Chapter 09 필터의 기초

[Quick Review]

(1) ○
(2) $\Omega = \pi$
(3) 비순환
(4) ×
(5) ×
(6) 다르다
(7) -3
(8) ×
(9) 차단 주파수
(10) 진폭
(11) ○
(12) 위상
(13) 단위원
(14) ○
(15) 진폭 제곱 특성
(16) 상대
(17) 차수, LP
(18) ○
(19) BP, 가까이
(20) ○

[기초 문제]

9.1 ㉰

9.2 ㉯

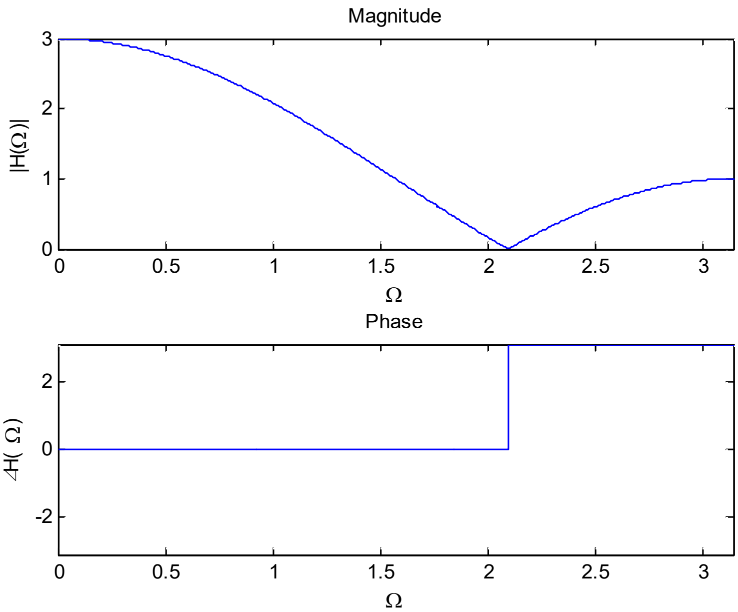
9.3 ㉰

9.4 ㉰

9.5 ㉰

9.6

(a) $H(\Omega)=h[-1]e^{j\Omega}+h[0]e^{-j0}+h[1]e^{-j\Omega}=1+2\cos\Omega$



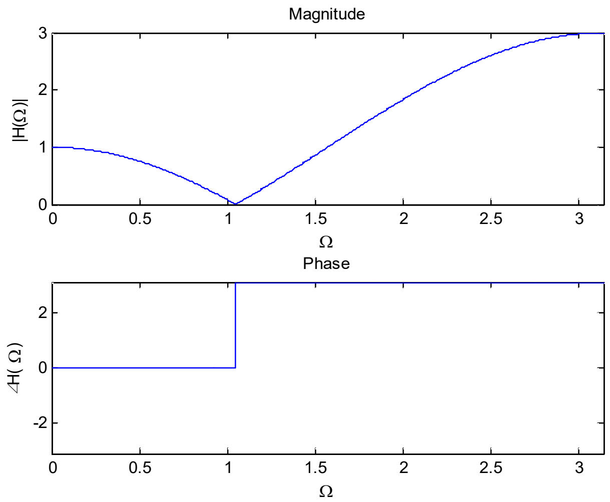
(b) $y[n]=\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

(c) $y[n]=-\frac{1}{2}(e^{j\pi n}+e^{-j\pi n})=-\cos(\pi n)$

(d) 저역통과 필터

9.7

(a) $H(\Omega) = h[-1]e^{j\Omega} + h[0]e^{-j0} + h[1]e^{-j\Omega} = -1 + 2\cos\Omega$



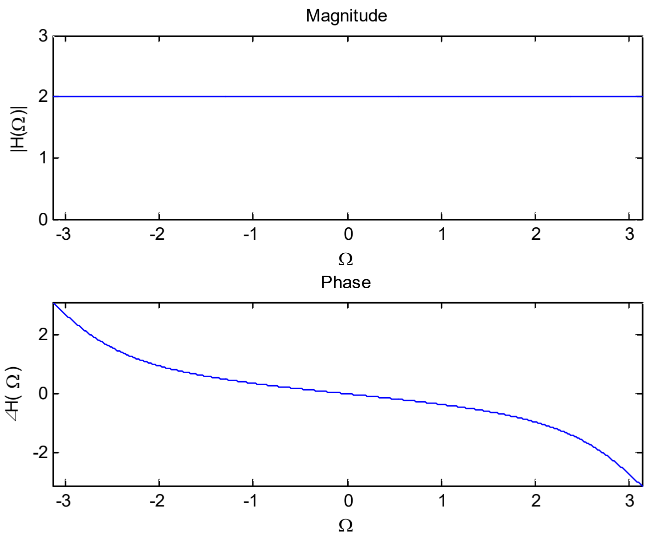
(b) $y[n] = 0$

(c) $y[n] = -\dfrac{3}{2}(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) = -3\cos(\pi n)$

