제 10 장

FIR 필터의 설계

책의 ‘1절 FIR 필터 설계의 개요’와 관련하여 많이 쓰이고 있는 FIR 필터 차수 추정 공식들을 소개하였다.

책의 ‘2절 선형 위상 FIR 필터’에 대해서는 네가지 유형의 선형 위상 FIR 필터의 주파수 응답을 유도하였다. 또한 선형 위상 FIR 필터의 위상 지연과 군 지연의 관계를 유도하여 설명하였다.

책의 ‘3절 창 함수를 이용한 FIR 필터설계’와 관련하여 카이저 창과 여타 창들의 특성을 비교하였다.

책의 ‘4절 주파수 샘플링에 의한 FIR 필터 설계’와 관련하여 전달 함수 보간 공식의 유도 과정을 소개하고, 최적 설계 기법에서 천이 대역 샘플의 최적 값 선정에 대한 설명을 추가하였다.

10.1 FIR 필터 설계의 개요

10.1.1 FIR 필터 차수의 추정

FIR 필터의 설계는 기본적으로 이상적인 필터의 임펄스 응답의 절단 근사화에 근거를 두고 있으므로, 필터 설계를 진행하기에 앞서 필터의 차수를 결정해야 한다. 그런데 IIR 필터와는 달리 FIR 필터의 차수 선정은 이론적으로 도출할 수 없고 다만 유용한 경험적인 법칙들이 제안되고 있다. 여기서는 그 중에 몇 가지 방법을 소개한다.

카이저(Kaiser) 공식

$$N \cong \frac{-20\log_{10}(\sqrt{\delta_p\delta_s})-13}{14.6(\Omega_s-\Omega_p)/2\pi}+1 \tag{C10.1}$$

벨린저(Bellanger) 공식

$$N \cong -\frac{2\log_{10}(10\delta_p\delta_s)}{3(\Omega_s-\Omega_p)/2\pi} \tag{C10.2}$$

허만(Hermann) 공식

$$N \cong \frac{D_\infty(\delta_p,\, \delta_s)-F(\delta_p,\, \delta_s)[(\Omega_s-\Omega_p)/2\pi]^2}{(\Omega_s-\Omega_p)/2\pi}+1 \tag{C10.3}$$

$$D_\infty(\delta_p,\, \delta_s)=[a_1(\log_{10}\delta_p)^2+a_2(\log_{10}\delta_p)+a_3]\log_{10}\delta_s-[a_4(\log_{10}\delta_p)^2+a_{(}\log_{10}\delta_p)+a_6]$$

$$F(\delta_p,\, \delta_s)=b_1+b_2[\log_{10}\delta_p-\log_{10}\delta_s]$$

$$a_1=0.005309, \quad a_2=0.07114, \quad a_3=-0.4761,$$

$$a_4=0.00266, \quad a_5=0.5941, \quad a_6=0.4278$$

$$b_1=11.01217, \quad b_2=0.51244$$

이 공식들을 보면 FIR 필터의 차수가 천이 대역의 위치에는 상관없이 천이 대역의 폭에 반비례한다는 것을 알 수 있다. 또한 카이저와 벨린저의 공식에서는 필터 차수가 통과 대역 맥동 δ_p와 저지 대역 맥동 δ_s의 곱에 비례하고 있음을 볼 수 있다. 이는 천이 대역폭이 같을 경우 다양한 δ_p와 δ_s의 조합에 대해 필터 차수가 같아질 수 있음을 시사한다.

[표 C10-1]은 다음과 같은 3가지 필터 사양에 대해 필터 차수 추정 공식들의 추정 결과를 나타낸 것이다.

