 하측 및 상측 통과 대역 경계 주파수가 각각 $\Omega_{pl}=\frac{3\pi}{8}$, $\Omega_{pu}=\frac{5\pi}{8}$ 인 대역 통과 필터로 변환하라.

<풀이>

(책)[표 11-5]로부터 LP2BP 변환을 위한 파라미터 값들을 계산하면 다음과 같다.

$$k=\cot\left(\frac{\Omega_{pu}-\Omega_{pl}}{2}\right)\tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right)=\cot\frac{\pi}{8}\tan\frac{\pi}{8}=1$$

$$h=\frac{\cos\frac{\Omega_{pu}+\Omega_{pl}}{2}}{\cos\frac{\Omega_{pu}-\Omega_{pl}}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}}=0$$

$$c_1 = -2h\frac{k}{k+1} = 0$$
$$c_2 = \frac{k-1}{k+1} = 0$$

따라서 $z = -\dfrac{z'^2 + c_1 z' + c_2}{c_2 z'^2 + c_1 z' + 1} - z'^2$을 [예제 C3-11]의 디지털 LP 필터 전달 함수에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$H_{BP}(z) = \frac{0.2929(z+1)}{z-0.4142}\Big|_{z=-z'^2} = \frac{0.2929(-z'^2+1)}{-z'^2-0.4142} = \frac{0.2929(z'^2-1)}{z^2+0.4142}$$

이를 z의 함수로 다시 나타내면 대역 통과 필터의 전달 함수는 다음과 같이 구해진다.

$$H_{BP}(z) = \frac{0.2929(z^2-1)}{z^2+0.4142}$$

이 전달 함수는 $z = \pm 1$의 영점을 가지므로 DC 이득과 고주파 이득은 0이다. 그리고 $\Omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$와 $\Omega_{pl} = \dfrac{3\pi}{8}$에서의 이득을 계산해보면 다음과 같다.

$$|H_{BP}(z)|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}} = \left|\frac{0.2929(z^2-1)}{z^2+0.4142}\right|_{z=j} = \frac{0.5858}{0.5858} = 1$$
$$|H_{BP}(z)|_{z=e^{j\frac{3\pi}{8}}} = \left|\frac{0.2929(z^2-1)}{z^2+0.4142}\right|_{z=e^{j\frac{3\pi}{8}}} = \frac{0.7654}{1.0824} = 0.7071$$

따라서 통과 대역 중심 주파수에서 이득이 1이고, 통과 대역 경계 주파수에서 이득이 0.707로 반전력 주파수, 즉 차단 주파수가 되며 DC 이득과 고주파 이득이 0인 대역 통과 필터 특성을 잘 만족시키고 있다. ■