(d) 고역통과 필터

9.8

(a) $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \left.\dfrac{z+2}{z+0.5}\right|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{j\Omega}+2}{e^{j\Omega}+0.5}$



(b) $y[n] = \left(e^{j(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}0.75)} + e^{-j(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}0.75)}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n - \tan^{-1}0.75\right)$

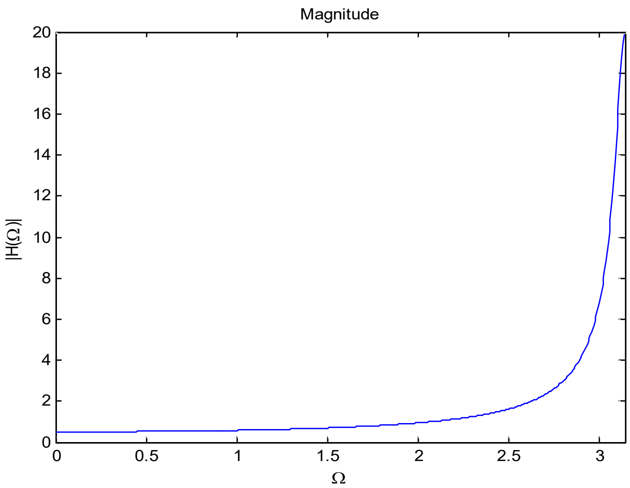
(c) $y[n] = -(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) = -2\cos(\pi n) = 2\cos(\pi n - \pi)$

(d) 전역 통과 필터

9.9

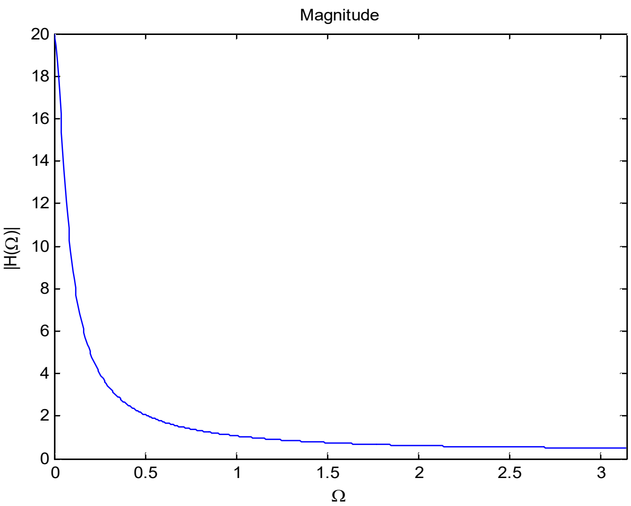
(a) $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{1}{1+0.95e^{-j\Omega}}$

저주파에서 이득이 매우 작고 고주파에서 큰 이득을 가지므로 고역통과 필터이다.



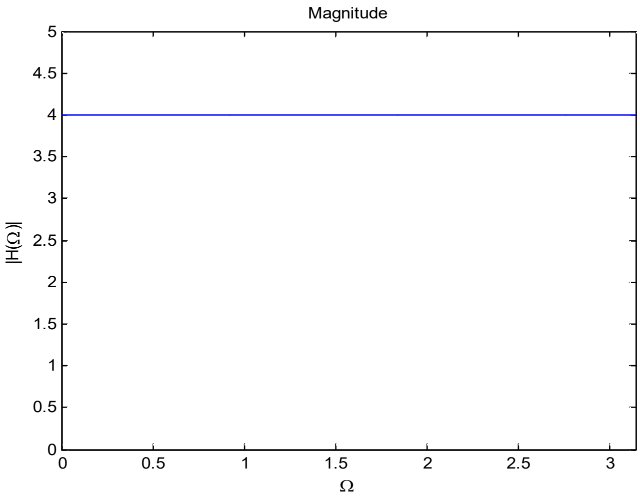
(b) $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{-j\Omega}}{1-0.95e^{-j\Omega}}$

저주파에서 이득이 매우 크고 고주파에서 거의 0에 가까우므로 저역통과 필터이다.



