

## 주파수 영역 해석의 기초

---

책의 ‘1절 신호의 표현과 주파수’와 관련하여 신호 표현을 위한 기본 신호로서의 정현파의 장점에 대한 보충 설명을 덧붙이고, 기본 신호의 직교성의 유용성에 대해 설명하였다.

책의 ‘2절 푸리에 급수’와 관련하여 직교성을 이용한 푸리에 계수 결정에 대해 상세하게 설명하고, 푸리에 급수의 세 가지 표현의 유도 과정을 제시하였으며, 신호 파형의 대칭성에 따른 푸리에 계수 계산의 간소화 팁을 새로이 추가하였다. 또한 진폭 및 위상 스펙트럼의 역할과 중요성, 그리고 푸리에 급수의 주요 성질에 대해 상세히 부연 설명하였다. 그 외에도 필터 설계 문제에서도 접하게 되는 깃스 현상에 대한 설명을 추가하였다.

책의 ‘3절 푸리에 변환’과 관련하여 주기 신호의 푸리에 급수 및 푸리에 변환의 관계에 대해 설명을 추가하였고, 주요한 기본 신호의 푸리에 변환쌍 및 푸리에 변환의 주요 성질에 대해 다수의 예제와 함께 상세히 설명하였다.

연속 신호의 푸리에 해석을 통하여 푸리에 해석과 신호 및 시스템의 주파수 영역 취급에 대해 개념을 제대로 확립하면 이산 시간 푸리에 해석은 어려울 것이 없으므로 심화 학습 자료를 상당한 분량으로 상세히 만들었으니 잘 익혀두기 바란다.

## 5.1 신호의 표현과 주파수

### (1) 정현파의 장점

기본 신호가 지녀야 할 바람직한 성질 4번은 매우 유용하다. 예를 들어, 회로에 (책)[그림 5.1]의 신호를 입력으로 인가할 경우, 그 자체로는 입력 파형의 특이한 형태로 인해 응답을 구하기가 매우 어렵지만, 그림과 같이 신호를 두 개의 정현파의 합으로 표현하게 되면 중첩의 원리를 이용하여 손쉽게 시스템 응답을 구할 수 있게 된다.

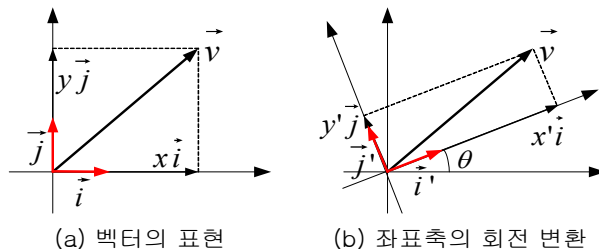
### (2) 기본 신호와 직교성

정현파를 기본 신호로 채택하여 이의 일차 결합으로 주기 신호를 나타내는 것은 2차원 평면에서 벡터  $\vec{i}, \vec{j}$ 를 기본 벡터로 선정하여 이의 일차 결합으로 벡터  $\vec{v}$ 를 나타내는 것과 기본적으로 같은 종류의 문제이다.

[그림 C5-1(a)]의  $\vec{v}$ 는 수평축과 수직축 방향의 크기가 1인 단위벡터  $\vec{i}, \vec{j}$ 를 이용해 두 방향 성분으로 쪼개어 더한 것과 같다. 즉 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) \quad (\text{C5.1})$$

이때  $(x, y)$ 를  $\vec{v}$ 의 표현<sup>representation</sup>이라고 한다.



[그림 C5-1] 벡터의 표현과 변환

두 벡터  $\vec{i}, \vec{j}$ 만 주어지면 평면 위의 어떠한 벡터도 식 (C5.1)로 나타낼 수 있으므로, 빗깍에 대한 삼원색처럼  $\vec{i}, \vec{j}$ 가 평면 벡터 표현의 바탕 벡터가 된다. 그런데 [그림 c5-1(b)]와 같이 좌표축을  $\theta$ 만큼 회전시키면,  $\vec{v}$ 는 다음과 같이 회전된 좌표축 방향의 단위벡터  $\vec{i}', \vec{j}'$ 과 관련하여 바뀌어 표현된다.

$$\vec{v} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = (x', y') \quad (\text{C5.2})$$

즉 벡터를 나타내기 위한 바탕 벡터가  $\vec{i}, \vec{j}$ 에서  $\vec{i}', \vec{j}'$ 으로 바뀐 결과로 벡터의 표현 또한  $(x, y)$ 에서  $(x', y')$ 으로 바뀌며, 결국  $(x', y')$ 을 찾아내는 문제로 귀결된다. 이때 주의할 점은 표현만 달라졌을 뿐  $\vec{v}$  자체가 달라지지는 않는다는 사실이다.

이 장에서 우리가 다루고자 하는 문제는 벡터 대신 신호를 그 대상으로 하고, 동일한 평면에서 대상의 표현을 바꾸는 [그림 5-5]의 경우와는 달리 시간 영역에서 주파수 영역으로 표현을 바꾸는 관계를 찾는 것만 다를 뿐 밑바탕에 깔린 개념은 동일하다.

벡터의 표현에서 식 (C5.1)의 계수  $x, y$ 를 구하는 것이 관건이다. 이를 위해 식(C5.1)의 양변에 대해 벡터  $\vec{i}$  및  $\vec{j}$ 와의 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = x \vec{i} \cdot \vec{i} + y \vec{i} \cdot \vec{j} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = x \vec{j} \cdot \vec{i} + y \vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C5.2})$$

식 (C5.2)은 두 미지수  $x, y$ 에 대한 연립방정식이다. 그런데, 만약 벡터  $\vec{i}$ 와  $\vec{j}$ 가 직교한다면, 즉  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ 이라면 식 (C5.2)는 다음과 같이 각각의 미지수에 대한 독립적인 방정식이 되어 복잡하게 연립방정식을 풀지 않고서도 손쉽게 값을 구할 수 있게 된다.

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = x \vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = y \vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C5.3})$$

이제 논의를 좀 더 확장해보기로 하자. 벡터  $\vec{v}$ 가 3차원 벡터인데 식 (C5.1)과 같이 2차원 평면에 근사화하여 나타내었다가 원래대로 3차원에서 나타내려고 한다면, 기본 벡터  $\vec{i}, \vec{j}$ 에 새로운 벡터  $\vec{k}$ 를 추가하여 다음과 같이 벡터  $\vec{v}$ 를 표현하게 된다.

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\text{C5.4})$$

계수  $x, y, z$ 를 구하기 위해 앞의 경우와 마찬가지로 식 (C5.4)의 양변에 벡터  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 와 각각 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = x \vec{i} \cdot \vec{i} + y \vec{i} \cdot \vec{j} + z \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = x \vec{j} \cdot \vec{i} + y \vec{j} \cdot \vec{j} + z \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = x \vec{k} \cdot \vec{i} + y \vec{k} \cdot \vec{j} + z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (\text{C5.5})$$

식 (C5.5)을 미지수  $x, y, z$ 에 대해 연립으로 풀어 구해진  $x, y$ 의 값은 일반적으로 식 (C5.2)를 풀어서 구한  $x, y$ 의 값과는 다르다. 이는 역으로 3차원에서 2차원으로 표현을 바꿀 때에도 마찬가지이다.

그러나 만약  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 가 서로 직교한다면 식 (C5.5)는 식 (C5.3)의 경우와 마찬가지로 각 미지수만의 독립적인 방정식이 된다. 즉

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = x \vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = y \vec{j} \cdot \vec{j} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (\text{C5.6})$$

식 (C5.6)과 식 (C5.3)을 비교하면 계수  $x, y$ 의 값은 그대로임을 알 수 있다. 그러므로 벡터 표현의 차원을 늘리더라도 모든 계수를 다시 계산할 필요 없이 새로이 추가된 기본 벡터에 대한 계수만 구하면 된다. 역으로 차원을 줄일 경우에도 제거할 기본 벡터와 계수만 없애면 되고 나머지는 그대로 두면 된다.