필터 1 : $\delta_p=0.0224,\quad \delta_s=0.000112,\quad \Omega_p=0.10625\pi\,,\quad \Omega_s=0.14375\pi$

필터 2 : $\delta_p=0.017,\quad \delta_s=0.034,\quad \Omega_p=0.2075\pi\,,\quad \Omega_s=0.2875\pi$

필터 3 : $\delta_p=0.0411,\quad \delta_s=0.0137,\quad \Omega_p=0.345\pi\,,\quad \Omega_s=0.575\pi$

[표 C10-1] FIR 필터 차수 추정 결과 비교

필터	실제 차수	카이저 공식	벨린저 공식	허만 공식
1	159	158	163	151
2	38	34	37	37
3	14	12	13	12

[표 C10-1]을 보면 세 가지 공식의 추정 결과가 필터 사양에 따라서 서로 조금씩 다를 뿐만 아니라 실제 필터의 차수와도 다름을 볼 수 있다. 이 공식들은 정확한 결과를 주는 것이 아니고 어디까지나 FIR 필터 설계를 위해 처음 차수를 추정하는 데 활용되는 것일 뿐이다. 책에서도 설명했듯이 FIR 필터는 주어진 사양에 맞춰 설계를 하더라도 단번에 설계 사양을 만족시키기가 어렵다. 따라서 조금씩 조정을 해가면서(즉 차수를 증가시키며) 시행착오를 거쳐 정확한 설계에 도달하게 된다. 그러므로 첫 출발이 실제 값에 가깝다면 시행착오의 횟수를 줄일 수 있다는 점에서 이 공식들은 매우 유용한 수단이 될 것이다.

10.2 선형 위상 FIR 필터

10.2.1 선형 위상 FIR 필터의 주파수 응답

책에서 선형 위상 FIR 필터의 4가지 유형에 대해서 주파수 응답의 특징들을 설명하였다. 여기서는 학습의 편의를 위해 각 유형에 따른 주파수 응답의 유도 과정을 제시하기로 한다. 주파수 응답의 유도 과정은 매우 기계적일뿐더러 대칭성과 길이에 따라 약간의 차이만 생길 뿐이지 기본적으로는 임펄스 응답의 대칭성을 이용해 수열을 반으로 나누어 변수를 치환하는 과정이 4가지 형에 동일하게 적용된다.

주파수 응답은 다음과 같이 필터의 임펄스 응답을 DTFT함으로써 구해진다.

$$H_i(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_i[n] e^{-j\Omega n}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{C10.4}$$

(1) 1형 선형 위상 FIR 필터

길이 N이 홀수이고 $h_1[n] = h_1[N-1-n]$인 경우이다.

임펄스 응답을 반으로 나누면, 가운데 샘플 $h_1[(N-1)/2]$과 길이 $(N-1)/2$인 두 개의 수열로 나뉜다. 따라서 주파수 응답은 다음과 같이 된다.

$$H_1(\Omega) = h_1\left[\frac{N-1}{2}\right] e^{-j\Omega(N-1)/2} + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_1[n] e^{-j\Omega n} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h_1[n] e^{-j\Omega n} \tag{C10.5}$$

위 식의 마지막 항에 $h_1[n]=h_1[N-1-n]$으로 치환하면

$$H_1(\Omega)=h_1\left[\frac{N-1}{2}\right]e^{-j\Omega(N-1)/2}+\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h_1[n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.6}$$
$$+\sum_{n=(N+1)/2}^{N-1}h_1[N-1-n]e^{-j\Omega n}$$

위 식의 마지막 항에서 $N-1-n=n'$로 변수 치환하면

$$H_1(\Omega)=h_1\left[\frac{N-1}{2}\right]e^{-j\Omega(N-1)/2}+\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h_1[n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.7}$$
$$+\sum_{n'=0}^{(N-3)/2}h_1[n']e^{-j\Omega(N-1-n')}$$

따라서 총합 항을 하나로 묶고 공통 인수로 $e^{-j\Omega(N-1)/2}$을 빼내면

$$H_1(\Omega)=\left(\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h_1[n]\left(e^{j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}+e^{-j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}\right)+h_1[\frac{N-1}{2}]\right)e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \tag{C10.8}$$

오일러 공식을 적용하여 총합 항을 정리하면

$$H_1(\Omega)=\left(\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2h_1[n]\cos\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\Omega\right)+h\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \tag{C10.9}$$
$$=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{k=0}^{(N-1)/2}a_k\cos(k\Omega)$$

여기서

$$\begin{cases}a_0=h_1[(N-1)/2]\\ a_k=2h_1[(N-1)/2-k], \quad k=1,\,2,\,\cdots,\,(N-1)/2\end{cases} \tag{C10.10}$$

(2) 2형 선형 위상 FIR 필터

길이 N이 짝수이고 $h_2[n]=h_2[N-1-n]$인 경우이다.