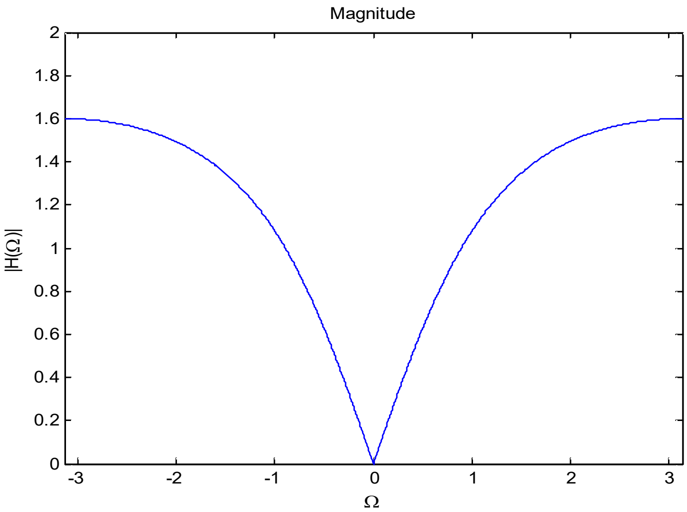
(c) $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{1-4e^{-j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}$

진폭 응답을 보면 전 주파수에서 이득이 일정하므로 전역통과 필터이다.



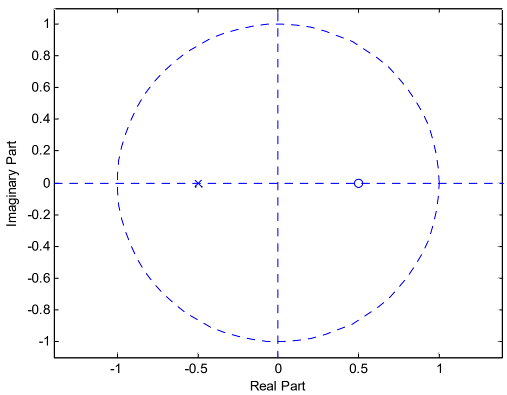
(d) $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{1-e^{-j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}$

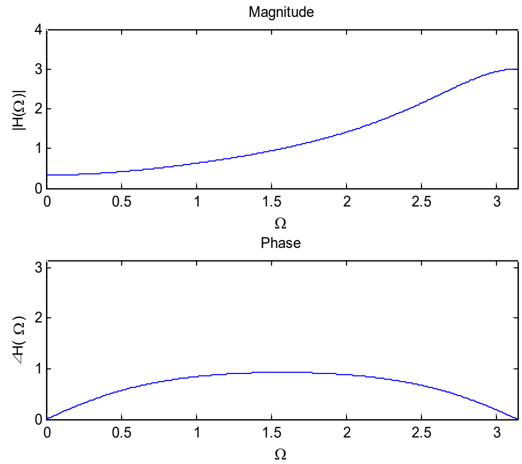
진폭 응답을 보면 $\Omega=0$에서 출력이 0인 notch 필터의 거친 근사에 가깝다. 즉 일종의 협대역 대역 저지 필터라고 할 수 있다.



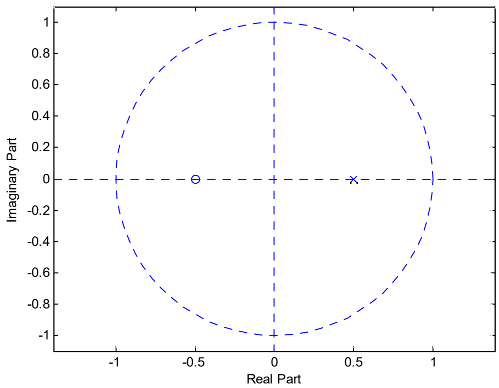
9.10

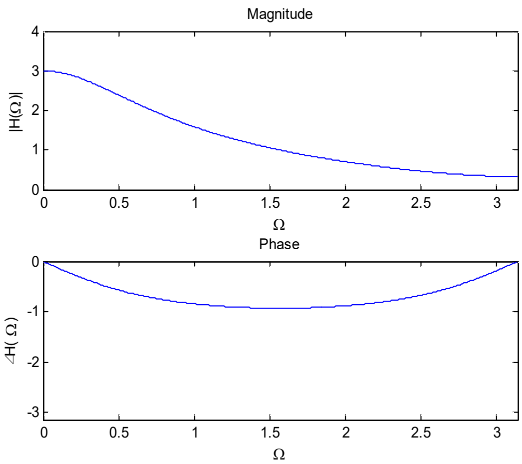
(a) 주파수 응답을 보면 일종의 고역통과 필터이다.