이는 기본 벡터의 직교성이 성립할 때만 얻어지는 놀라운 결과로서 계수 계산이 매우 용이할뿐더러 유용성이 크다. 만약 직교성이 성립하지 않는다면, 식 (C5.2)나 식 (C5.5)와 같이 차원이 작을 경우는 계수를 구하기 위해 연립방정식을 푸는 것이 어렵지 않을 수도 있겠지만, 차원이 커지게 되면 보통 문제가 아니다.

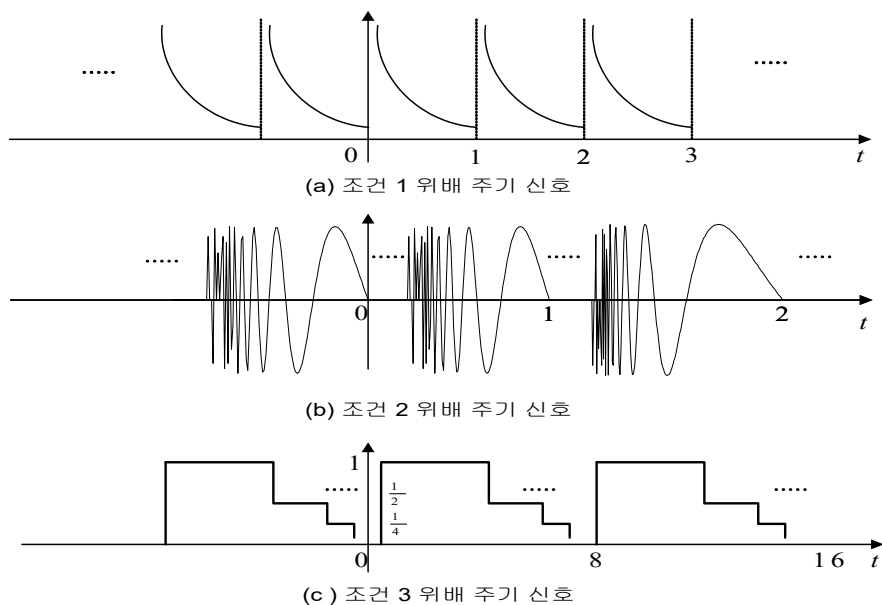
푸리에 해석에서도 기본 신호인 정현파가 이러한 직교성을 만족하기 때문에 계수 결정 구조가 간단하고 신호의 근사적인 합성이나 에너지 관계(파스발 정리) 등에서 양호한 특성을 갖게 된다.

## 5.2 푸리에 급수

### 5.2.1 주기 신호와 푸리에 급수

#### (1) 푸리에 급수의 수렴 조건

디리클레 조건을 만족하지 못하는 특수한 주기 신호들의 예를 그림 [C5-2]에 보였다. 대부분의 물리적인 주기 신호는 디리클레 조건을 만족하여 푸리에 급수가 수렴한다. (책)식 (5.5)의 조건은 푸리에 변환과 라플라스 변환으로 주파수 영역 변환의 개념이 확장될 때 밀접한 관련이 있으므로 잘 기억해두어야 한다.



[그림 C5-2] 디리클레 조건에 위배되는 주기 신호

## (2) 직교성을 이용한 푸리에 계수의 결정

주기 신호를 (책)식 (5.4) 또는 (책)식 (5.6)의 푸리에 급수로 표현하려면 푸리에 계수라고 부르는 각 항의 계수  $a_0, a_k, b_k$  또는  $X_k$ 을 구해야만 한다. 그런데, 기본 신호로 채택한 정현파 신호는 직교성이라는 훌륭한 성질을 지니고 있어서 푸리에 계수를 쉽게 구할 수 있다. 벡터와 관련하여 두 벡터  $\vec{u}, \vec{v}$ 가 직교하면 두 벡터의 내적  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ 이라는 사실은 잘 알고 있을 것이다. 마찬가지로 함수도 두 함수  $f, g$ 의 내적이 0이면 직교한다고 하며, 함수의 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (\text{책})(5.10)$$

여기서 구간  $[a, b]$ 는 두 함수의 정의 구간이고  $*$ 는 복소 공액쌍을 나타낸다.

함수의 내적을 이용하여 푸리에 급수 표현의 기본 신호들인 DC, 기본파 및 고조파 사이의 직교성을 확인해보자. 먼저 DC와 임의의 정현파 성분 간에는 내적이 0으로 직교성이 만족된다.

$$\int_T 1 \cdot \cos k\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{C5.7.a})$$

$$\int_T 1 \cdot \sin k\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{C5.7.b})$$

또한 임의의 두 정현파 성분 간에도 역시 내적이 0으로 직교성이 만족된다.

$$\int_T \cos k\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\sin(m+k)\omega_0 t + \sin(m-k)\omega_0 t] \, dt = 0 \quad (\text{C5.8.a})$$

$$\int_T \cos k\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\cos(m+k)\omega_0 t + \cos(m-k)\omega_0 t] \, dt = 0, \quad k \neq m \quad (\text{C5.8.b})$$

$$\int_T \sin k\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\cos(m-k)\omega_0 t - \cos(m+k)\omega_0 t] \, dt = 0, \quad k \neq m \quad (\text{C5.8.c})$$

식 (C5.7)과 식 (C5.8)은 정현파를 주기 적분하면 그 값이 0이라는 사실로부터 얻어진 결과이다( $k$ 고조파는  $T$  동안  $k$ 번 주기 적분한 셈이 된다).

푸리에 급수의 기본 신호인 정현파들은 벡터의 경우와 마찬가지로 자신과의 내적을 취할 경우에만 내적이 0이 되지 않고 값을 갖는다.

$$\int_T 1^2 dt = T \quad (\text{C5.9.a})$$

$$\int_T \cos^2 k \omega_0 t \, dt = \int_T \frac{1 + \cos 2k \omega_0 t}{2} dt = \frac{T}{2} \quad (\text{C5.9.b})$$

$$\int_T \sin^2 k \omega_0 t \, dt = \int_T \frac{1 - \cos 2k \omega_0 t}{2} dt = \frac{T}{2} \quad (\text{C5.9.c})$$

(책)식 (5.6) 표현의 복소 정현파의 경우도 (책)식 (5.11)과 같이 직교성이 성립한다.

이제 (복소) 정현파의 직교성을 이용하여 푸리에 계수를 구해보기로 하자. (책)식 (5.4)의 DC항의 계수  $a_0$ 는 양변에 기본 신호 1과의 내적을 취하면

$$\int_T x(t) dt = \int_T a_0 dt + \int_T \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega_0 t \right) dt = \int_T a_0 dt = a_0 T \quad (\text{C5.10})$$

따라서  $a_0$ 는 다음과 같이 구해지는데,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (\text{C5.11})$$

이것은 한 주기에 대한 평균값이므로 DC 성분이라는 것을 알 수 있다.

코사인  $k$ 고조파의 계수  $a_k$ 도 마찬가지로 내적을 취하기 위해 (책)식 (5.4)의 양변에 기본 신호  $\cos k \omega_0 t$ 를 곱해서 1 주기 적분을 하면

$$\begin{aligned} & \int_T x(t) \cos k \omega_0 t \, dt \\ &= \int_T a_0 \cos k \omega_0 t \, dt + \int_T \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m \omega_0 t \cos k \omega_0 t \right) dt \\ & \quad + \int_T \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m \omega_0 t \cos k \omega_0 t \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C5.12})$$

우변의 첫 번째 항은 식 (C5.7a)에 의해, 그리고 마지막 항은 식 (C5.8a)에 의해 0이 되어 없어진다. 또한 우변의 두 번째 항은 식 (C5.8b)와 식 (C5.9b)에 의해  $m=k$ 인 항만 남게 되므로 다음과 같이 간단히 정리된다.

$$\int_T x(t) \cos k \omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} a_k \quad (\text{C5.13})$$

따라서  $a_k$ 은 다음과 같다.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (C5.14)$$

같은 방법으로 사인  $k$ 고조파의 계수  $b_k$ 를 구하면 다음과 같이 된다.

