Chapter 07 이산 및 고속 푸리에 변환

[Quick Review]

(1) 주기

(2) ×

(3) 같다

(4) 단위원

(5)×

(6) 시간-대역폭, 두

(7) ○

(8) ○

(9) ○

(10) ×

(11) ×

(12) ○

(13) ○

(14) N

(15) $N_1 + N_2 - 1$

(16) 시분할

(17) ○

(18) q, $N/2$

(19) 12

(20) ○

[기초 문제]

7.1 ㉰, ㉱

7.2 ㉱, ㉲, ㉳

7.3 ㉯

7.4 ㉰

7.5 ㉯

7.6

(a) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = 1, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$

(b) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = W_N^{n_0 k}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$

(c) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \dfrac{1-a^N}{1-a W_N^k}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$

(d) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \begin{cases} \frac{9}{2}N, & k=0 \\ \frac{1}{4}N, & k=2,\ N-2(-2) \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$

$\left(\because \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \right)$

7.7

(a) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X[k] W_N^{-kn} = [\check{\frac{1}{4}},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}]$

(b) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X[k] W_N^{-kn} = [\check{1},\ 0,\ 0,\ 0]$

(c) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X[k] W_N^{-kn} = [\check{0},\ 0,\ 1,\ 0]$

(d) $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X[k] W_N^{-kn} = [\check{0},\ 1,\ 0,\ 1]$

(e) $x[n] = [\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}),\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}),\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}),\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1+\sqrt{2})]$

(f) $x[n] = \frac{1}{5} + \delta[n] = [\frac{6}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5}]$

7.8 $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X[k] W_N^{-kn} = [\check{2},\ 8,\ 8,\ 2]$

7.9

(a) $x_3[n]$

(b) $x_2[n]$

(c) $x_1[n]$, $x_2[n]$

(d) $k=2$: $x[0]+x[4]=x[2]+x[6]$, $x[1]+x[5]=x[3]+x[7]$을 만족하면 $X[2]=0$

$X[k]$는 $N/2=4$에 대해 대칭성을 만족해야 하므로 $k=6$일 때도 $X[6]=0$ 조건은 같다.

$k=4$: $x[0]+x[2]+x[4]+x[6]=x[1]+x[3]+x[5]+x[7]$을 만족하면 $X[4]=0$

$\therefore\ x_3[n]$

7.10

(a) $x[0]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=<N>}X[k]=\dfrac{1}{3}$

(b) $x[0]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=<N>}X[k]=\dfrac{10}{9}$

(c) $x[0]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=<N>}X[k]=\dfrac{3}{8}$

7.11

(a) $X[0]=\displaystyle\sum_{n=0}^{7}x[n]=-4$

(b) $X[4]=\displaystyle\sum_{n=0}^{7}(-1)^n x[n]=36$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}X[k]=8x[0]=8$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}(-1)^k X[k]=8x[4]=40$

7.12

(a) $X[k]=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}=1+2(-1)^k=[3,\ -1,\ 3,\ -1,\ 3,\ -1,\ 3,\ -1]$

(b) $y[n]=x[n-2]=\delta[n-2]+2\delta[n-6]$

7.13

(a) $Y[k]=[6,\ 0,\ -2,\ 0,\ 6,\ 0,\ -2,\ 0]$

(b) $Y[k]=[X[k],\ X[k]]=[3,\ -1,\ 3,\ -1,\ 3,\ -1,\ 3,\ -1]$

(c) $Y[k]=X[k\pm\dfrac{N}{2}]=[3,\ -1,\ 3,\ -1]$

7.14 $X'[k]=\sum_{n=0}^{11} x'[n]\,W_{12}^{kn}=2(1+W_3^k+W_3^{2k})(1-W_6^k)=\begin{cases}12, & k=3,\ 9\\ 0, & 0\leqq k\leqq 11,\ k\neq 3,\ 9\end{cases}$

7.15 $x(t)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos(2000\pi t)+\frac{1}{4}\cos(4000\pi t)$

7.16

(a) 256[Hz]

(b) $f_{\max}=256$[Hz]