임펄스 응답을 반으로 나누면 길이 $N/2$인 두 개의 수열로 나뉜다. 따라서 주파수 응답은 다음과 같이 된다.

$$H_2(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h_2[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}h_2[n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.11}$$

위 식의 두 번째 항에 $h_2[n]=h_2[N-1-n]$으로 치환하면

$$H_2(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h_2[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}h_2[N-1-n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.12}$$

위 식에서 $N-1-n=n'$로 변수 치환하면

$$H_2(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h_2[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n'=0}^{N/2-1}h_2[n']e^{-j\Omega(N-1-n')} \tag{C10.13}$$

따라서 총합 항을 하나로 묶고 공통 인수로 $e^{-j\Omega(N-1)/2}$을 빼내면

$$H_2(\Omega)=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{N/2-1}h_2[n]\left(e^{j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}+e^{-j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}\right) \tag{C10.14}$$

오일러 공식을 적용하여 총합 항을 정리하면

$$\begin{aligned}H_2(\Omega)&=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{N/2-1}2h_2[n]\cos\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\Omega\right)\\&=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{k=1}^{N/2}b_k\cos\left((k-\frac{1}{2})\Omega\right)\end{aligned} \tag{C10.15}$$

여기서

$$b_k=2h_2[N/2-k],\quad k=1,\,2,\,\cdots,\,N/2 \tag{C10.16}$$

(3) 3형 선형 위상 FIR 필터

길이 N이 홀수이고 $h_3[n]=-h_3[N-1-n]$인 경우이다.

임펄스 응답을 반으로 나누면, 가운데 샘플 $h_3[(N-1)/2]$과 길이 $(N-1)/2$인 두 개의 수열로 나뉜다. 그런데 기수 대칭이므로 $h_3[(N-1)/2]=0$이다.

따라서 주파수 응답은 다음과 같이 된다.

$$H_3(\Omega)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h_3[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=(N+1)/2}^{N-1}h_3[n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.17}$$

위 식의 두 번째 항에 $h_3[n]=-h_3[N-1-n]$으로 치환하면

$$H_3(\Omega)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h_3[n]e^{-j\Omega n}-\sum_{n=(N+1)/2}^{N-1}h_3[N-1-n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.18}$$

위 식에서 $N-1-n=n'$로 변수 치환하면

$$H_3(\Omega)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_3[n]e^{-j\Omega n}-\sum_{n'=0}^{(N-3)/2} h_3[n']e^{-j\Omega(N-1-n')} \tag{C10.19}$$

따라서 총합 항을 하나로 묶고 공통 인수로 $e^{-j\Omega(N-1)/2}$을 빼내면

$$H_3(\Omega)=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_3[n]\left(e^{j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}-e^{-j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}\right) \tag{C10.20}$$

오일러 공식을 적용하여 총합 항을 정리하면

$$\begin{aligned} H_3(\Omega)&=e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{(N-3)/2} j2h_3[n]\sin\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\Omega\right) \\ &=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\Omega-\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k\sin(k\Omega) \end{aligned} \tag{C10.21}$$

여기서

$$a_k=2h_3[(N-1)/2-k],\quad k=1,\,2,\,\cdots,\,(N-1)/2 \tag{C10.22}$$

(4) 4형 선형 위상 FIR 필터

길이 N이 짝수이고 $h_4[n]=-h_4[N-1-n]$인 경우이다.