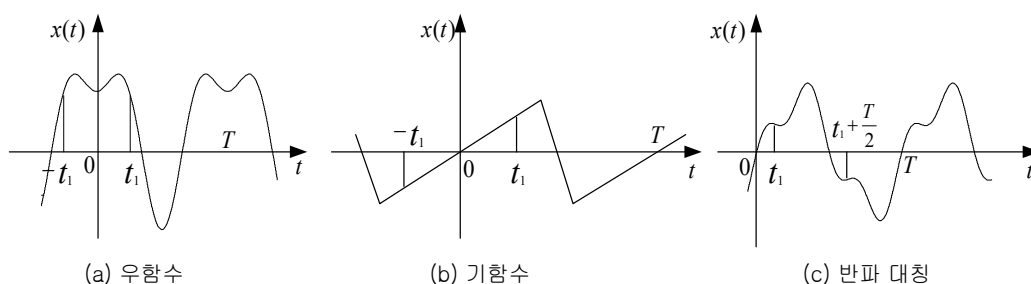
$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (C5.15)$$

## 5.2.2 푸리에 급수의 세 가지 표현

푸리에 급수의 세 가지 표현 모두 나름대로의 장단점을 가지고 있으나, 신호와 시스템의 이론적 해석에서는 (책)식 (5.6)의 (복소) 지수 함수 형식을 선호한다. 왜냐하면 이 형식이 나머지 두 삼각 함수 형식에 비하여 표현식과 계수를 구하는 식이 매우 간결하고 적분을 비롯한 수학적 조작과 취급이 훨씬 쉽기 때문이다. 반면에, 물리적 의미를 부여하거나 시각화하기에는 쉽지 않으므로, 물리적 상황을 직관적으로 또는 정성적으로 이해하기 위해서는 삼각 함수 형식 표현을, 이론적이고 수학적인 이해와 분석을 위해서는 지수 함수 형식 표현을 이용하는 것이 낫다. 그러므로 이들 형식간의 상호 관계 및 상호 변환에 대해 익숙해지도록 노력을 기울여야 할 것이다.

### 대칭성을 이용한 푸리에 계수 계산의 간소화

주기 신호 파형의 대칭성을 이용하면 Fourier 계수의 계산 과정을 간소화 할 수 있다. 파형의 대칭성에는 [그림 C5-3]에 나타난 것처럼 기대칭, 우대칭, 반파 대칭의 세 가지가 있다.



[그림 C5-3] 신호의 대칭성

우대칭은 신호 파형을 세로축에 대해 접으면 일치하는 경우로

$$x(t) = x(-t) \quad (C5.16)$$

기대칭은 신호 파형을 원점에 대해  $180^\circ$  회전시 일치하는 경우로

$$x(t) = -x(-t) \quad (C5.17)$$

반파 대칭은 신호 파형을 반주기 이동시켜 가로축에 대해 접으면 일치한다.

$$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (\text{C5.18})$$

기대칭 신호와 우대칭 신호 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} \int_{-t}^t (\text{우함수}) dt = 2 \int_0^t (\text{우함수}) dt \\ \int_{-t}^t (\text{기함수}) dt = 0 \end{cases} \quad (\text{C5.19})$$

$$\begin{cases} (\text{우함수}) \times (\text{우함수}) = (\text{우함수}) \\ (\text{우함수}) \times (\text{기함수}) = (\text{기함수}) \\ (\text{기함수}) \times (\text{기함수}) = (\text{우함수}) \end{cases} \quad (\text{C5.20})$$

식 (C5.19)는 계수를 결정하기 위한 주기 적분에서 피적분 함수가 기함수이면 적분 값이 0 이 되므로 적분을 수행할 필요가 없으며, 피적분 함수가 우함수이면 반주기 적분하여 그 결과의 2배를 취하면 된다는 사실을 알려준다. 식 (C5.20)은 피적분 함수가 우함수인지, 기함수인지를 판별할 때 쓰인다.

주기 신호  $x(t)$ 가 우함수인 경우, 식 (C5.19)로부터

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (\text{C5.21})$$

또한,  $\cos$  항의 계수  $a_n$  계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (\text{C5.22})$$

그러나,  $\sin$  항의 계수  $b_n$  계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 기함수이므로 다음과 같이 0이 된다.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (\text{C5.23})$$

즉, **우대칭의 경우  $\sin$  항이 없어진다.** (책)식 (5.7)에 의해 **지수 함수 형식의 표현에서는  $X_k$ 가 실수가 된다.**



주기 신호  $x(t)$ 가 기함수인 경우, DC성분의 계수  $a_0$ 와  $\cos$ 항의 계수  $a_n$ 은 기함수의 주기 적분이 되므로 다음과 같이 0이 된다.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \quad (C5.24)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (C5.25)$$

$\sin$ 항의 계수  $b_n$ 을 계산하기 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (C5.26)$$

즉, **기대칭의 경우 DC항과  $\cos$ 항이 없어지고  $\sin$ 항만 존재한다.** (책)식 (5.7)에 의해 **지수 함수 형식의 표현에서는  $X_k$ 가 순허수가 된다.**

$x(t)$ 가 반파 대칭의 경우,  $x(t) = -x(t \pm T/2)$ 임을 이용하여 간소화할 수 있다. DC항의 계수  $a_0$ 에 대해서는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^0 -x(t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{T}{2}} x(t') dt' + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (C5.27)$$

$\cos$ 항의 계수  $a_n$ 의 경우도 같은 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 x(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} x(t + \frac{T}{2}) \cos n\omega_0 (t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ -\cos n\pi \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, & n = \text{odd} \end{cases} \end{aligned} \quad (C5.28)$$

$\sin$ 항의 계수  $b_n$ 에 대해서도  $a_n$ 과 같은 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (\text{C5.29})$$

따라서, **반파 대칭의 경우 DC항  $\sin$ 항과  $\cos$ 항의 짝수항들이 사라지고 홀수 항들만 남는다. 지수함수 형식 표현의 계수  $X_k$ 도 홀수항만 존재한다.**

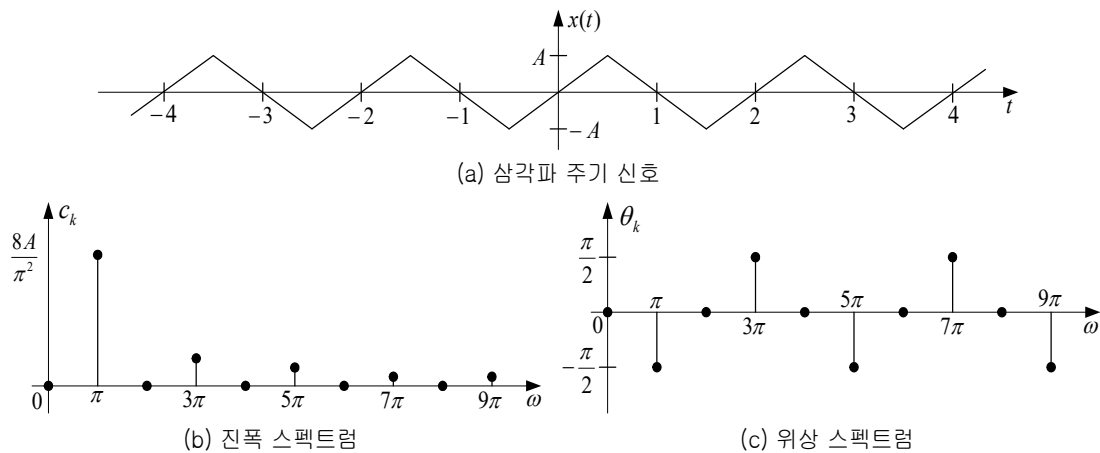
이상의 결과를 [표 C5-1]에 요약하여 나타내었다. 주어진 주기 신호  $x(t)$ 가 어떠한 대칭성도 만족하지 않는 경우는 심화 학습 자료 2장에서 설명한 것처럼  $x(t)$ 를 기대칭 성분과 우대칭 성분의 합으로 표현하여, 즉  $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ 로 해서 대칭성을 적용할 수 있다.