(c) $\triangle f=\frac{256}{256}=1Hz$

(d) $f_b=128$[Hz]

7.17

(a) $X[k]=[4,\ -1+j,\ 2,\ -1-j]$

(b) $y[n]=[\breve{5},\ 4,\ 5,\ 2]$

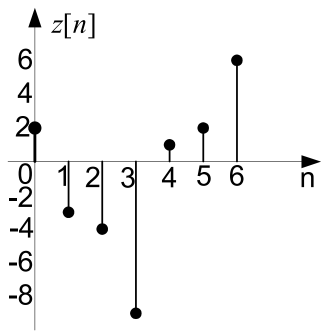
(c) $y[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} Y[k]\,W_N^{-kn}=[\breve{5},\ 4,\ 5,\ 2]$

(d) $z[n]=[\breve{2},\ 0,\ 4,\ 2,\ 4,\ 4]$

7.18

(a) $z[n]=x[n]*y[n]=\sum_{k=0}^{3} x[n-k]y[k]$

	n \ k	0	1	2	3	
$y[k]$		-2	-1	0	2	$z[n]$
$x[n-k]$	0	-1				2
	1	2	-1			-3
	2	1	2	-1		-4
	3	3	1	2	-1	-9
	4		3	1	2	1
	5			3	1	2
	6				3	6



(b) $s[n]=[\breve{3},\ -1,\ 2,\ -9]$

(c) $x'[n]=[-1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0]$ & $y'[n]=[-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]$

$s'[n]=x'[n]\circledast y'[n]=[\breve{2},\ -3,\ -4,\ -9,\ 1,\ 2,\ 6]$

(a)의 결과와 (c)의 결과는 같다. 즉, $s'[n]=z[n]$

7.19

(a) $y[n]=y_0{}'[n]+y_1{}'[n-2]+y_2{}'[n-4]+y_3{}'[n-6]+y_4{}'[n-8]=[1,\ 3,\ 6,\ 9,\ 10,\ 9,\ 6,\ 3,\ 1]$

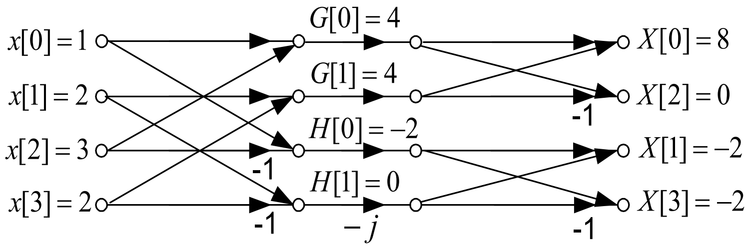
(b) $y[n]=y_0[n]+y_1[n-2]+y_2[n-4]+y_3[n-6]=[1,\ 0,\ 2,\ 2,\ -1,\ 4,\ 1,\ 2,\ -1,\ 3]$

(c) $y[n]=y_0[n]+y_1[n-2]+y_2[n-4]=[1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 9,\ 5]$

