Chapter 11 IIR 필터 설계

[Quick Review]

(1) ○
(2) ×
(3) 진폭 제곱, 필터
(4) ○
(5) 실극, 공액 복소 극/영점
(6) ○
(7) 버터워스
(8) ×
(9) ○
(10) ○
(11) 시간
(12) ×
(13) 적분기, 전달 함수
(14) ○
(15) ○
(16) ×
(17) 종속, 임펄스 불변
(18) ○
(19) ○
(20) ○

[기초 문제]

11.1 ㉰

11.2 ㉰

11.3 ㉰

11.4 ㉱

11.5 ㉱

11.6 디지털 IIR 필터의 사양은

통과 대역 중심 주파수 $\Omega_0 = 2\pi \times \dfrac{125}{500} = \dfrac{\pi}{2}$

통과 대역 대역폭 $\triangle\Omega = 2\pi \times \dfrac{10}{500} = \dfrac{\pi}{50}$

통과 대역 중심 주파수 → 공액 복소극의 위상 $\theta_p = \Omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$

통과 대역 대역폭 조건 → 극의 크기 $r_p = 1 - 0.5\Delta\Omega = 0.937$

$$p_{1,2} = r_p e^{\pm j\theta_p} = 0.937 e^{\pm j\pi/2} = \pm j0.937$$

DC와 250[Hz]에서 이득이 0 → $\Omega = 0,\ \pi$인 단위원 상에 영점, 즉 영점은 $z = \pm 1$

$$\therefore\ H(z) = \frac{(z+1)(z-1)}{(z-j0.937)(z+j0.937)} = \frac{z^2-1}{z^2+0.937^2} = \frac{1-z^{-2}}{1+0.878z^{-2}}$$

이 필터의 진폭 응답은 [예제 11-1]과 비슷하지만 중극이 아니므로 첨두가 덜 날카롭고 감쇠가 좀 더 완만하며, 필터 이득이 디지털 주파수 0과 0.5($=\pi$)에서 0이 되는 것이 다른 점이다.

11.7 $H(z) = \dfrac{0.2146z^2 + 0.0930z}{z^3 - 1.2522z^2 + 0.5270z - 0.0821}$

11.8

(a) (i) $T_s = 1$ (ii) $T_s = 0.1$에 대해 디지털 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$(i)\ H(z) = \frac{z}{z-e^{-2}} = \frac{z}{z-0.1353}$$

$$(ii)\ H(z) = \frac{z}{z-e^{-0.2}} = \frac{z}{z-0.8187}$$

아날로그 필터의 DC 이득은

$$H(s)|_{s=j0} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=j0} = 0.5$$

디지털 필터의 이득은

$$(i)\quad H(z)|_{z=1} = \left.\frac{z}{z-0.1353}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.1353} = 1.1565$$

$$(ii)\, H(z)|_{z=1} = \left.\frac{z}{z-0.8187}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.8187} = 5.5157$$

결과에서 알 수 있듯이 임펄스 불변 변환은 DC 이득이 정합되지 않는다.

(b) (i) $T_s = 1$ (ii) $T_s = 0.1$에 대해 디지털 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$(i)\; H(z) = \frac{z}{z-e^{-1}} + \frac{z}{z-e^{-2}} = \frac{z}{z-0.3679} + \frac{z}{z-0.1353}$$

$$(ii)\, H(z) = \frac{z}{z-e^{-0.1}} + \frac{z}{z-e^{-0.2}} = \frac{z}{z-0.9048} + \frac{z}{z-0.8187}$$

아날로그 필터의 DC 이득은

$$H(s) = \left.\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)\right|_{s=j0} = 1.5$$

디지털 필터의 이득은

$$(i)\; H(z)|_{z=1} = \left.\left(\frac{z}{z-0.3679} + \frac{z}{z-0.1353}\right)\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.3679} + \frac{1}{1-0.1353} = 2.7385$$

$$(ii)\, H(z)|_{z=1} = \left.\left(\frac{z}{z-0.9048} + \frac{z}{z-0.8187}\right)\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.9048} + \frac{1}{1-0.8187} = 16.0199$$

(a)와 마찬가지로 임펄스 불변 변환은 DC 이득이 정합되지 않는다.
또한 샘플링 주기가 크면 고주파로 갈수록 주파수 중첩에 의한 이득의 부정합이 두드러진다.