**[표 C5-1]** 대칭성에 의한 푸리에 계수 계산의 간소화

대칭 종류	대칭 조건	푸리에 계수
우함수	$x(t) = x(-t)$	$a_0$ , $\cos$ 항만 있음 ( $X_k$ 는 실수)
기함수	$x(t) = -x(-t)$	$\sin$ 항만 있음 ( $X_k$ 는 순허수)
반파대칭	$x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$	기수 고조파만 있음 (홀수인 $X_k$ 만 있음)

■ **예제 C5-1 : 주기 신호에 대한 푸리에 급수의 세 가지 표현**

[그림 C5-4(a)]에 나타낸 삼각파 주기 신호에 대해 3가지 푸리에 급수 표현을 구하라.



**[그림 C5-4]** 삼각파 주기 신호의 파형과 푸리에 스펙트럼

<풀이>

### ① 삼각 함수 형식 푸리에 급수 표현

그림에서 보면 신호의 주기는  $T=2$ 이고, 기함수 대칭이면서 반파 대칭이므로 홀수의  $\sin$ 항만 남음을 미리 알 수 있다. 또한 파형의 형태상 1/4주기만 적분해서 그 결과를 4배하면 되므로 1/4주기에서의 신호의 함수를 구해보면 다음과 같다.

$$x(t) = \frac{4A}{T}t, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4}$$

이제  $\sin$  항의 계수  $b_n$ 을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{32A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{4}} t \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{32A}{T^2} \left[ \frac{1}{n^2\omega_0^2} \sin n\omega_0 t - \frac{1}{n\omega_0} t \cos n\omega_0 t \right] \Bigg|_0^{\frac{T}{4}} \\ &= \begin{cases} \frac{8A}{n^2\pi^2}, & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{8A}{n^2\pi^2}, & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

따라서  $x(t)$ 의 푸리에 급수 표현은 다음과 같이 주어진다.

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[ \sin\omega_0 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_0 t - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t + \dots \right]$$

### ② 간결형 삼각 함수 형식 푸리에 급수 표현

①의 결과에서 보면  $\sin$  항만 있으므로 삼각 함수의 합성 공식을 적용할 필요 없이  $\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$ ,  $-\sin\theta = \cos(\theta + 90^\circ)$ 임을 이용하여 ①의 결과를 변형하면 다음과 같이  $x(t)$ 에 대한 간결형 삼각 함수 형식의 푸리에 급수 표현이 주어진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{8A}{\pi^2} \left[ \sin\omega_0 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_0 t - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t + \dots \right] \\ &= \frac{8A}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_0 t - 90^\circ) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t + 90^\circ) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t - 90^\circ) + \dots \right] \end{aligned}$$

이 결과로부터  $x(t)$ 의 푸리에 스펙트럼을 그릴 수 있다. [그림 C5-4]에서 보면 짝수 고조파는 없고 홀수 고조파 성분만 나타나며 위상은  $\pi/2$ 와  $-\pi/2$ 가 번갈아 가면서 나타난다.

### ③ 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현

이미 구해진 결과를 이용하여 푸리에 계수들의 관계로부터 지수 함수 형식 푸리에 급수 표

현을 얻을 수 있지만 다음과 같이 직접 (책)식 (5.12)를 이용하여 계수를 결정해 보면,

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4A}{T} t e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \frac{4A}{T} t \left( -\frac{1}{jk\omega_0} \right) e^{-jk\omega_0 t} + \frac{4A}{T} \left( -\frac{1}{jk\omega_0} \right)^2 e^{-jk\omega_0 t} \right] \bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \\
 &= \begin{cases} -\frac{2}{T} \frac{8A}{T} \frac{T^2}{4k^2\pi^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k = \text{odd} \\ 0, & k = \text{even} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -j \frac{4A}{k^2\pi^2}, & k = 1, 5, 9, \dots \\ j \frac{4A}{k^2\pi^2}, & k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

이 경우에도 삼각 함수 형식 표현과 마찬가지로 푸리에 계수의 짝수항은 없어지고 홀수항만 존재한다. 따라서  $x(t)$ 에 대한 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\
 &= \dots + \frac{4A}{\pi^2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega_0 t} + 0 + \frac{4A}{\pi^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega_0 t} + \frac{4A}{3^2\pi^2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j3\omega_0 t} + \dots
 \end{aligned}$$

■

### 5.2.3 푸리에 급수와 스펙트럼

음의 주파수란 실제로는 존재하지 않으므로, 스펙트럼은 (책)식 (5.8)의 코사인파의 진폭  $c_k$ 와 위상  $\phi_k$ 를 나타내는 것이 타당할 것이다. 그러나 푸리에 변환과의 일관성이나 수학적 취급의 용이함 등으로 인해 많은 경우에 복소 정현파를 이용한 (책)식 (5.6)의 푸리에 계수  $X_k$ 의 크기  $|X_k|$ 와 위상  $\angle X_k$ 을 주파수  $\omega(f)$ 에 대해 그린다. 이 경우 음의 주파수 측에 대해서도 스펙트럼이 그려지며, 진폭 스펙트럼의 크기가 반으로 줄어든다( $c_k = 2|X_k|$ ).

(책)[그림 5-1]의 신호와 같이 파형의 변화가 빠르지 않고 비교적 매끄러운 주기 신호는 주파수 성분이 몇 개밖에 되지 않으나, 파형의 변화가 빠르고 급격한 경우에는 이를 실현하기 위해 훨씬 많은 그리고 높은 주파수 성분이 필요하다. 극단적인 예로 정현파의 경우에는 기본 주파수  $\omega_0$ 에서만 진폭 스펙트럼의 값이 나타나는 반면, 불연속점과 같이 급격한 변화를 포함하는 사각 펄스 신호는 주파수 성분을 무한히 필요로 한다.

신호의 평활한 정도  $\text{smoothness}$ 는 신호의 도함수들이 몇 차까지 존재하느냐에 의해 판별할 수 있는데, 신호의  $(m-1)$ 차까지의 도함수가 연속이고  $m$ 차 도함수가 불연속이면 진폭 스펙트

럼  $c_k(|X_k|)$ 는 적어도  $\frac{1}{k^{m+1}}$ 의 비율로 감쇠한다. 이 결과는 푸리에 급수의 점근적인 수렴 속도를 예측하는 데 유용하다. 정현파는 끊임없이 미분 가능한, 즉 무한 차수의 도함수를 가지므로  $m = \infty$ 인 가장 완만한 신호로서, 진폭 스펙트럼이  $\frac{1}{\infty}$ 의 비율로 감쇠하여 고조파 성분을 전혀 가지지 않는다. 하지만 사각 펄스 신호는 신호 자체가 불연속이므로 도함수가 존재하지 않는다. 즉  $m = 0$ 이므로 진폭 스펙트럼이  $1/k$ 의 비율로 느리게 감쇠하게 된다.

## 깁스 현상

(책)[그림 5-13]에 나타낸 사각 펄스의 근사 합성신호는( $N=19$ 의 경우) 불연속점 근처에서 (불연속 크기의) 약 9%의 오버슈트와 발진 동작을 보인다. 푸리에 급수 표현의 등식에 근거해  $N \rightarrow \infty$ 가 되면 오버슈트와 발진이 당연히 없어질 것이라 기대할 수 있으나 불행히도 그렇지 못하다.

발진은 진동 주파수  $N$ 을 가지며,  $N \rightarrow \infty$  이면 발진의 진동 주파수도 따라서 증가하고, 오버슈트는  $N$  값에 상관없이 약 9%를 유지한다. 이런 회한한 현상은 수학적 결과와 모순되어 보인다. 이 문제는 Albert Michelson이 조파 분석기를 개발하는 과정에서 제기했고, Josiah Willard Gibbs가 이 점에 대한 수학적 설명을 하였다. 그래서 이것이 깁스 현상이라 불리게 되었다.

(책)[그림 5-13]의 사각 펄스는 디리클레 조건을 만족하므로 푸리에 급수가 수렴하여 모든 시간에서 값이 존재하며, 이때 불연속점에서는 불연속 값의 평균으로 값이 정해진다. 그림을 보면, 어떤  $N$  값에 대해서도 합성 신호는 불연속점에서 정확히 그 값을 가지고 있다. 이를 제외한  $t$ 의 임의의 값, 즉,  $t = t_1$ 에 대해서는  $N \rightarrow \infty$ 일 때 합성 신호 값이 원래 신호와 정확히 일치한다.