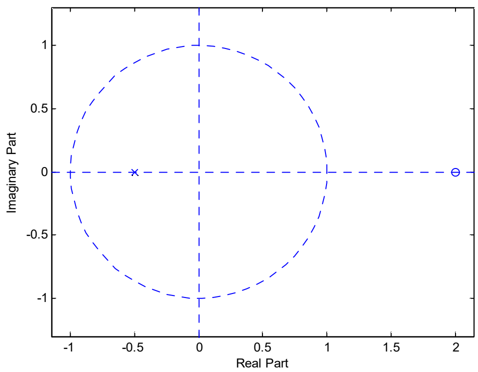


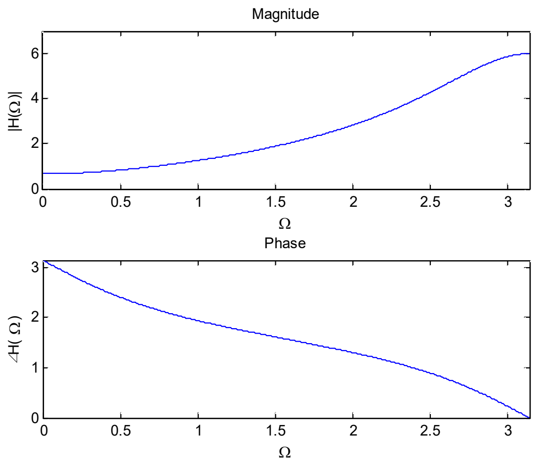
(b) 주파수 응답을 보면 일종의 저역통과 필터이다.



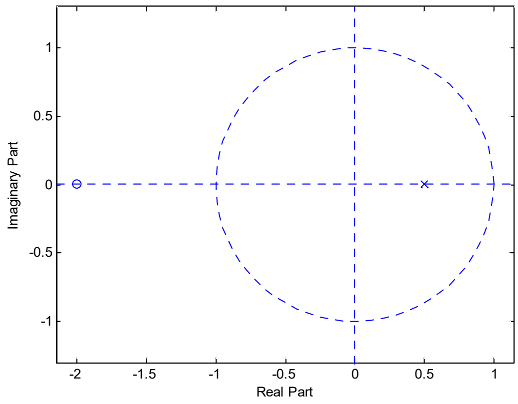


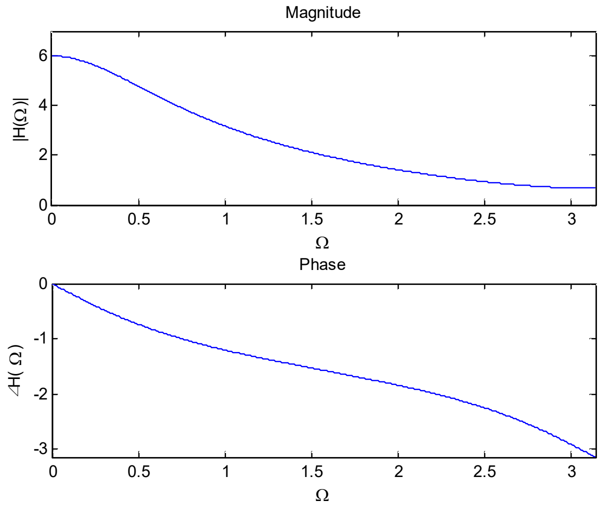
(c) 주파수 응답을 보면 일종의 고역통과 필터이다.





(d) 주파수 응답을 보면 일종의 저역통과 필터이다.





9.11

(a) $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{0.1}{1+0.9z^{-1}} = \dfrac{0.1z}{z+0.9}$

(b) $h[n] = 0.1(-0.9)^n u[n]$

(c) 안정하다.

(d) $|H(\Omega)|_{\Omega=0} = \dfrac{0.1}{1+0.9e^{j0}} = 0.0526$

$|H(\Omega)|_{\Omega=\pi} = \dfrac{0.1}{1+0.9e^{-j\pi}} = 1$

(e) 고역통과 필터

9.12

(a) $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{0.4}{(1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2})} = \dfrac{0.4z^2}{z^2-0.7z+0.1}$

(b) $h[n] = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \dfrac{4}{15}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n u[n]$

(c) 안정하다.