7.20

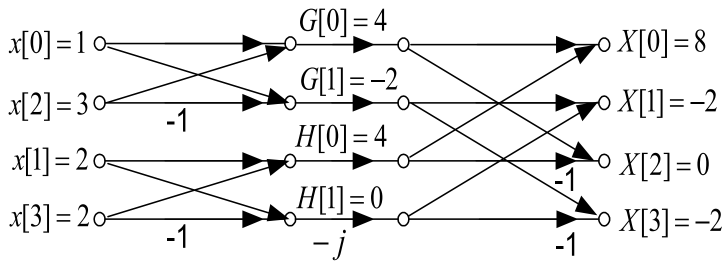
(a) (1) 밑수 2 주파수 분할 역비트순 FFT

$X[k]=[8,\ -2,0,\ -2]$



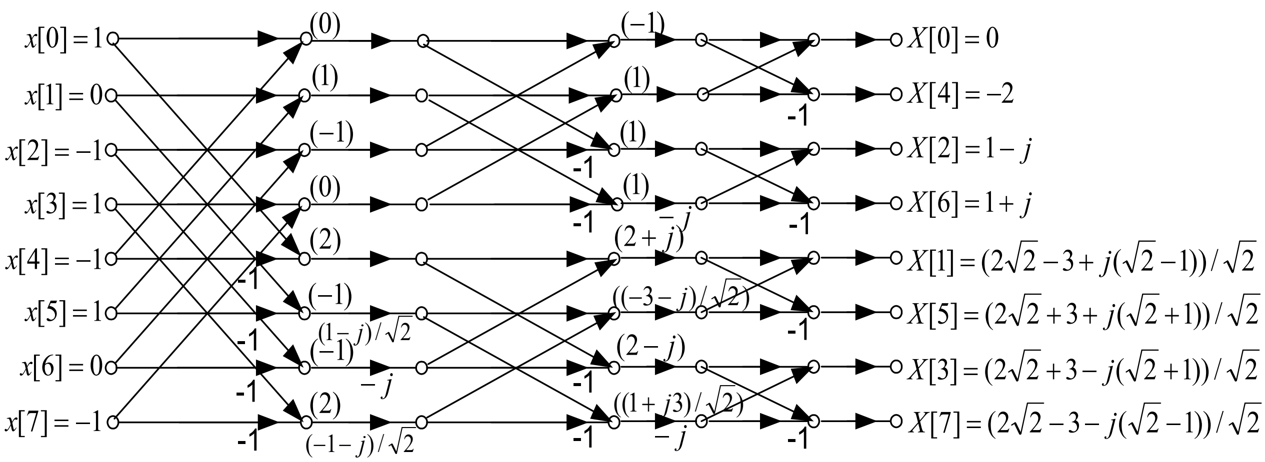
(2) 밑수 2 시분할 역 비트순 FFT

$X[k]=[8,\ -2,0,\ -2]$



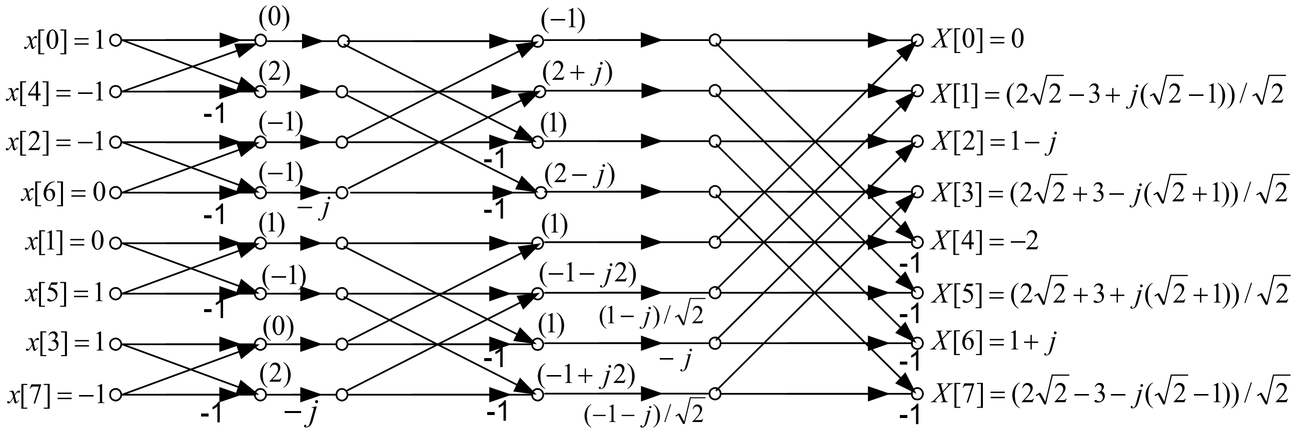
(b) (1) 밑수 2 주파수 분할 역 비트순 FFT

$$X[k]=[0,\frac{4-3\sqrt{2}}{2}+j\frac{2-\sqrt{2}}{2},1-j,\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2}-j\frac{2+\sqrt{2}}{2},$$
$$-2,\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2}+j\frac{2+\sqrt{2}}{2},1+j,\ \frac{4-3\sqrt{2}}{2}-j\frac{2-\sqrt{2}}{2}]$$