따라서 사각 펄스의 푸리에 급수 표현에서 오차 제곱의 평균은 0이 된다. 그러나  $t_1$ 이 불연속점 가까이에 선정될수록 특정 값 이하로 오차를 감소시키기 위해  $N$ 이 커져야만 한다. 그러므로  $N$ 이 증가함에 따라 합성 신호의 맥동은 불연속점을 향하여 집중되게 된다. 그러나 발진의 진동 주파수가  $N$ 이고 오버슈트의 빠른 부분의 폭이  $\frac{1}{2N}$ 이므로 어떤 유한한  $N$  값에 대한 맥동의 최대값은 언제나 일정하다. 이것이 깁스 현상이다.

이 현상이 내포하고 있는 의미는, 푸리에 급수 표현에 의거해 불연속 신호를 근사화(조파 합성)할 때 통상적으로 불연속점 가까이에 고주파 맥동과 오버슈트가 발생하며, 이러한 근사가 실제적이려면 맥동에서의 총에너지가 무시할만해도 될 수 있도록 충분히 큰  $N$  값을 선택해야 한다는 것이다.

(책)[그림 5-13]에서 고조파의 수를 늘려가며 사각 펄스 신호를 근사화하는 과정을 나타내었는데, 그림에서 보면  $N=3$ , 즉 3개의 고조파만 더해져도 사각 펄스의 기본 형태는 갖추게 됨을 볼 수 있다. 고조파 항을 추가하여  $N=5$ 가 되면 더욱더 사각 펄스에 가까워지지만

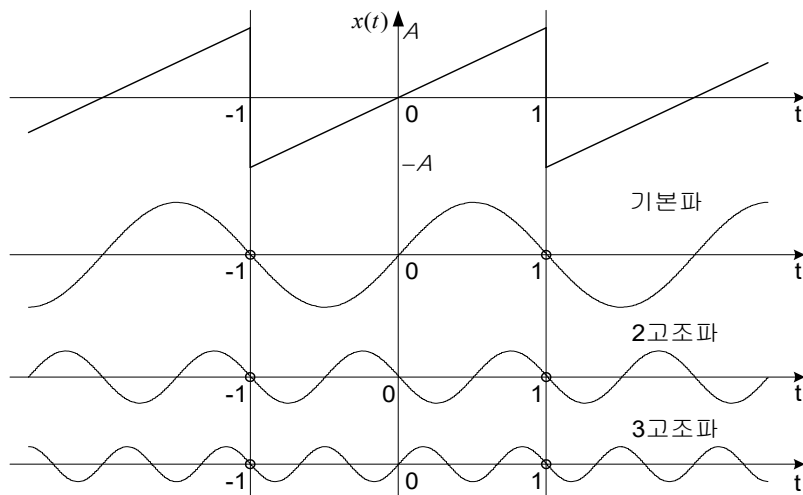
$x(t)$ 가 갖는 날카로운 모서리가 이 합성 신호에는 재현되지 않았다. 왜냐하면 날카로운 모서리는 급격한 변화를 의미하며 이를 재현하기 위해서는 이 합성 신호에는 포함되어 있지 않는 급격히 변하는 (고주파수) 성분이 필요하기 때문이다.  $N=19$ 의 경우와 같이 고조파의 수를 점진적으로 증가시키기에 따라 구형파의 모서리는 점점 날카로워지며 신호는  $x(t)$ 에 더욱 유사해진다. 그러나 깃스 현상에 의해 오버슈트와 발진은 사라지지 않는다.

### 신호의 불연속점과 위상 스펙트럼의 관련성

가장 평활한 신호인 정현파들로 사각 펄스나 톱니파 같은 극단적인 파형을 만들 수 있다는 게 쉽게 믿어지는가? 1807년 푸리에가 푸리에 급수의 이론을 처음 발표했을 때 라그랑주나 라플라스 같은 프랑스 아카데미의 동료들을 납득시키지 못한 것도 무리는 아니다. 그 후 디리클레가 삼각함수 급수의 수렴에 관한 이론을 제시함으로써 비로소 이론적 타당성이 완전히 해결되었고 1822년에야 푸리에 급수 이론이 제안된 ‘열의 해석적 이론’은 정식 논문으로 받아들여졌다.

위상 스펙트럼의 또 다른 중요성은 불연속점과 같은 급격한 변화가 있는 신호를 통해 살펴볼 수 있다. 불연속점에서의 순간적인 변화를 만들어내기 위해서는 스펙트럼에 포함된 모든 (또는 대부분의) 고조파 성분이 불연속점 직전에서 같은 부호를 가져야 하며, 불연속점 직후에서 반대 부호를 가져야 한다. 다시 말해, **불연속점에서 모든 고조파 성분이 동일한 부호 변화를 보이며, 0점을 통과하도록 위상이 일치해야 한다.** 이렇게 하면 합성된 신호의 불연속점에서는 날카로운 변화가 생기게 된다. 불연속점을 갖는 어떠한 신호의 파형에 대해서도 이러한 관계는 성립한다.

하나의 예로 [그림 C5-5]의 톱니파 신호를 통해 불연속점과 위상 스펙트럼의 영향을 살펴보자.



[그림 C5-5] 불연속점과 위상 스펙트럼의 영향

그림에는 톱니파 신호의 파형과 함께 이를 푸리에 급수로 전개한 결과의 첫 세 성분이 그려져 있다. 모든 주파수 성분의 위상은 불연속점인  $t=\pm 1$  직전에는 모든 성분이 양이고, 그 직후에는 음이 되도록 결정된다. 모든 고조파에서 일어나는 이런 부호 변화가 더해져서 불연속점이 형성되는 것이다.  $t=0$ 에서도 모든 고조파의 값은 0이 되지만 전후의 부호 변화가 일치하지는 않음을 볼 수 있다. 위상 스펙트럼에 대한 조건이 맞지 않으면 모서리가 깎여 나가고 퍼진 파형을 얻게 될 것이다.

#### 5.2.4 푸리에 급수의 주요 성질

(책)식 (5.6)의 푸리에 급수 표현의 복소 정현파를 오일러 공식에 의해 코사인파로 바꾸면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \left( e^{j\angle X_k} e^{jk\omega_0 t} + e^{-j\angle X_k} e^{-jk\omega_0 t} \right) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k) \end{aligned} \quad (\text{C5.30})$$

식 (C5.30)의  $k$  고조파의 진폭을  $c_k$ , 실효값을  $\bar{c}_k$ 라고 하면  $c_k = 2|X_k|$ ,  $\bar{c}_k = \sqrt{2}|X_k|$ 이므로, 파스발 정리의 (책)식 (5.18)은 다음과 같이 삼각함수 정현파로 나타낸  $k$ 고조파의 전력을 모두 더한 것으로 나타낼 수 있다. 이때 DC 성분에 대해서는  $c_0 = X_0$ ,  $\bar{c}_0 = X_0$ 이다.

$$P = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{c_k}{\sqrt{2}} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \quad (\text{책})(5.19)$$

#### <Note> 신호의 전고조파 왜율(의율)(THD)

오디오를 보면 규격 표시에 THD가 몇 %라고 표시된 것을 볼 수 있다. THD는 **전고조파왜율**(의율) Total Harmonic Distortion을 일컫는 용어로, 증폭기에 의한 신호의 왜곡 정도를 나타내는 지표이다. 증폭기를 이용하여 신호를 증폭하면 증폭기의 물리적인 특성이 완전한 선형을 만족하지 못하기 때문에 출력 신호에 찌그러짐(왜곡) Distortion이 일어나서 고조파가 섞이게 된다. 따라서 신호의 왜곡 정도를 다음과 같이 신호에 포함된 고조파 성분의 기본파 성분에 대한 비율로 표시하고, 이를 전고조파왜율(THD)이라고 한다.