임펄스 응답을 반으로 나누면, 길이 $N/2$인 두 개의 수열로 나뉜다. 따라서 주파수 응답은 다음과 같이 된다.

$$H_4(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h_4[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=N/2}^{N-1} h_4[n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.23}$$

위 식의 두 번째 항에 $h_4[n]=-h_4[N-1-n]$으로 치환하면

$$H_4(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h_4[n]e^{-j\Omega n}-\sum_{n=N/2}^{N-1} h_4[N-1-n]e^{-j\Omega n} \tag{C10.24}$$

위 식에서 $N-1-n=n'$로 변수 치환하면

$$H_4(\Omega)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h_4[n]e^{-j\Omega n}-\sum_{n'=0}^{N/2-1} h_4[n']e^{-j\Omega(N-1-n')} \tag{C10.25}$$

따라서 총합 항을 하나로 묶고 공통 인수로 $e^{-j\Omega(N-1)/2}$을 빼내면

$$H_4(\Omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{N/2-1} h_4[n]\left(e^{j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega} - e^{-j(\frac{N-1}{2}-n)\Omega}\right) \tag{C10.26}$$

오일러 공식을 적용하여 총합 항을 정리하면

$$\begin{aligned} H_4(\Omega) &= e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega}\sum_{n=0}^{N/2-1} j2h_4[n]\sin\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\Omega\right) \\ &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\Omega-\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin\left((k-\frac{1}{2})\,\Omega\right) \end{aligned} \tag{C10.27}$$

여기서

$$b_k = 2h_4[N/2-k], \quad k = 1, 2, \cdots, N/2 \tag{C10.28}$$

10.2.2 선형 위상 FIR 필터의 위상 지연과 군 지연

지금까지 살펴본 선형 위상 FIR 필터를 위상 지연과 군 지연의 관점에서 다시 생각해보자. 삼각 함수는 다음의 성질을 만족하므로

$$\begin{cases} \sin(\alpha\Omega \pm \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha\Omega) \\ \cos(\alpha\Omega \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(\alpha\Omega) \end{cases} \tag{C10.29}$$

위상 응답 $\angle H(\Omega) = \theta(\Omega)$은 $\theta(\Omega) = -\alpha\Omega$와 $\theta(\Omega) = -\alpha\Omega \pm \pi/2$이 두 가지 경우에 대해 선형 위상이 된다.

주파수 응답 식 (C10.29)로부터 위상 응답 $\angle H(\Omega) = \theta(\Omega)$는 다음과 같으므로

$$\theta(\Omega) = \tan^{-1}\frac{Im\{H(\Omega)\}}{Re\{H(\Omega)\}} = -\tan^{-1}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\sin(\Omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\cos(\Omega n)} \tag{C10.30}$$

선형 위상 조건 $\theta(\Omega) = -\alpha\Omega$ 을 적용하면 다음과 같이 되고

$$\tan(\theta(\Omega)) = -\frac{\sin(\alpha\Omega)}{\cos(\alpha\Omega)} = -\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\sin(\Omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\cos(\Omega n)} \tag{C10.31}$$

이로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\{\sin(\Omega n)\cos(\alpha\Omega) - \cos(\Omega n)\sin(\alpha\Omega)\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\sin(\Omega(\alpha - n)) = 0 \tag{C10.32}$$

모든 Ω에 대해 위의 식이 성립하기 위해서는 $n=(N-1)/2$을 대칭축으로 $h[n]$은 우함수 대칭이 되고 $\sin(\Omega(\alpha-n))$은 기함수 대칭이 되면 된다. 따라서

$$\begin{cases} \alpha = (N-1)/2 \\ h[n] = h[N-1-n] \end{cases} \tag{C10.33}$$

이 결과는 1형과 2형의 선형 위상 FIR 필터의 경우와 일치한다. 이때 위상 지연과 군 지연은 다음과 같이 계산되므로 같다. 즉 $\tau_p = \tau_g$이다.