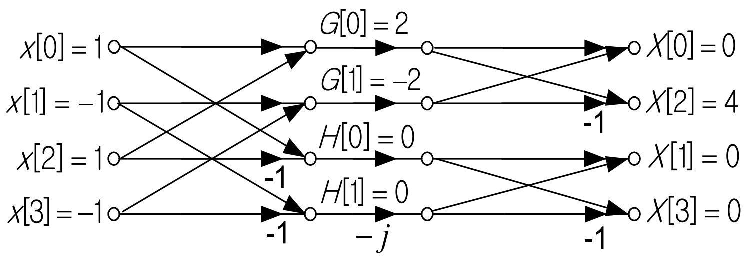
(2) 밑수 2 시분할 역 비트순 FFT

$$X[k] = [0, \frac{4-3\sqrt{2}}{2} + j\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1-j, \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - j\frac{2+\sqrt{2}}{2},$$
$$-2, \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + j\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 1+j, \frac{4-3\sqrt{2}}{2} - j\frac{2-\sqrt{2}}{2}]$$



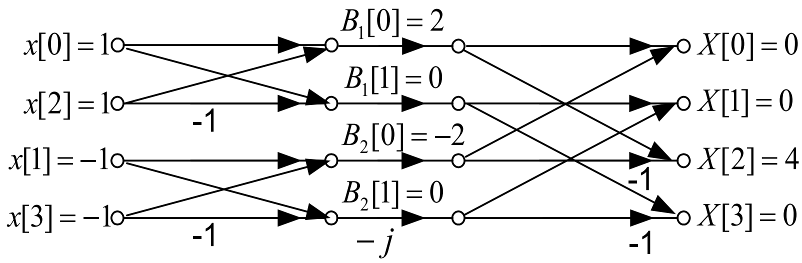
(c) (1) 밑수 2 주파수 분할 역 비트순 FFT

$X[k] = [0, 0, 4, 0]$



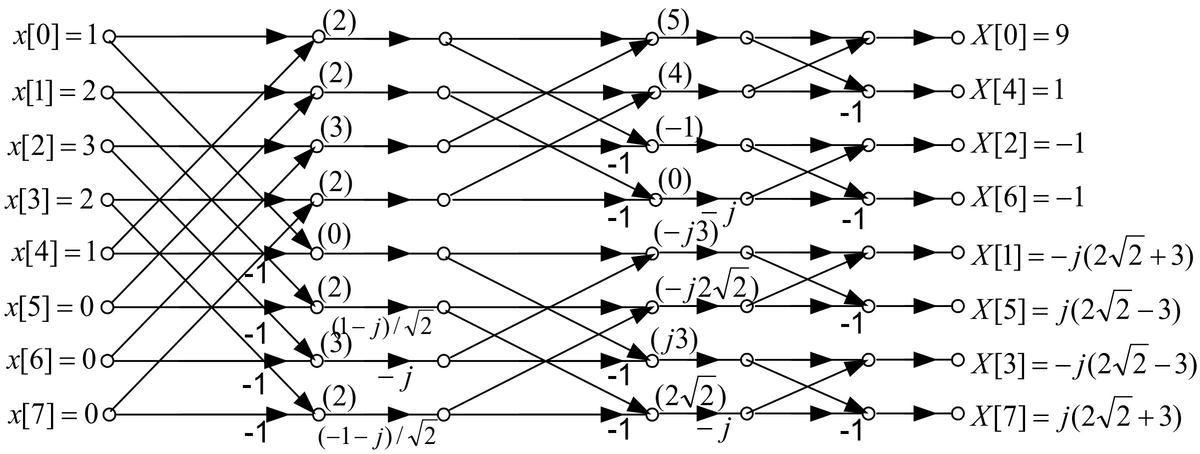
(2) 밑수 2 시분할 역 비트순 FFT

$X[k] = [0, 0, 4, 0]$



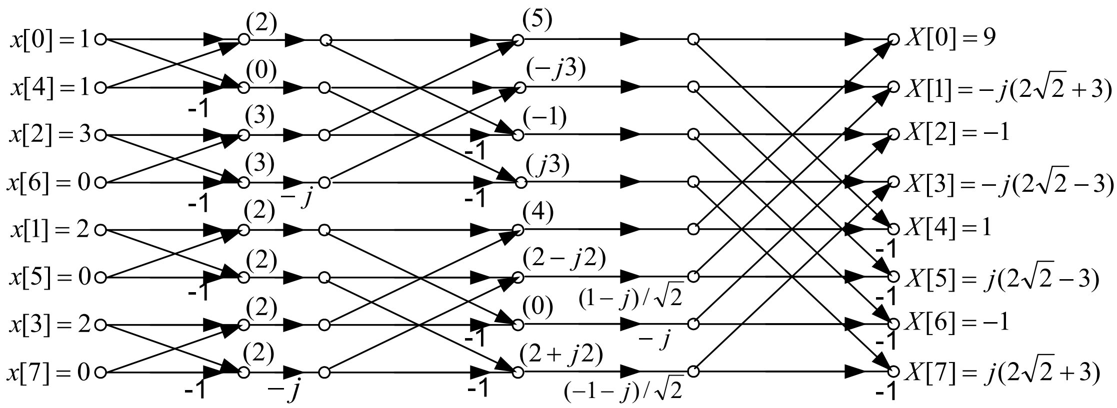
(d) (1) 밑수 2 주파수 분할 역 비트순 FFT

$$X[k] = [9,\ -j(3+2\sqrt{2}),\ -1,\ j(3-2\sqrt{2}),\ 1,\ -j(3-2\sqrt{2}),\ -1,\ j(3+2\sqrt{2})]$$



(2) 밑수 2 시분할 역 비트순 FFT

$$X[k] = [9,\ -j(3+2\sqrt{2}),\ -1,\ j(3-2\sqrt{2}),\ 1,\ -j(3-2\sqrt{2}),\ -1,\ j(3+2\sqrt{2})]$$



[응용 문제]

7.21

(a) $Y[k]=[1,\ -3,\ 2,\ -4]$

(b) $Y[k]=[3,\ 6+j3,\ 2,\ 8-j4]$

(c) $Y[k]=[1,\ 4,\ 2,\ 3]$

(d) $Y[k]=[1,\ 4,\ 2,\ 3]$

(e) $Y[k]=\left[\frac{29}{4},\ \frac{22}{4},\ \frac{29}{4},\ \frac{20}{4}\right]$

(f) $Y[K]\ =\ X[k]X[k]\ =\ [1,\ 9,\ 4,\ 16]$

7.22

(a) 1주기 4샘플 : $m=1,\ N=4$