(d) $|H(\Omega)|_{\Omega=0} = \dfrac{0.4}{1-0.7e^{-j0}+0.1e^{-j2\cdot 0}} = \dfrac{0.4}{1-0.7+0.1} = 1$

$|H(\Omega)|_{\Omega=\pi} = \dfrac{0.4}{1-0.7e^{-j\pi}+0.1e^{-j2\pi}} = \dfrac{0.4}{1+0.7+0.1} = \dfrac{2}{9}$

(e) 저역통과 필터

9.13

(a) 아니다.
선형 위상의 조건은 위상지연과 군지연이 일치하여 출력 파형의 왜곡이 없게 하는 것이다.

(b) 거의 대부분의 FIR 필터는 선형 위상이지만 엄격히 말해 모든 가능한 FIR 필터가 선형 위상인 것은 아니다. 예를 들어 임펄스 응답이 $h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]+4\delta[n-3]+5\delta[n-4]$와 같은 경우는 대칭성을 만족하지 않으므로 주파수 응답을 그려보면 위상 응답이 정확히 선형이지는 않다.

(c) 맞다. 임펄스 응답의 길이가 무한하여 순환 필터로만 구현이 가능하며 따라서 임펄스 응답의 대칭성을 만족시킬 수 없다.

(d) 맞다. 임펄스 응답이 우함수 대칭인 1, 2형 선형 위상 FIR 필터는 $z=1$의 영점의 개수가 짝수이다.

(e) 맞다. 3형과 4형의 선형 위상 FIR 필터의 경우이다.

(f) 맞다. 시스템을 종속 연결하면 위상 응답은 더하기가 되므로 그대로 선형 위상이 된다.

(g) 아니다. 시스템을 병렬 연결하면 전달 함수나 주파수 응답은 더해진다. 따라서 종속 연결의 경우와 같이 각 시스템의 위상을 더한 것이 전체 시스템의 위상이 되지 않으므로 선형 위상이 보장되지 않는다.

9.14

(a) $H(z)=\dfrac{(3z+1)}{(2z-1)}=\dfrac{3\left(z+\dfrac{1}{3}\right)}{2\left(z-\dfrac{1}{2}\right)}=1.5\dfrac{\left(z+\dfrac{1}{3}\right)}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)}$

(b) $H(z)=\dfrac{(z+1)}{(5z+1)}=0.2\dfrac{z+1}{z+0.2}$

9.15

(a) FIR 필터
(b) IIR 필터
(c) FIR 필터
(d) IIR 필터

9.16

(a) $-1<a<1$
(b) $a=0$ & $b=\pm 1$
(c) $-1\le a\le 1$, $-1\le b\le 1$
(d) $b=-1/a$

9.17

(a) $H(z)=\dfrac{z+0.5}{z}$

전달함수의 분자의 차수와 분모의 차수보다 크지 않으므로 인과적이며, 극이 단위원 안에 있어 안정이며, 영점 또한 단위원 안에 존재하므로 최소위상 특성을 만족한다.

(b) $H(z)=\dfrac{z+0.5}{z-0.5}$

이 필터 또한 전달함수의 분자의 차수와 분모의 차수보다 크지 않으므로 인과적이며, 극이 단위원 안에 있어 안정이며, 영점 또한 단위원 안에 존재하므로 최소위상 특성을 만족한다.

(c) $H(z)=\dfrac{z}{z+0.5}\dfrac{z-0.5}{z+0.5}=\dfrac{z(z-0.5)}{(z+0.5)^2}$

이 필터 또한 전달함수의 분모와 분자의 차수가 같으므로 인과적이며, 극과 영점 모두 단위원 안에 존재하여 안정적이고 최소위상 특성을 만족한다.

(d) $H(z)=\dfrac{z}{z+0.5}+\dfrac{z-0.5}{z+0.5}=\dfrac{2z-0.5}{z+0.5}=2\cdot\dfrac{z-0.25}{z+0.5}$가 된다.

이 필터 또한 전달함수의 분모와 분자의 차수가 같으므로 인과적이며, 극과 영점 모두 단위원 안에 존재하여 안정적이고 최소위상 특성을 만족한다.