(c) (i) $T_s = 1$ (ii) $T_s = 0.1$에 대해 디지털 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$(i)\; H(z) = \frac{z}{z-e^{-1}} + \frac{z}{z-e^{-2}} = \frac{z}{z-0.3679} - \frac{z}{z-0.1353}$$

$$(ii)\, H(z) = \frac{z}{z-e^{-0.1}} + \frac{z}{z-e^{-0.2}} = \frac{z}{z-0.9048} - \frac{z}{z-0.8187}$$

아날로그 필터의 DC 이득은

$$H(s)|_{s=j0} = \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)_{s=j0} = 0.5$$

디지털 필터의 이득은

$$(i)\; H(z)|_{z=1} = \left.\frac{z}{z-0.3679} - \frac{z}{z-0.1353}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.3679} - \frac{1}{1-0.1353} = 0.4255$$

$$(ii)\, H(z)|_{z=1} = \left.\frac{z}{z-0.9048} - \frac{z}{z-0.8187}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0.9048} - \frac{1}{1-0.8187} = 4.9885$$

(a)와 마찬가지로 임펄스 불변 변환은 DC 이득이 정합되지 않는다.
또한 샘플링 주기가 크면 고주파로 갈수록 주파수 중첩에 의한 이득의 부정합이 두드러진다.

11.9 주파수 미리 휨에 의한 아날로그 차단 주파수 ω_c는

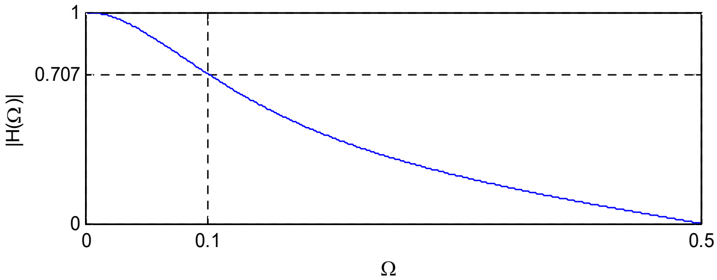
$$\omega_c = \tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \tan(0.1\pi) = 0.3249$$

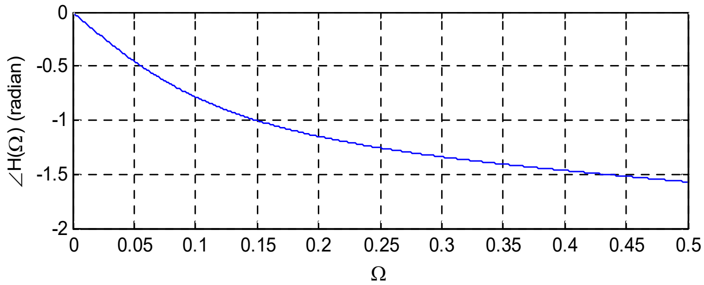
아날로그 필터 전달 함수는

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

$T_s = 2$로 놓으면

$$H(z) = \left.\frac{\omega_c}{s+\omega_c}\right|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.3249}{\frac{z-1}{z+1}+0.3249} = \frac{0.3249(z+1)}{(z-1)+0.3249(z+1)} = \frac{0.2452(z+1)}{z-0.5095}$$





11.10

(a) $H(z) = \frac{z}{z-e^{-2a}} + \frac{z}{z-e^{-2b}} = \frac{z(z-e^{-2b})+z(z-e^{-2a})}{(z-e^{-2a})(z-e^{-2b})} = \frac{2z^2-(e^{-2b}+e^{-2a})z}{(z-e^{-2a})(z-e^{-2b})}$

디지털 필터의 극은 $z_{p1} = e^{-2a}$, $z_{p2} = e^{-2b}$ 이며, 영점은 $z_{z1} = \frac{1}{2}(e^{-2a}+e^{-2b})$, $z_{z2} = 0$

(b) $H(z) = \left.\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\right)\right|_{\frac{z-1}{z+1}}$

$$= \frac{(z+1)((2-a-b)z-(2+a+b))}{((1-a)z-(1+a))((1-b)z-(1+b))} = \frac{(2-a-b)z^2-2(a+b)z-(2+a+b)}{((1-a)z-(1+a))((1-b)z-(1+b))}$$

디지털 필터의 극은 $z_{p1} = \frac{1+a}{1-a}$, $z_{p2} = \frac{1+b}{1-b}$, 영점은 $z_{z1} = -1$, $z_{z2} = \frac{2+a+b}{2-a-b}$

11.11

(a) 전극 필터이므로 저역통과 필터이다.