$$X[k]=NX_k==\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{6}}, & k=1 \\ e^{j\frac{\pi}{6}}, & k=3 \\ 0, & k=0,\ 2 \end{cases}$$

(b) 1주기 8샘플 : $m=1,\ N=8$

$$X[k]=NX_k==\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{6}}, & k=1 \\ e^{j\frac{\pi}{6}}, & k=7 \\ 0, & k=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \end{cases}$$

(c) 2주기 6샘플 : $m=2,\ N=6$

$$X[k]=NX_k==\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{6}}, & k=2 \\ e^{j\frac{\pi}{6}}, & k=4 \\ 0, & k=0,\ 1,\ 3,\ 5 \end{cases}$$

(d) 2주기 8샘플 : $m=2,\ N=8$

$$X[k]=NX_k==\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{6}}, & k=2 \\ e^{j\frac{\pi}{6}}, & k=6 \\ 0, & k=0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7 \end{cases}$$

7.23

(a) $f_s \geqq 2f_c=20\,[\mathrm{kHz}]$

(b) $N=\dfrac{f_s}{\triangle f}=2\times10^5$

(c) $N=2^q \quad \rightarrow \quad N=2^{18}=262{,}144$

(d) $t_s \leqq N\times\dfrac{1}{f_s}=13.1072$

7.24 $w[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}W_N^{-n} - \frac{1}{4}W_N^{n}$

$$x[n]w[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{4}W_N^{-n}x[n] - \frac{1}{4}W_N^{n}x[n]$$

$$W_N^{k_0 n}x[n] \Leftrightarrow X[k+k_0]$$

$$\therefore\ x[n]w[n] \Leftrightarrow \frac{1}{2}X[k] - \frac{1}{4}X[k-1] - \frac{1}{4}X[k+1]$$