9.18 차단 주파수는 $\dfrac{\pi}{2}$

$$G(\Omega)=\begin{cases}0.5, & |\Omega|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |\Omega|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

9.19 차단 주파수 $\Omega_c=\dfrac{\pi}{2}$

$$G(\Omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |\Omega|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |\Omega|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

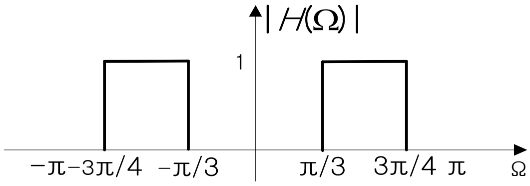
9.20

(a) $g[n]$은 $\pi-\Omega_c<\Omega\le\pi$의 통과대역을 갖는, 차단 주파수 Ω_c인 고역통과 필터의 임펄스 응답이다.

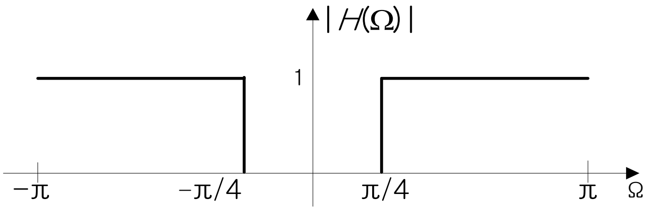
(b) $y[n]=\sum_{k=1}^{p}(-1)^k a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{q}(-1)^k b_k x[n-k]$

[응용 문제]

9.21 종속 연결된 시스템의 통과대역은 $\frac{\pi}{3} \le |\Omega| \le \frac{3}{4}\pi$ 가 된다. 즉, 다음의 그림과 같다.

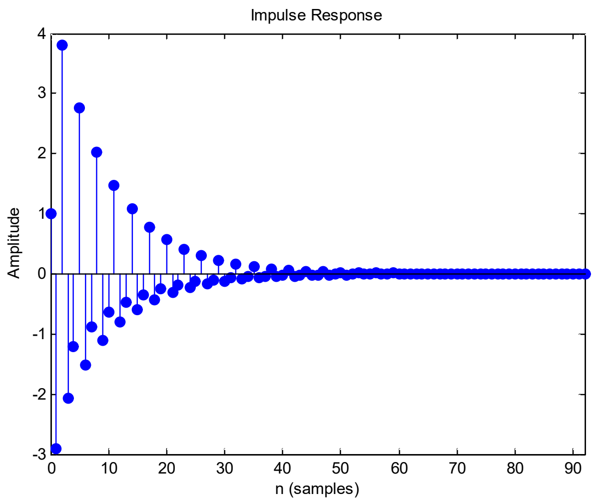


병렬 연결된 시스템의 통과대역은 $|\Omega| > \frac{\pi}{4}$가 된다. 즉, 다음의 그림과 같다.



9.22 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3 + 0.9z^2 + 0.81z} = \dfrac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$

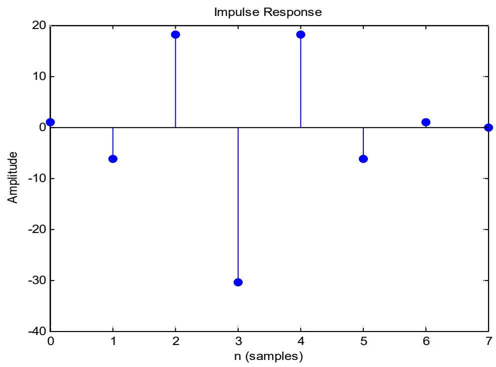
$h[n] = -0.9h[n-1] - 0.81h[n-2] + \delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$

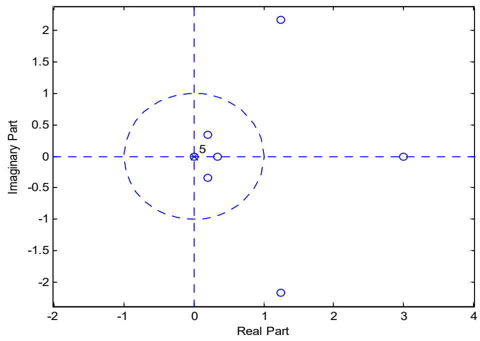


9.23 $b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$

9.24 $H_I(z) = \dfrac{X(z)}{Y(z)} = H^{-1}(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-n_d} + \frac{1}{4}z^{-2n_d}}$

9.25 $H(z) = \dfrac{(z^2 - 0.4z + 0.16)(0.16z^2 - 0.4z + 1)(z-3)(z - \frac{1}{3})}{0.16z^6}$

