Chapter 03 이산 시스템의 시간 영역 해석

[Quick Review]

(1) 있다
(2) FIR
(3) ○
(4) ×
(5) ×
(6) ○
(7) ×
(8) ○
(9) 곱
(10) 같은
(11) ○
(12) ×
(13) ○
(14) $n \geq 0$
(15) 특이해
(16) ○
(17) ○
(18) 동적
(19) ×
(20) 총합

[기초 문제]

3.1 ㉯

3.2 ㉰

3.3 ㉱

3.4 ㉰, ㉳

3.5 ㉯, ㉱

3.6

(a) $h[n] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$

(b) $h[n] = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad n \geq 0$

3.7

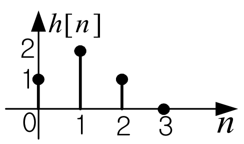
(a) $h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

(b) $y[n] = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$

(c) $y[n] = [\check{2},\ 5,\ ,0,\ -1] = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$

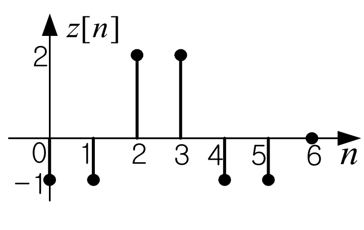
3.8

(a) 임펄스 응답 $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

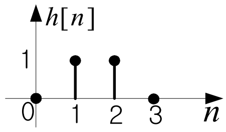


입력 $x[n]$에 대한 출력 $z[n]$

	$n \backslash k$	0	1	2	3	
$s[k]$		-1	1	1	-1	$z[n]$
$h[n-k]$	0	1				-1
	1	2	1			-1
	2	1	2	1		2
	3		1	2	1	2
	4			1	2	-1
	5				1	-1

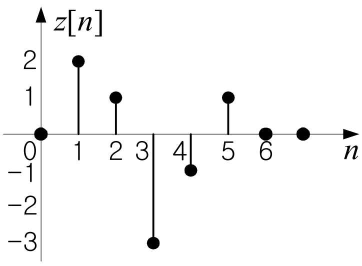


(b) 임펄스 응답 $h[n]=\delta[n-1]+\delta[n-2]$



입력 $x[n]$에 대한 출력 $z[n]$

	$n \setminus k$	0	1	2	3	
$v[k]$		2	-1	-2	1	$z[n]$
$h[n-k]$	1	1				2
	2	1	1			1
	3		1	1		-3
	4			1	1	-1
	5				1	1



3.9

(a) $h[n]=[\check{1},\ -2,\ 3]$

(b) $h[n]=[\check{1},\ 2,\ 2,\ 3]$

(c) $h[n]=[\overset{\smile}{0.5},\ 0.5]$

3.10

(a) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]\delta[n-k] = u[n]$

(b) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = n\,u[n]$

(c) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = (n-2)u[n-3] = (n-2)u[n-2]$

(d) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \begin{cases} n+1, & 0 \leqq n \leqq 9 \\ 10, & n \geqq 10 \end{cases}$

(e) $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \sum_{k=0}^{n} (0.5)^k = 2-(0.5)^n, \quad n \geqq 0$

(f) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = b^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{a}{b})^k$

$$= \begin{cases} (n+1)b^n, & a = b \\ b^n \dfrac{1-(\frac{a}{b})^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}, & a \neq b \end{cases}, \qquad n \geqq 0$$

3.11

(a)

	n \ k	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$x[k]$		-1	-1	-1	2	2	2	2	$y[n]$
$h[n-k]$	-5	1							-1
	-4	-1	1						0
	-3	2	-1	1					-2
	-2	0	2	-1	1				1
	-1	-2	0	2	-1	1			0
	0	2	-2	0	2	-1	1		4
	1		2	-2	0	2	-1	1	4
	2			2	-2	0	2	-1	-4
	3				2	-2	0	2	4
	4					2	-2	0	0
	5						2	-2	0
	6							2	4

(b)

	n \ k	0	1	2	3	4	5	6	
$h[k]$		1	2	0.5	-0.5	-1	-0.2	0.1	$y[n]$
$x[n-k]$	2	1							1
	3	1	1						3
	4	1	1	1					3.5
	5	1	1	1	1				3
	6	1	1	1	1	1			2
	7		1	1	1	1	1		0.8
	8			1	1	1	1	1	-1.1
	9				1	1	1	1	-1.6
	10					1	1	1	-1.1
	11						1	1	-0.1
	12							1	0.1

3.12

(a) $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) * h_4[n] = (h_2[n] + h_3[n]) * h_1[n] * h_4[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3u[n-1]$

(b) $h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] + h_4[n] = u[n-4] + a^n u[n]$