(b) $H(z) = \left.\dfrac{3}{s^2+3s+3}\right|_{s=4\frac{z-1}{z+1}} = \dfrac{3z^2+6z+3}{31z^2-26z+7}$

(c) $H(z) = H(s)|_{s=3\frac{z-1}{z+1}} = \left.\dfrac{3}{s^2+3s+3}\right|_{s=3\frac{z-1}{z+1}} = \dfrac{3z^2+6z+3}{21z^2-12z+3}$

11.12 $\Omega_c = 2\pi \times \dfrac{500}{10000} = 2\pi \times 0.05 = 0.1\pi$

(a) 차단 주파수 2[kHz]인 저역통과 필터

$$H(z)|_{z=\frac{z'+0.642}{1+0.642z'}} = \frac{\dfrac{z'+0.642}{1+0.642z'}+1}{(\dfrac{z'+0.642}{1+0.642z'})^2 - \dfrac{z'+0.642}{1+0.642z'}z+0.2} = \frac{1.0542z'^2+2.6962z'+1.642}{0.4404z'^2+0.1286z'-0.0298}$$

(b) 차단 주파수 1[kHz]인 고역통과 필터

$$H(z)|_{z=-\frac{z'-0.9021}{1-0.9021z'}} = \frac{-\dfrac{z'-0.9021}{1-0.9021z'}+1}{(\dfrac{z'-0.9021}{1-0.9021z'})^2 + \dfrac{z'-0.9021}{1-0.9021z'}z+0.2} = \frac{1.7159z'^2-3.618z'+1.9021}{0.2607z'^2-0.3512z'+0.1117}$$

(c) 통과 대역 경계 주파수가 1[kHz], 3[kHz]인 대역통과 필터

$h = 0.3820$
$k = 0.2180$
$c_1 = -0.1367$
$c_2 = -0.6420$

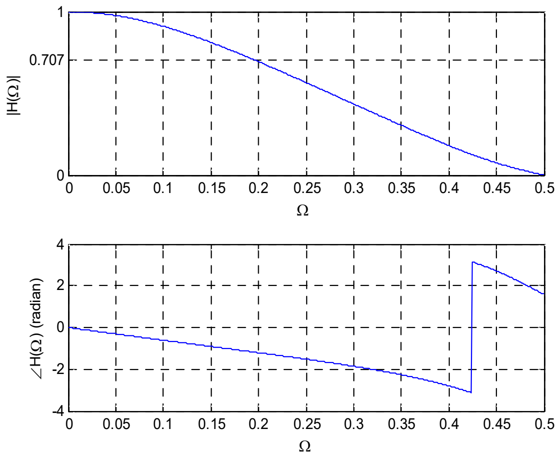
$$H(z') = H(z)|_{z=-\frac{z'^2+c_1z'+c_2}{c_2z'^2+c_1z'+1}} = \frac{1.0543z'^4+0.2245z'^3-2.6963z'^2-0.2245z'+1.642}{0.4404z'^4-0.2873z'^3-0.0876z'^2+0.0719z'-0.0298}$$

(d) 저지 대역 경계 주파수가 2[kHz], 4[kHz]인 대역저지 필터

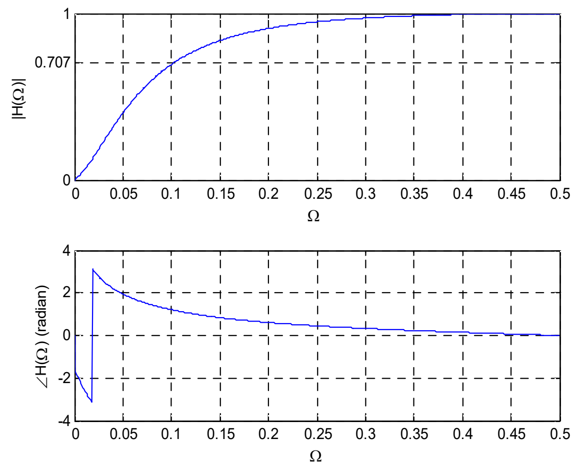
$h = -0.3820$
$k = 0.1151$
$c_1 = 0.6851$
$c_2 = 0.7936$

$$H(z') = H(z)|_{z=\frac{z'^2+c_1z'+c_2}{c_2z'^2+c_1z'+1}} = \frac{1.4234z'^4+2.3162z'^3+4.1557z'^2+2.599z'+1.7936}{0.3324z'^4+0.3589z'^3+0.3687z'^2+0.1326z'-0.0362}$$