7.25

(a) $k=150$: $f_k = 20000\frac{150}{1000} = 3000$ [Hz]=3 [kHz]

$k=800$: $f_k = 20000\frac{800}{1000} = 16000$ [Hz]=16 [kHz]

이는 신호의 주파수가 10[kHz]로 대역 제한되어 있다는 조건에 어긋난다. $X[k] = X[N-k]$이므로

$N-k=200$: $f_k = 20000\frac{200}{1000} = 4000$ [Hz]=4 [kHz]

(b) 디지털 주파수 해상도는

$$\triangle F = \frac{1}{N} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

아날로그 주파수 해상도는

$$\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{20000}{1000} = 20\,[\text{Hz}]$$

7.26

(a) $x(t)$의 두 정현파 성분 주파수 : $f_1 = 15$ [Hz], $f_2 = 50$ [Hz]

$$x[n] = \cos(0.3\pi n) + \sin(\pi n) = \cos(0.3\pi n)$$

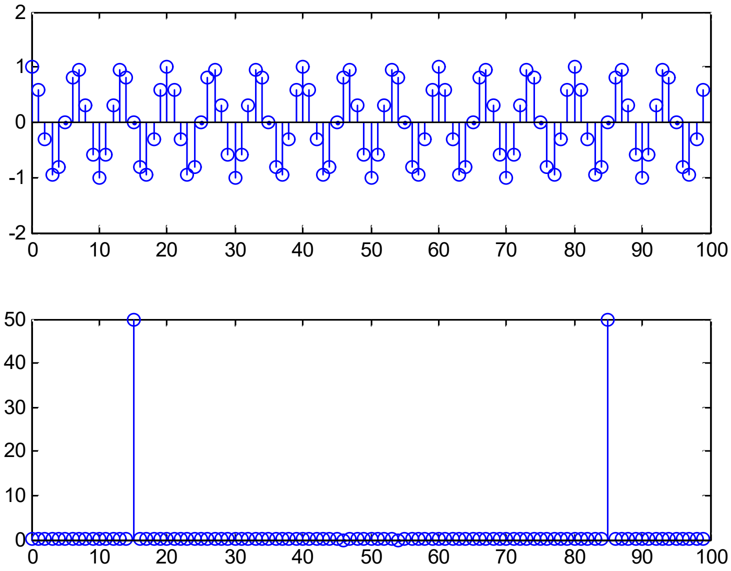
이 샘플링 주파수의 경우에는 $f_2 = 50$ [Hz]에 해당하는 성분은 이산 신호에 나타나지 않는다.

DFT의 주파수 해상도는

$$\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{100}{100} = 1$$

가 되고, 이의 정수배인 주파수들이 샘플 스펙트럼에 상응하는 아날로그 주파수가 될 것이다. 따라서 이 경우는 DFT로 구한 스펙트럼의 첨두가 실제 신호의 스펙트럼 첨두와 일치하게 된다. $f_1 = 15$ [Hz]에 해당하는 k는 $k=15$와 $k' = N-k = 100-15 = 85$이다.

매트랩으로 구한 스펙트럼 그림에서도 이를 확인할 수 있다.