3.13

(a) $h[n] = (-2)^n u[n]$

(b) $h[n] = (-2)^{n-1} u[n-1]$

(c) $h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2(-2)^{n-2} = \frac{1}{2}(-2)^n, & n \geqq 1 \end{cases} = \delta[n] - (-2)^{n-1}u[n-1]$

(d) $h[n] = \frac{1}{2}(-3)^n u[n] - \frac{1}{2}(-3)^{n-2} u[n-2]$

3.14

(a) $h[n] = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n$

(b) $h[n] = (\frac{1}{6}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n)u[n-2]$

(c) $h[n] = \frac{1}{3}(2)^n + \frac{2}{3}(-1)^n$

(d) $h[n] = (2)^n$

이 경우는 극과 영점의 상쇄가 일어나서 특성근 $\gamma = -1$에 대응되는 시스템 모드 $(-1)^n$항이 사라졌다.

※ (a)~(d)로부터 입력 조건들이 달라질 때 시스템 출력이 어떻게 변하는지 살펴볼 수 있다.

3.15

(a) $y[n] = -\frac{1}{6}(-0.5)^n + \frac{2}{3}$

(b) $y[n] = 0.5(-0.5)^n$

(c) $y[n] = 6(-1)^n - 5(-2)^n + n(-2)^n$

(d) $y[n] = \left(\frac{1}{12}n + \frac{11}{36}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{9}$

3.16 ㉰, ㉲, ㉳, ㉵

3.17 $y[n] - 0.25y[n-2] = 2x[n]$

3.18

(a) 인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.

(b) 인과 시스템이다. 불안정한 시스템이다.

(c) 인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.

3.19

(a) $y[n] = \sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k$

(b) $y[n] = (-a)^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n}(-a)^k$

(c) $y[n] = 2\sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k$

(d) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (-a + \frac{2a}{2a+1})(-a)^n + \frac{1}{2a+1}(0.5)^n = (-a)^{n+1} + \frac{-2(-a)^{n+1} + (0.5)^n}{2a+1}$

(e) $y[n] = \sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k + (-a)^{n+1} + \frac{-2(-a)^{n+1} + (0.5)^n}{2a+1}$

(f) (a)는 입력과 초기 조건이 모두 존재하는 경우의 시스템 응답을 보여준다.
(b)와 (c)는 입력이 2배가 되더라도 초기 조건이 2배가 되지 않으면 전체적인 출력이 2배가 되지 않음을 보여준다. 다시 말해 입력과 초기 조건이 모두 2배가 되어야만 선형성의 동차성이 만족됨을 보여준다.
(e)는 서로 다른 입력이 더해져서 입력으로 인가될 때 각각의 초기 조건도 더해진 초기 조건이 되어야만 선형성의 가산성이 성립함을 보여준다.
이상의 사실로부터 만약 초기 조건이 0이 아닐 경우 시스템의 입출력 관계가 선형성을 만족하려면 입력뿐만 아니라 초기 조건도 반드시 동차성과 가산성이 만족되도록 변경되어야 함을 알 수 있다. 초기 조건에 상관없이 선형성이 항상 성립하려면 시스템이 초기 휴지 상태(initially at rest), 즉 모든 초기 조건이 0이라는 전제가 있어야 한다.

3.20

(a) 인과 시스템이다. 불안정한 시스템이다.
(b) 비인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.
(c) 인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.
(d) 비인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.
(e) 비인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.
(f) 인과 시스템이다. 안정한 시스템이다.

[응용 문제]

3.21

(a) $h[n]=\frac{1}{3}(u[n]-u[n-3])$

(b) $y[n]=\frac{1}{3}\delta[n]+\frac{2}{3}\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5]+\frac{2}{3}\delta[n-6]+\frac{1}{3}\delta[n-7]$

(c) $y[n]=[\check{\frac{1}{3}},\ \frac{2}{3},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}]$

3.22 $h[n]=(2-n)(0.5)^n u[n-1]$

3.23

(a) $y[n]=[\check{1},\ 6,\ 13,\ 20,\ 28,\ 16,\ 16]$

(b) $y[n]=[4,\ 14,\ 17,\ \check{30},\ 17,\ 14,\ 4]$

(c) $y[n]=[16,\ 16,\ 28,\ 20,\ 13,\ 6,\ \check{1}]$

이 경우는 (a)에서 $x[n]$, $h[n]$ 모두 시간 반전한 경우이므로 그 결과도 (a)의 결과의 시간 반전이다.

(d) $y[n]=[\check{1},\ 6,\ 13,\ 20,\ 28,\ 16,\ 16]$

이 경우는 (a)에서 $x[n]$과 $h[n]$을 서로 반대 방향으로 1만큼 시간 이동한 경우이므로 그 영향이 상쇄된다.