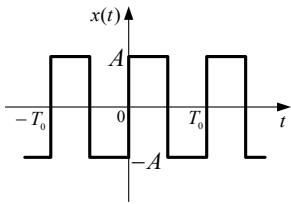
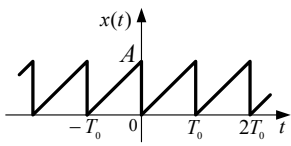
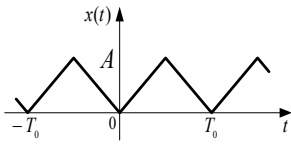
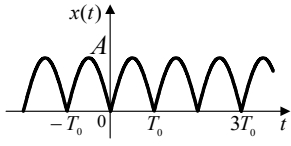
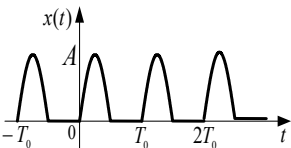
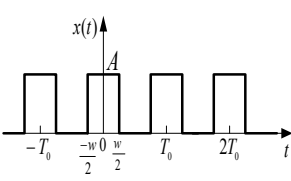
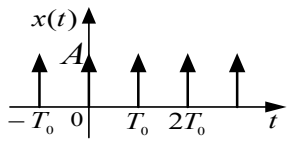
$$THD = \frac{\text{전 고조파의 실효치}}{\text{기본파의 실효치}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2 + \dots + \bar{c}_n^2 + \dots}{\bar{c}_1^2}} \quad (\text{C5.31})$$

식 (C5.31)의 THD를 %나 dB로 나타내는 것이 일반적이다. 식 (C5.31)의 THD의 정의를 보면 파스발 정리의 결과가 적용되어 있음을 알 수 있다.

## 5.2.5 주요 신호의 푸리에 급수

많이 쓰이는 신호들에 대한 푸리에 급수 전개 결과를 [표 C5-2]에 나타내었다.

[표 C5-2] 주요 신호의 푸리에 급수

파형		$X_0$	$X_k, k \neq 0$	비고
방형파		0	$-j \frac{2A}{\pi k}$	$k = 0$ $k$ 는 짝수
톱니파		$\frac{A}{2}$	$j \frac{A}{2\pi k}$	
삼각파		$\frac{A}{2}$	$-\frac{2A}{(\pi k)^2}$	$k$ 는 짝수
정류파		$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{2A}{\pi(1-4k^2)}$	
반정류파		$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi(1-k^2)}$	$k$ 는 홀수 단 $X_1 = -j \frac{A}{4}$
구형파		$\frac{wA}{T_0}$	$\frac{wA}{T_0} \text{sinc} \frac{wk\omega_0}{2\pi}$	
임펄스열		$\frac{A}{T_0}$	$\frac{A}{T_0}$	



## 5.3 푸리에 변환

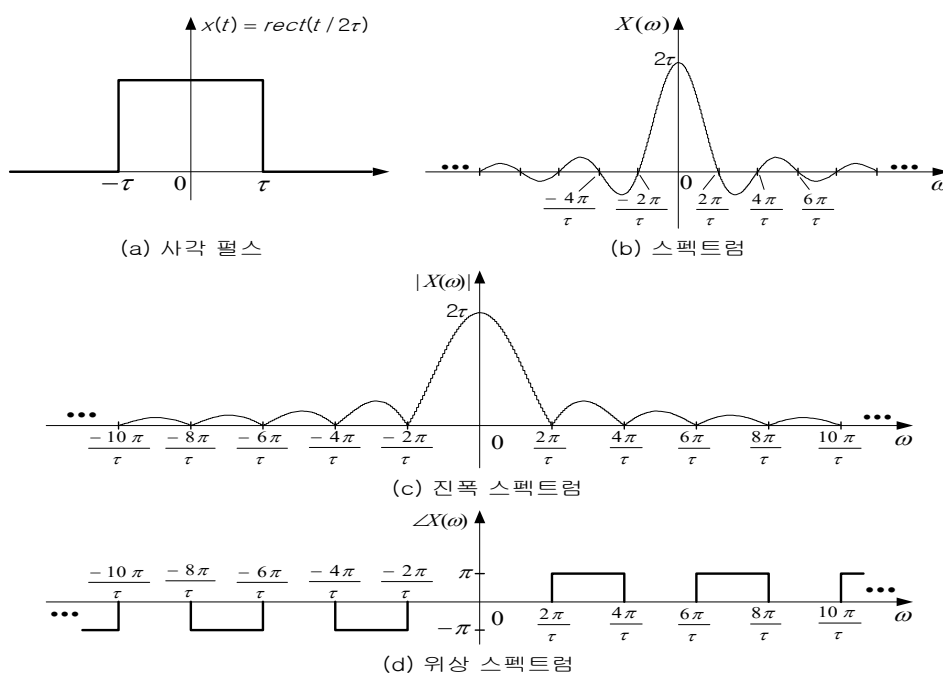
### 5.3.2 푸리에 변환의 정의

#### (1) 사각 펄스 신호

(책)[예제 5-12]의 결과에서 보듯이 사각 펄스 신호의 푸리에 변환쌍은 다음으로 주어진다.

$$p_{\tau}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2\tau}\right) \Leftrightarrow P_{\tau}(\omega) = 2\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\tau\omega}{\pi}\right) \quad (\text{책})(5.38)$$

이 변환쌍을 [그림 C5-6]에 나타내었다. 그림 (c)와 (d)는 (b)의 스펙트럼을 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼으로 분리하여 나타낸 것이다. [그림 C5-6(b)]의 스펙트럼을 보면 DC를 중심으로 한 봉우리에 대부분의 스펙트럼이 몰려있음을 볼 수 있다. 이를 sinc 신호의 **주엽** main lobe이라고 하고, 나머지 작은 맥동들을 **부엽** side lobe이라고 한다.



[그림 C5-6] 사각 펄스의 푸리에 변환과 스펙트럼

#### (2) 부호(signum) 함수

부호 함수는 디리클레 조건을 만족하는 에너지 신호는 아니지만, 전력이 수렴하는 전력 신호이다. 따라서 푸리에 변환을 정의할 수 있는데, 부호 함수는 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \quad (\text{C5.31})$$

실수 지수 신호에 대한 푸리에 변환은 (책)식 (5.29)에 주어져 있으므로 이를 이용하면 부호 함수의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} [\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} - \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} \end{aligned} \quad (\text{C5.32})$$

즉, 부호 함수에 대한 푸리에 변환쌍은 다음과 같다.

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (\text{C5.33})$$

### (3) (단위) 계단 신호

계단 신호 역시 디리클레 조건을 만족하지 않는 전력 신호의 일종이다. 계단신호는 DC 신호와 부호 함수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad (\text{C5.34})$$

이미 구해진 푸리에 변환쌍 (책)식 (5.26)과 식 (C5.33)으로부터 계단 신호의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (\text{C5.35})$$

따라서 계단 신호의 푸리에 변환쌍은 다음으로 주어진다.

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (\text{C5.36})$$

이상의 결과에서 전력 신호의 푸리에 변환은 임펄스를 포함함을 알 수 있다.

## 5.3.4 푸리에 변환의 성질

### (1) 대칭성

푸리에 변환의 정의식 (책)식 (5.22)의 양변 모두 공액을 취하여, 실수 신호에 대해서는  $x^*(t) = x(t)$ 라는 사실을 이용하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned}
 [X(\omega)]^* &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) (e^{-j\omega t})^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)
 \end{aligned} \tag{C5.37}$$

따라서 실수 신호의 푸리에 변환은 공액 대칭<sup>conjugate symmetric</sup>이다.

$X(\omega)$ 를 각각 직교좌표 형식과 극좌표 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$X(\omega) = \text{Re}\{X(\omega)\} + j\text{Im}\{X(\omega)\} \tag{C5.38}$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} \tag{C5.39}$$

식 (C5.38)과 식 (C5.37)의 공액 대칭 성질을 결합하면 다음 결과를 얻게 된다.

$$\begin{cases} \text{Re}\{X(\omega)\} = \text{Re}\{X(-\omega)\}, & x(t) \text{는 실수} \\ \text{Im}\{X(\omega)\} = -\text{Im}\{X(-\omega)\}, & x(t) \text{는 실수} \end{cases} \tag{C5.40}$$

즉, 실수 신호  $x(t)$ 의 푸리에 변환의 실수부  $\text{Re}\{X(\omega)\}$ 는 우함수 대칭이고, 허수부  $\text{Im}\{X(\omega)\}$ 는 기함수 대칭이다.