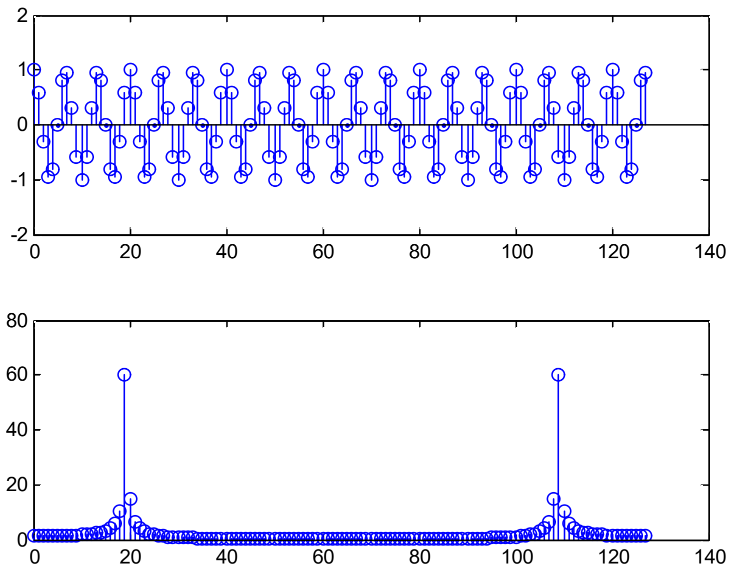
(b) DFT의 주파수 해상도는

$$\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{100}{128}$$

가 되고, 이의 정수배인 주파수들이 샘플 스펙트럼에 상응하는 아날로그 주파수가 될 것이다.
그런데 $k \triangle f = f_1$을 만족하는 k는 다음과 같이 정수가 아니다.

$$k = \frac{f_1}{\triangle f} = \frac{15 \times 128}{100} = \frac{1920}{100} = 19.2$$

따라서 이 경우는 DFT로 구한 스펙트럼의 첨두가 실제 신호의 스펙트럼 첨두와 일치하지 않는다. 매트랩으로 구한 스펙트럼 그림에서 보면 $k = 19$와 $k' = N - k = 128 - 19 = 109$에서 첨두가 발생한다.



7.27

(a) $N = 2t_s f_b = 2 \times 1 \times 100 = 200$, $\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{200}{200} = 1\,[\text{Hz}]$

(b) 200개

(c) $N = 2^q \geqq 400 \quad \rightarrow \quad \therefore\ N = 512$

이산 데이터는 200개뿐이므로 312개의 영 채우기를 해야 한다. 이미 (b)에서 200개의 영 채우기가 이루어져 있는 경우라면 112개의 영 채우기를 추가하면 된다.

7.28 $\Delta\Omega = \frac{15\pi}{16} - \frac{7\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$

$N_s : 128 = 2\pi : 0.5\pi \quad \rightarrow \quad N_s = 512$

주어진 N 값에 대해 N_s만큼의 샘플 스펙트럼을 얻으려면 다음과 같은 과정을 거쳐야 한다.

(a) N이 N_s보다 적으므로 따라서 392개의 0을 추가하여 데이터 수를 512로 맞춘다.

(b) N이 N_s보다 많으므로 남는 샘플을 버려야 한다. 먼저 영 채우기 과정을 거쳐서 샘플 수를 N_s의 배수로 맞춘다. 따라서 24개의 0을 추가하여 개수를 맞추면 $N = 1024$가 된다. 그리고 N_s/N배로 솎음 과정을 거치면 512개의 샘플을 얻을 수 있다.

7.29

(a) $f_b \leqq \frac{1}{2} f_s = 2048\,[\text{Hz}]$

(b) $\triangle f = \frac{f_s}{N} = 1$

(c) 직접 DFT로 계산할 경우 4096점 DFT를 수행하므로 필요한 곱셈의 수는

$101 \times 4096 = 413,696$

밑수 2 시분할 FFT를 쓸 경우 전체 샘플 스펙트럼을 다 계산해야 한다. $N = 4096 = 2^{12}$이므로 FFT 계산에 필요한 곱셈의 수는

$\frac{N}{2} \log_2 N = 2048 \times 12 = 24,576$

따라서 FFT가 전체 샘플 스펙트럼을 다 계산함에도 불구하고 직접 DFT를 계산하는 것보다 훨씬 적은 수의 곱셈이 필요하다.

(d) $M \geqq \frac{1}{2} \log_2 N = \frac{1}{2} \log_2 2^{12} = 6$

즉 필요한 샘플 스펙트럼의 수가 6개 이상이라면 4096개의 데이터로부터 샘플 스펙트럼 값을 계산하는 데 직접 DFT를 하는 것보다 FFT를 사용하는 것이 더 효율적이다.

7.30

(a) $N \times M = 8192 \times 512 = 4,194,304$

(b) 185,344