3.24

(a) $y_1[n]=[\check{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -4,\ 1,\ -5]$

(b) $y_2[n]=[\check{5},\ -1,\ 4,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1]$

(c) $y[n]=[\check{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1]$

(d) $x[n]=x_1[n]+x_2[n-5]$이므로 중첩의 원리를 적용하면

$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n]+y_2[n-5] \\ &= [\check{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -4,\ 1,\ -5]+[\check{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ -1,\ 4,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1] \\ &= [\check{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1] \end{aligned}$$

3.25

(a) $y[n]-7y[n-1]+10y[n-2]=14x[n]-85x[n-1]+111x[n-2]$

(b) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=6x[n]$

3.26

$h_1[n]=-\delta[n]+\delta[n-1]-\delta[n-2]+\delta[n-3]$

$h_2[n]=-\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]$

3.27

(a) (1) 왼쪽 그림의 경우

$$y_1[n]=4(0.5)^{2n}u[n]$$

$$h_2[n]=(0.5)^n u[n]$$

따라서 전체 시스템의 출력은

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[k]h_2[n-k]=\sum_{k=0}^{n}4(0.5)^{(n+k)}=8[(0.5)^n-(0.5)^{2n+1}]u[n]$$

(2) 오른쪽 그림의 경우

$$y_2[n]=2(n+1)(0.5)^n u[n]$$

따라서 전체 시스템의 출력은 다음과 같다.

$$y[n]=y_2^2[n]=4(n+1)^2(0.5)^{2n}u[n]$$

이 문제의 경우 시스템 1이 비선형 시스템이므로 두 부시스템의 순서를 바꾸어 종속 연결하면 출력이 달라진다.

(b) 이 경우는 시스템 1과 시스템 2 모두 선형 시스템이므로 컨벌루션의 성질로부터

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=h_2[n]*h_1[n]$$

따라서 그림의 어느 쪽으로 연결하더라도 출력은 같다.

전체 시스템의 임펄스 응답은

$$h[n]=h_2[n]*h_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_2[k]h_1[n-k]=(0.5)^n u[n]-(0.5)^{n-1}u[n-1]$$

따라서 전체 시스템의 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}y[n]&=\sum_{k=0}^{n}2((0.5)^k u[k]-(0.5)^{k-1}u[k-1])(0.5)^{(n-k)}\\&=2(n+1)(0.5)^n u[n]-2n(0.5)^{n-1}u[n-1]\end{aligned}$$

3.28

(a) $x[n]=0$일 때, $y[n]=(-2)2^n[(j)^n+(-j)^n]+2^n[(j)^{n+1}+(-j)^{n+1}]$

$x[n]=u[n]$일 때, $y[n]=\left(-\frac{8}{5}+j\frac{4}{5}\right)(j2)^n+\left(-\frac{8}{5}-j\frac{4}{5}\right)(-j2)^n+\frac{1}{5}$

(b) $x[n]=0$일 때, $y[n]=-4(-2)^n+2(-1)^n$

$x[n]=u[n]$일 때, $y[n]=-\frac{16}{6}(-2)^n+\frac{9}{6}(-1)^n+\frac{1}{6}$

(c) $x[n]=0$일 때, $y[n]=\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n-\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n$

$x[n]=u[n]$일 때, $y[n]=-\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^n+3$

(d) $x[n]=0$일 때, $y[n]=(-2n-3)(-1)^n$

$x[n]=u[n]$일 때, $y[n]=\left(-\frac{3}{2}n-\frac{9}{4}\right)(-1)^n+\frac{1}{4}$

3.29

(a) (1) $y[n] = \frac{1}{2}(-1)^n + 4(2)^n - \frac{1}{2}$

(2) $y[n] = \left[\frac{1}{2}(-1)^n + 4(2)^n\right] + \left[-\frac{1}{2}\right]$

(b) (1) $y[n] = \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{10}{3}(2)^n - \frac{1}{2}$

(2) $y[n] = \left[\frac{1}{6}(-1)^n + \frac{10}{3}(2)^n\right] + \left[-\frac{1}{2}\right]$

(c) (1) $y[n] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{14}{3}(2)^n - 1$

(2) $y[n] = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{14}{3}(2)^n\right] + [-1]$

(d) (1) $y[n] = -\frac{5}{4}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{24}(\frac{1}{4})^n + \frac{8}{3}$

(2) $y[n] = \left[-\frac{5}{4}(\frac{1}{2})^n + \frac{5}{24}(\frac{1}{4})^n\right] + \left[\frac{8}{3}\right]$

3.30 $a_0 = -1$, $a_1 = -1$