마찬가지로 식 (C5.39)와 식 (C5.37)을 결합하면 다음 결과를 얻게 된다.

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)|, & x(t) \text{는 실수} \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega), & x(t) \text{는 실수} \end{cases} \tag{C5.41}$$

즉, 실수 신호  $x(t)$ 의 진폭 스펙트럼은 우함수, 위상 스펙트럼은 기함수이다.

이러한 대칭성은 이미 (책)[예제 5-11]에서 실수 지수 신호의 푸리에 변환을 구할 때 살펴본 바 있다(책)[그림 5-21] 참조. 식 (C5.40)과 식 (C5.41)의 대칭성에 실수 신호  $x(t)$ 의 대칭성까지 결합하면 (책)[표 5-2]에 나타낸 것과 같은 더욱 흥미 있는 결과들을 얻을 수 있다.

푸리에 변환의 대칭성은 신호의 해석과 처리에 매우 유용하게 사용된다.

## (2) 시간 이동

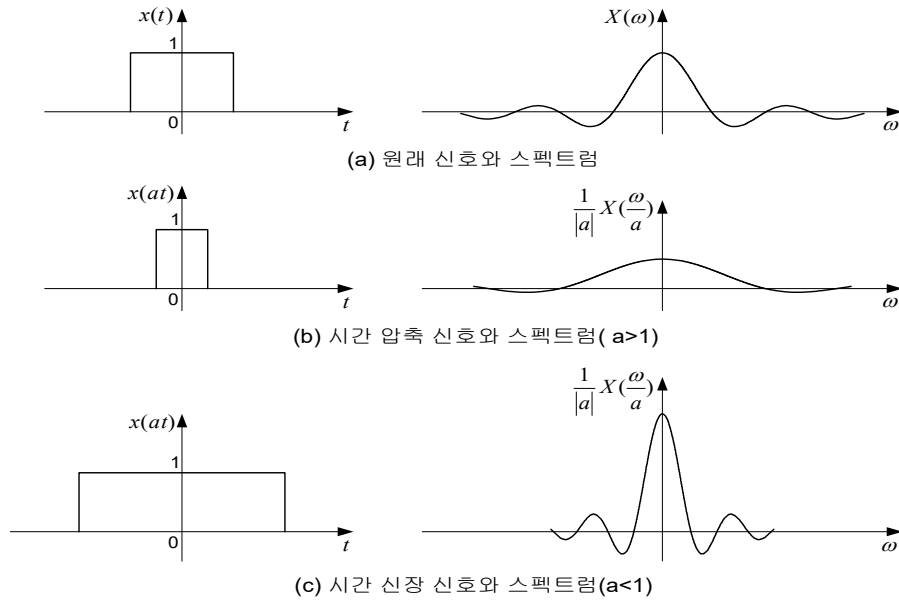
$t_0$ 만큼 시간 이동된 신호  $x(t-t_0)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)\end{aligned}\quad (C5.42)$$

식 (C5.42)는 시간 이동에 대해 진폭 스펙트럼은 바뀌지 않고 위상 스펙트럼만 선형적으로 바뀔을 의미한다. 이 결과는 푸리에 급수에서 살펴본 결과와 일치한다((책)식 (5.15) 참조).

### (3) 시간 척도조절

[그림 C5-7]에 보인 것처럼, 파형 모양은 그대로 유지한 채 시간축을 따라 신호를 일정한 비율로 잡아 당겨 늘리거나(신장) 눌러 줄이면(압축), 즉 신호의 시간 척도를 바꾸게 되면 주파수 영역에서 스펙트럼이 어떻게 변하는지 살펴보자.



[그림 C5-7] 푸리에 변환의 시간 척도조절 성질

신호에 대한 시간 척도조절은  $x(at)$ 로 나타낼 수 있으며,  $|a| > 1$ 이면 압축,  $|a| < 1$ 이면 신장에 해당한다. 시간 척도가 조절된 신호  $x(at)$ 의 푸리에 변환을 계산해 보면

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}\quad (C5.43)$$

식 (C5.43)은 **시간 영역에서 신호를 압축하면 주파수 스펙트럼은 신장되고, 역으로 신호를 신장시키면 주파수 스펙트럼이 압축된다**는 뜻이다.

이 결과는 신호의 시간 척도조절에 대한 직관적인 이해와도 잘 부합한다. 시간적으로 신호를 압축하면 신호의 변화가 빨라진다. 따라서 이런 신호를 합성하기 위해서는 더 높은 주파수의 고조파 성분이 필요하게 되므로 스펙트럼의 폭이 넓어지게 되는 것이다. 마찬가지로 시간적으로 신장된 신호는 더욱 느리게 변화하므로 신호 성분들의 주파수는 낮아질 것이고 이에 따라 스펙트럼의 폭은 줄어들게 된다. [그림 C5-7]은 이런 결과를 잘 보여주고 있다.

이런 효과의 예로 오디오 테이프에 목소리를 녹음하여 재생하는 경우를 생각해볼 수 있다. 재생 속도가 녹음 속도보다 빠르면(시간 압축) 스펙트럼이 확장되므로 목소리의 옥타브가 높아진다. 이와 반대로 재생 속도가 더 느리면(시간 신장) 주파수 대역이 낮아져서 저음의 굵은 남자 음성처럼 들리게 된다.

#### (4) 시간 컨벌루션

선형 시불변 시스템의 입력에 대한 출력은 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션으로 주어진다. 이것을 이미 배운 바 있다. 따라서 두 신호의 컨벌루션에 대한 푸리에 변환을 구해보자.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t') e^{j\omega t'} dt' \right] e^{-j\omega \tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t') e^{j\omega t'} dt' = X_1(\omega) X_2(\omega)
 \end{aligned} \tag{C5.44}$$

즉, 시간 영역에서 두 신호의 컨벌루션은 주파수 영역에서 각 신호의 푸리에 변환(스펙트럼)의 곱하기가 된다. 이것은 3장에서 살펴보았듯이 컨벌루션의 계산이 매우 복잡하다는 점을 생각하면 매우 놀라운 결과이다. 바로 이 때문에 우리는 많은 경우 주파수 영역에서 시스템을 다루게 된다.

#### (5) 파스발 정리

푸리에 급수의 성질을 다룰 때, 파스발 정리를 통해 시간 영역에서 신호의 전력과 푸리에 급수로 표현된 각 주파수 성분의 전력을 연관 지은 바 있다. 주기 신호는 전력 신호로서 총 에너지가 무한대이기 때문에 에너지 관계를 살펴볼 때 어쩔 수 없이 전력을 이용하였지만, 푸리에 변환이 존재하는 신호, 즉 디리클레 조건을 만족하는 신호는 에너지 신호이므로 직접 에너지 관계를 살펴보는 것도 얼마든지 가능하다.

신호의 에너지의 정의와 푸리에 변환을 이용하면 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned} \tag{C5.45}$$

식 (C5.45)는 푸리에 급수에서와 마찬가지로 신호의 시간 영역에서의 에너지 총합은 각 스펙트럼 성분의 에너지를 모두 더한 것과 같다는 것을 보여준다.

$|X(\omega)|^2$ 은 신호  $x(t)$ 가 갖는 에너지의 주파수 분포를 알려주기 때문에 에너지 밀도 스펙트럼이라고 한다. 에너지 밀도 스펙트럼은 스펙트럼의 크기에만 의존하기 때문에 같은 에너지 밀도 스펙트럼을 가지는 신호가 여러 개 존재할 수 있다. 그러나 어떤 신호이든 신호는 오직 하나의 에너지 밀도 스펙트럼만을 가진다.

#### ■ 예제 C5-2 : 임펄스의 푸리에 변환쌍을 이용한 푸리에 변환

직선 성분들로 구성되는 신호들의 경우 계속 미분을 수행하면 임펄스 열들만 남게 된다. 임펄스 함수의 푸리에 변환은 1이므로 이에 시간 미분 성질, 시간 이동 성질과 선형성을 적용하면 매우 쉽게 푸리에 변환을 구할 수 있다.