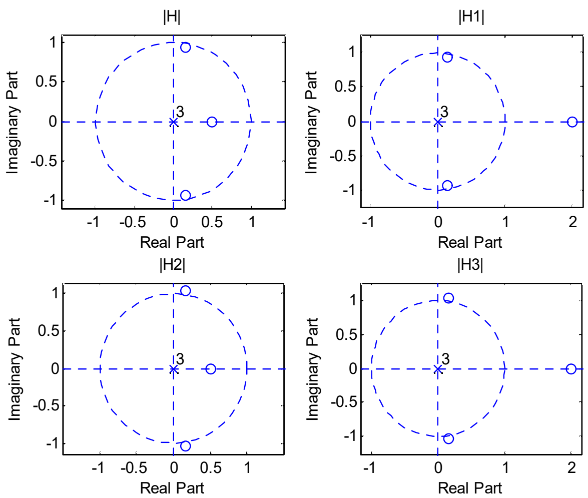


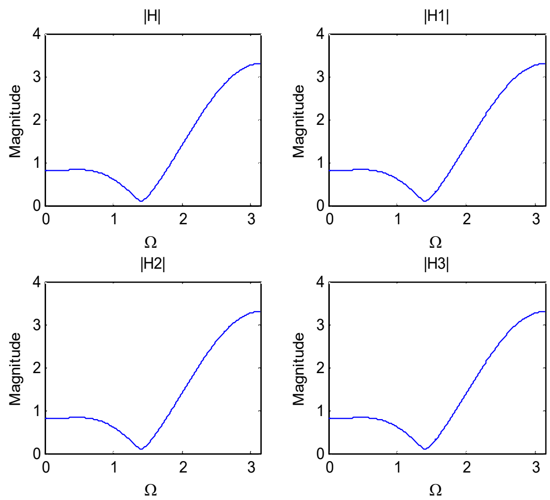


9.26 $H_1(z) = (1 - 0.3z^{-1} + 0.9z^{-2})(0.5 - z^{-1})$

$H_2(z) = (0.9 - 0.3z^{-1} + z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})$

$H_3(z) = (0.9 - 0.3z^{-1} + z^{-2})(0.5 - z^{-1})$





9.27

(a) $H(z)H(z^{-1})$를 구성해서 공액 역 쌍으로 분포하는 극 중에 단위원 안에 존재하는 안정한 극을 취하여 전달함수를 구성하면 된다.

$$H_1(z) = \frac{1}{4}\,\frac{z+3}{2z-1}$$

(b) (a)에서 구한 $H(z)H(z^{-1})$에서 극과 영점 모두 단위원 안에 있는 것을 택하여 전달함수를 구성하면 된다. 따라서 새로운 전달함수는 다음과 같다.

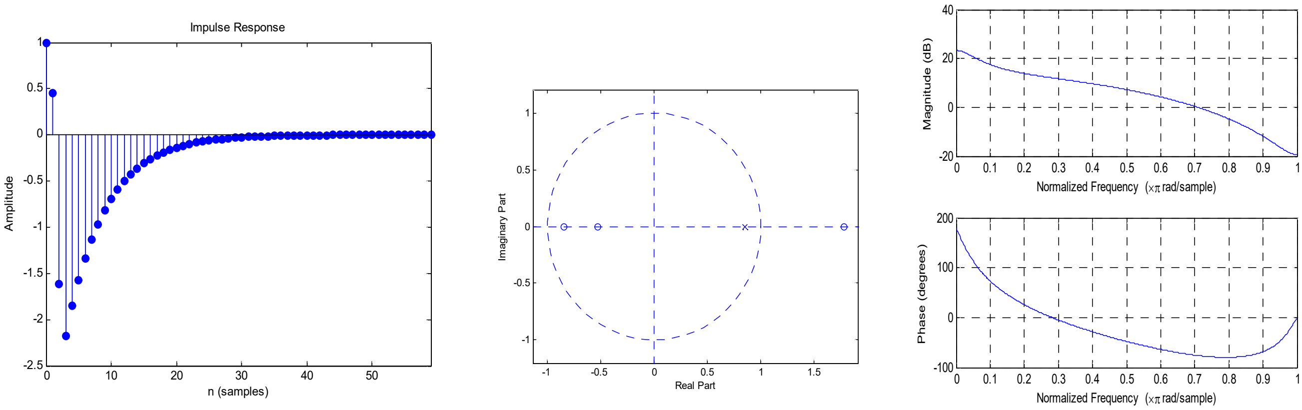
$$H_2(z) = \frac{1}{4}\,\frac{3z+1}{2z-1}$$