$$\tau_p = -\frac{\theta(\Omega)}{\Omega} = \alpha = \frac{N-1}{2} \tag{C10.34}$$

$$\tau_g = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} = \alpha = \frac{N-1}{2} \tag{C10.35}$$

마찬가지로 식 (C10-30)에 선형 위상 조건 $\theta(\Omega) = -\alpha\Omega \pm \pi/2$을 적용하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\{\cos(\Omega n)\cos(\alpha\Omega) \mp \sin(\Omega n)\sin(\alpha\Omega)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\cos(\Omega(\alpha \pm n)) = 0 \end{aligned} \tag{C10.36}$$

모든 Ω에 대해 위의 식이 성립하려면 $n=(N-1)/2$을 대칭축으로 $h[n]$은 기수 대칭이 되고$\cos(\Omega(\alpha \pm n))$은 우수 대칭이 되어야 한다. 따라서

$$\begin{cases} a = (N-1)/2 \\ h[n] = -h[N-1-n] \end{cases} \tag{C10.37}$$

이 결과는 3형과 4형의 선형 위상 FIR 필터의 결과와 완전히 일치한다. 이 경우 군 지연은 $\tau_g = \alpha = (N-1)/2$로 상수이다. 군 지연과 위상 지연이 같지 않음에도 선형 위상이 되는 이유는 식 (C10-29)의 관계 때문이다. 이 경우 군 지연은 $\tau_g = \alpha = (N-1)/2$로 상수이다.

10.3 창 함수를 이용한 FIR 필터 설계

카이저 창은 파라미터 α의 선정에 따라 창 함수법에서 사용되는 다름 창들과 거의 비슷한 성능을 발휘할 수 있도록 조정할 수 있다. (책)[표 10-3]에 FIR 필터의 설계에 사용되는 주요 창 함수들의 성능을 비교하여 나타내었는데, 이들 창 함수에 대응되는 특성을 지니는 카이저 창의 값들을 [표 C10-2]에 제시한다. 표에서 천이 대역폭은 정규화된 각주파수 즉, 디지털 주파수로 표시된 것이다. 창 함수 중에 가장 날카로운 천이 특성을 지닌 사각 창의 경우를 제외하면, 대체로 카이저 창의 천이 특성이 더 우수함을 볼 수 있다.

[표 C10-2] 각종 창에 대응되는 카이저 창

창 \ 특성	각종 창의 천이 대역폭	카이저 창 α	카이저 창 천이 대역폭
사각 창	$\frac{0.9}{N}$	0	$\frac{0.95}{N}$
삼각 창	-	1.33	$\frac{1.18}{N}$
해닝 창	$\frac{3.1}{N}$	3.86	$\frac{2.55}{N}$
해밍 창	$\frac{3.3}{N}$	4.86	$\frac{3.13}{N}$
블랙먼 창	$\frac{5.5}{N}$	7.04	$\frac{4.59}{N}$

창 함수법은 필터 설계가 단순하다는 장점이 있지만, 책에서도 설명했듯이 창 함수와 필터 차수의 선정 외엔 조정할 여지가 없어 유연성이 떨어지는 단점을 안고 있다. 따라서 통과 대역 맥동과 저지 대역 맥동이 같이 묶여서 결정되고, 창 함수가 달라지지 않는 한 필터 차수를 바꾸어도 저지 대역 감쇠는 변하지 않는다. 또한 주파수 영역에서 이상적인 필터의 주파수 응답과 창 함수 스펙트럼의 컨벌루션의 영향으로 인해 통과 대역 및 저지 대역 경계 주파수가 정확히 지켜지지 않게 된다.

10.4 주파수 샘플링에 의한 FIR 필터 설계

(1) 주파수 샘플링법으로 설계된 필터의 전달 함수

필터 주파수 응답 $H(\Omega)$의 샘플 스펙트럼 $H[k]$은 다음과 같이 표현할 수 있고

$$\begin{aligned} H[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi kn/N} \\ &= H(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} = H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} \end{aligned} \tag{C10.38}$$

이를 역 DFT하면 샘플 스펙트럼에 대응되는 임펄스 응답을 얻게 된다.