하나의 예로 [그림 C5-8]에 나타난 삼각 펄스의 푸리에 변환을 구해보자. [그림 C5-8(a)]에 주어진 삼각 펄스 신호는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \Delta_{\tau}(t) = -\frac{2}{\tau}|t| + 1, \quad |t| < \frac{\tau}{2}$$

이를 한번 미분하면 그림 (b)와 같이 되고, 두 번 미분하면 그림 (c)처럼 임펄스 열만 남는다. 즉,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \left[ \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

위 식을 푸리에 변환하면 다음과 같다.

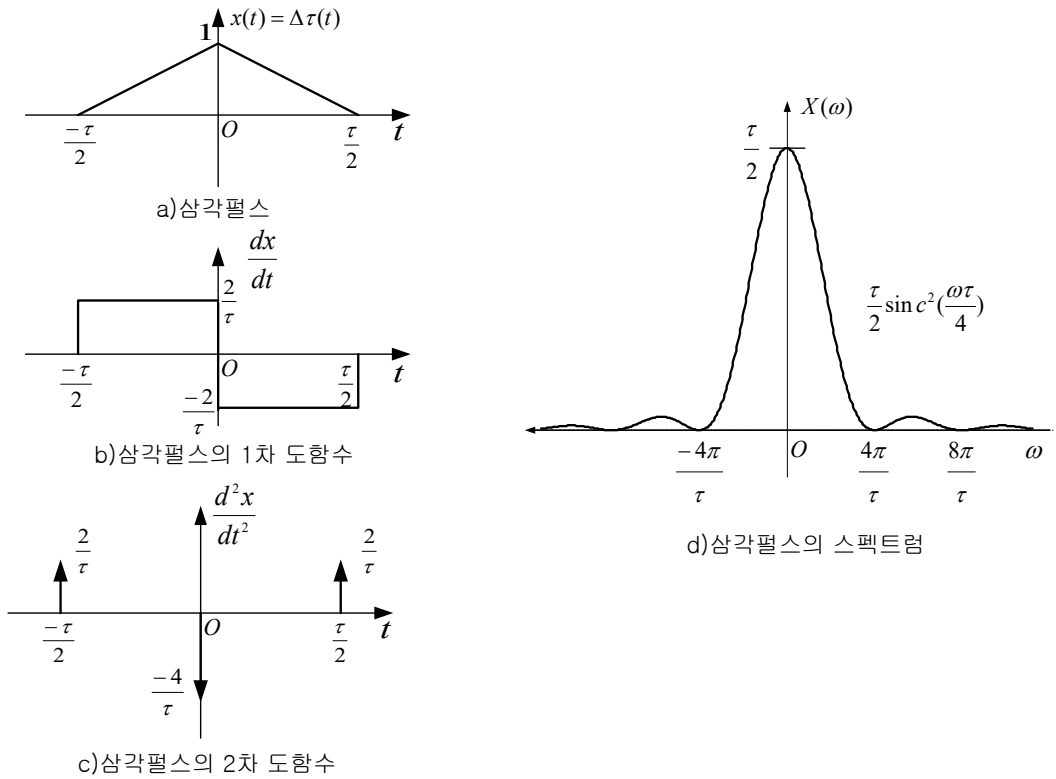
$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\} = \frac{2}{\tau} \left[ d^{j\omega \frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right] = \frac{4}{\tau} \left[ \cos \frac{\tau\omega}{2} - 1 \right] = -\frac{8}{\tau} \sin^2 \frac{\tau\omega}{4}$$

따라서 이 결과와 푸리에 변환의 미분 성질을 결합하여 삼각 펄스의 푸리에 변환을 다음과

같이 얻을 수 있다.

$$X(\omega) = \frac{8}{\tau\omega^2} \sin^2\left(\frac{\tau\omega}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{4}{\tau\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\tau\omega}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\tau\omega}{4}\right)$$

그림 (d)는 이 스펙트럼을 그린 것이다. ■



[그림 C5-8] 임펄스의 푸리에 변환쌍을 이용한 푸리에 변환 예

## 핵심 요약

개념	관련항
<ul style="list-style-type: none"> <li>정현파는 주파수와 1:1 대응 관계를 가지고 직교성이 성립하여 신호의 주파수 영역 표현을 위한 기본 신호로 좋은 성질을 지니고 있다.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>정현파를 주파수의 함수로 취급하여 주파수 축 상에서 진폭과 위상을 나타낸 것이 스펙트럼의 개념이며, 따라서 신호의 모든 주파수 성분의 진폭과 위상을 주파수에 대해 표시한 그래프가 바로 신호의 스펙트럼이다.</li> </ul>	[그림 5-2]
<ul style="list-style-type: none"> <li>주기 신호와 같은 주기를 갖는 정현파를 기본파라 하고 기본파 주파수(기본 주파수)의 정수 배 주파수를 갖는 정현파를 고조파라고 한다.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>주기 신호는 기본 주파수의 정수 배가 되는 주파수 성분만 가진다.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 급수는 주기 신호를 기본파와 고조파들의 일차 결합으로 나타낸 것으로 세 가지 형식의 표현이 있고, 직교성을 이용하여 계수를 결정한다.</li> </ul>	식 (5.4) [표 5-1]
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 급수/변환은 디리클레<sup>Dirichlet</sup> 조건을 만족하는 신호에 대해서만 존재한다.</li> </ul>	식 (5.5)
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 급수에 의해 주기 신호로부터 스펙트럼을 구하는 것은 주파수 분해이고, 스펙트럼으로부터 주기 신호를 만들어 내는 것은 주파수 합성이다.</li> </ul>	[그림 5-9]
<ul style="list-style-type: none"> <li>진폭 스펙트럼은 신호가 갖는 다양한 주파수 성분의 양을 나타낸다. 파형의 시간적 변화가 완만한 신호는 진폭 스펙트럼의 감쇠가 급격하고, 시간적으로 급격한 변화를 보이는 신호는 진폭 스펙트럼의 감쇠가 완만하다.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>진폭 스펙트럼이 같더라도 위상 스펙트럼이 다르면 신호 파형이 달라진다.</li> </ul>	[그림 5-14]
<ul style="list-style-type: none"> <li>불연속점에서 모든 고조파 성분이 동일한 부호 변화를 보이며 0점을 통과하도록 위상이 일치해야 한다.</li> </ul>	[그림 C5-5]
<ul style="list-style-type: none"> <li>신호를 시간 축에 대해 좌우로 이동시키면 진폭 스펙트럼은 변하지 않으나 위상 스펙트럼은 시간 이동 값에 비례하여 변하게 된다. 따라서 각 고조파의 위상이 그 주파수에 비례하여 달라지면 파형이 그대로 유지된다.</li> </ul>	식 (5.15)
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 변환은 비주기 신호에 대한 주파수 영역의 표현으로서, 주기 신호의 주기를 무한대로 하는 극한을 취하여 푸리에 급수로부터 유도된다.</li> </ul>	식 (5.22) 식 (5.23)
<ul style="list-style-type: none"> <li>주기 신호의 스펙트럼은 같은 파형을 가진 비주기 신호의 푸리에 변환을 샘플링한 이산 함수가 되며, 그 간격은 기본 주파수 <math>\omega_0</math>로 주어진다.</li> </ul>	식 (5.34)
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 변환은 <math>x(t)</math>와 <math>X(\omega)</math>가 역할을 맞바꾸어도 둘의 관계가 유효한 시간-주파수 쌍대성이 성립한다. <math>x(t) \Leftrightarrow X(\omega)</math>이면 <math>X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)</math>이다.</li> </ul>	식 (5.36) 식 (5.37)
<ul style="list-style-type: none"> <li>푸리에 변환은 대칭성을 비롯한 여러 가지 유용한 성질을 갖는다.</li> </ul>	[표 5-2]
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 구한 신호의 전력(주기 신호) 또는 에너지(비주기 신호)와 주파수 영역에서 구한 전력 또는 에너지가 같고, 주파수 영역에서의 전력 또는 에너지는 각 주파수 성분의 진폭 스펙트럼을 제곱하여 전부 더하여 얻어진다는 것이 파스칼 정리이다.</li> </ul>	식 (5.16) [표 5-2]