9.28 $(1-2z^{-2})$의 항 때문에 최소 위상 필터가 되지 않으므로 이 항을 이용하여 전역통과 필터를 만들면

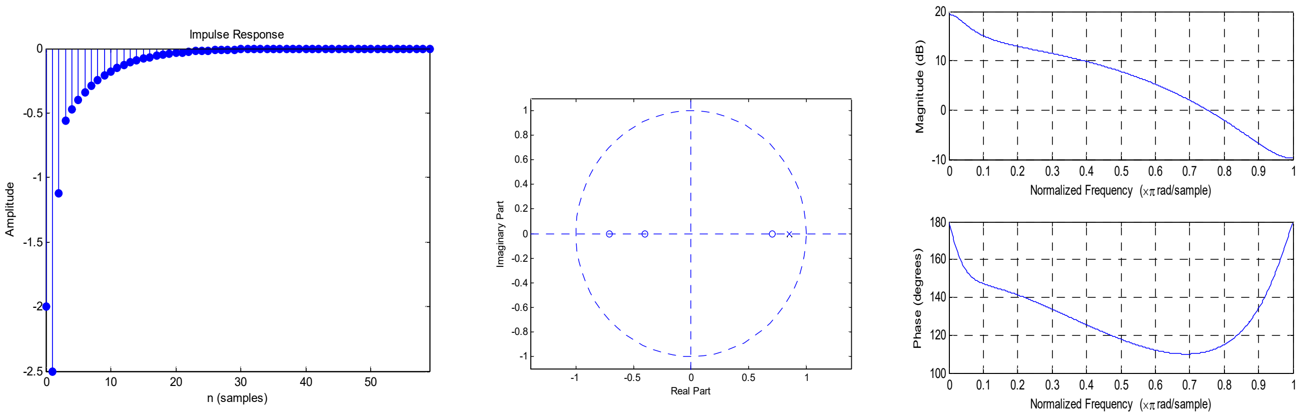
$$1-2z^{-2}=(1-2z^{-2})\frac{z^{-2}-2}{z^{-2}-2}=\frac{1-2z^{-2}}{z^{-2}-2}(z^{-2}-2)$$

따라서 $H(z)=H_{\min}(z)H_{ap}(z)$의 형태로 전달함수를 최종적으로 정리하면 다음과 같다.

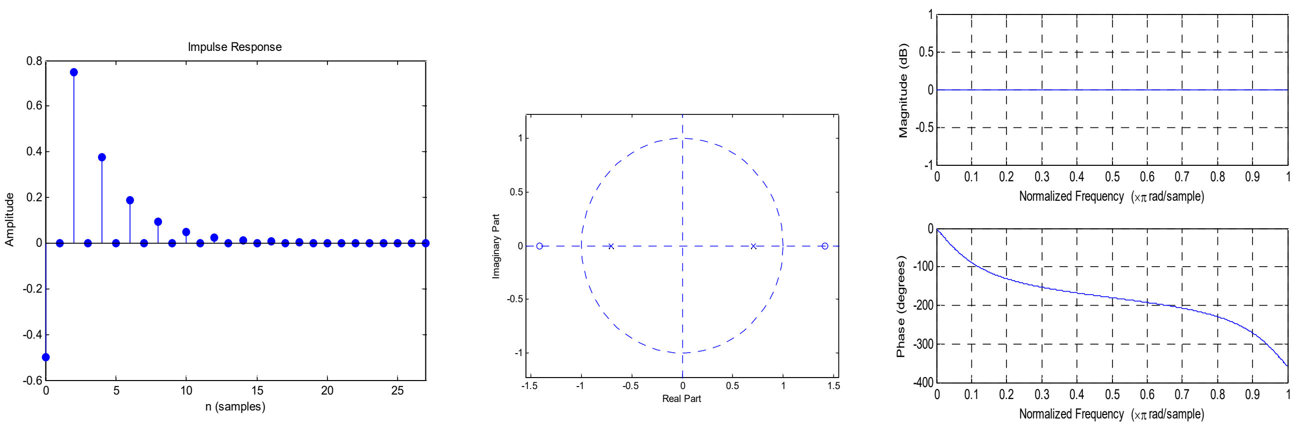
$$H(z)=\frac{(1+0.4z^{-1})(z^{-2}-2)}{1-0.85z^{-1}}\cdot\frac{1-2z^{-2}}{z^{-2}-2}$$



[문제에 주어진 원래 필터의 임펄스 응답, 극-영점, 주파수 응답]



[최소 위상 필터의 임펄스 응답, 극-영점, 주파수 응답]



[전역 통과 필터의 임펄스 응답, 극-영점, 주파수 응답]