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N} \tag{C10.39}$$

따라서 필터의 전달 함수는 식 (C10.38)과 식 (C10.39)의 DFT쌍을 이용하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N}\right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\left(\sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi k/N} z^{-1})^n\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\left(\frac{1-e^{j2\pi k} z^{-N}}{1-e^{j2\pi k/N} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H[k]}{1-e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \end{aligned} \tag{C10.40}$$

주파수 응답은 전달 함수에서 $z = e^{j\Omega}$으로 둔 값이므로

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1-e^{-j\Omega N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H[k]}{1-e^{j2\pi k/N} e^{-j\Omega}} \tag{C10.41}$$

식 (C10.41)은 실제의 주파수 응답 $H(\Omega)$를 이처럼 샘플 스펙트럼 $H[k]$로부터 보간에 의해 구할 수 있음을 보여준다.

(2) 최적 주파수 샘플링 설계의 천이 대역 샘플 값 선정

최적 주파수 샘플링 설계 방법에서 천이 대역에 같은 개수의 샘플을 취하더라도 샘플을 어떤 값으로 선택하느냐에 따라 필터 특성이 달라진다. [표 C10-3]은 Rabiner 등(1970)이 선형 계획법을 이용한 최적화를 통해 $N = 15$일 때 대역폭에 따른 천이 대역 샘플의 최적 값을 제시한 것이다.

표에서 첫 블록은 천이 대역에서 하나의 샘플을 취하는 경우이고, 두 번째와 세 번째 블록은 각각 2개와 3개의 샘플을 취하는 경우이다. 통과 대역의 샘플 수는 통과 대역의 대역폭을 나타내는 지표로 생각하면 된다. 천이 대역에서 취하는 샘플 수가 많을수록 더 큰 저지 대역 감쇠가 가능함을 표에서 볼 수 있다. 또한 통과 대역 샘플 수가 많을수록, 즉 통과 대역에 비해 천이 대역이 상대적으로 좁을수록 더 큰 저지 대역 감쇠를 보이고 있다.

[표 C10-3] 천이 대역 샘플의 최적 값

통과 대역 샘플 수	샘플 1	샘플 2	샘플3	저지대역 감쇠
1	0.43378296			42.30932283
2	0.41793823			41.26299286
3	0.41047363			41.25333786
4	0.40405884			41.94907713
5	0.39268189			44.37124538
6	0.35766525			56.01416588
1	0.09500122	0.58995418		70.60540585
2	0.10319824	0.59357118		69.26168156
3	0.10083618	0.58943270		69.91973495
4	0.08407493	0.55715312		75.51172256
5	0.05180206	0.49917424		103.46078300
1	0.01455078	0.18457882	0.66897613	94.61166191
2	0.01000977	0.17360713	0.65951526	104.99813080
3	0.00873413	0.16397310	0.64711264	114.90719318
4	0.00378799	0.12393963	0.60181154	157.29257584

Rabiner, L. R., Gold B., and McGonegal, C. A., “An approachto the approxination Problem for Nonrecursive Digital Filters,” IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, Vol. AU-18, pp.83-106, June, 1970.

샘플 스펙트럼의 수에 따라 최적 값은 달라지는데, 천이 대역 샘플 스펙트럼의 값은 대체로 다음의 범위에서 적절히 선택하면 무난하다.

샘플 스펙트럼 1개 : 0.259 < 샘플 1 < 0.450
샘플 스펙트럼 2개 : 0.040 < 샘플 1 < 0.150
0.450 < 샘플 2 < 0.650
샘플 스펙트럼 3개 : 0.003 < 샘플 1 < 0.035
0.100 < 샘플 2 < 0.300
0.550 < 샘플 3 < 0.750

통과 대역폭이 넓을수록 더 작은 값을 잡으면 된다. 표에서 볼 수 있듯이 샘플 스펙트럼의 값이 더 작으면 저지대역 감쇠가 더 커진다.