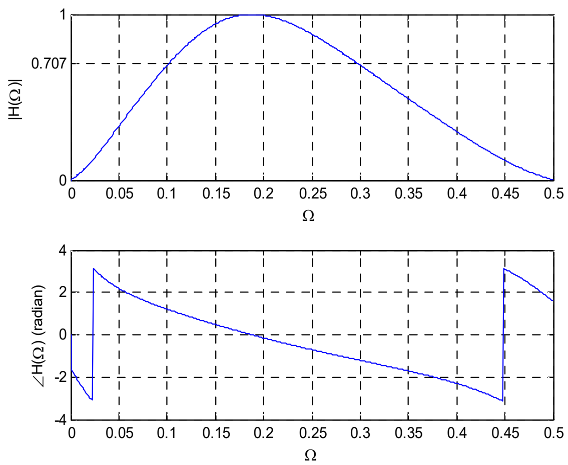
변환된 필터들의 주파수 응답을 매트랩을 이용하여 그려보면 다음과 같다.



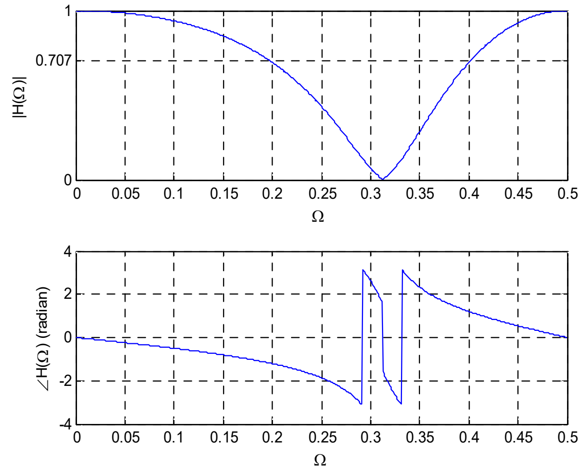
(a) 저역 통과 필터



(b) 고역 통과 필터



(c) 대역 통과 필터



(d) 대역 저지 필터

11.13

(a) 샘플링 주파수 $S=1$[kHz]일 때 차단 주파수가 100[Hz]인 저역 통과 필터

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{0.3249(z+1)}}=\frac{0.1056(z^2+2z+1)}{1.5651z^2-1.7888z+0.6461}$$

(b) 샘플링 주파수 $S=2$[kHz]일 때 차단 주파수가 500[Hz]인 고역 통과 필터

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}=\frac{z^2-2z+1}{3.4142z^2+0.5858}$$

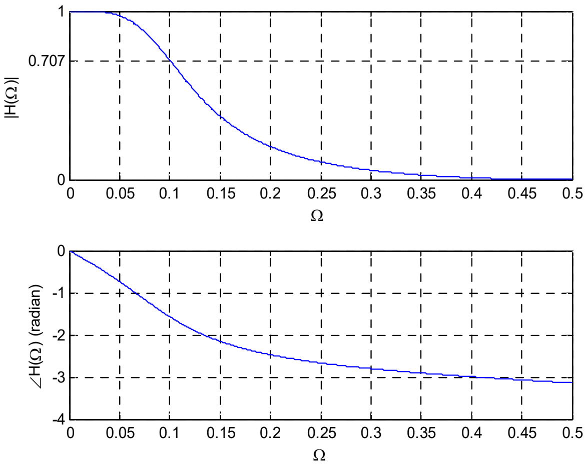
(c) 샘플링 주파수 $S=3$[kHz]일 때 통과 대역 경계 주파수가 400[Hz], 800[Hz]인 대역 통과 필터

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{z^2-0.6766z+1}{0.4452(z^2-1)}}=\frac{0.1982(z^4-2z^2+1)}{1.8728z^4-1.7792z^3+2..0614z^2-0.9272z+0.5686}$$

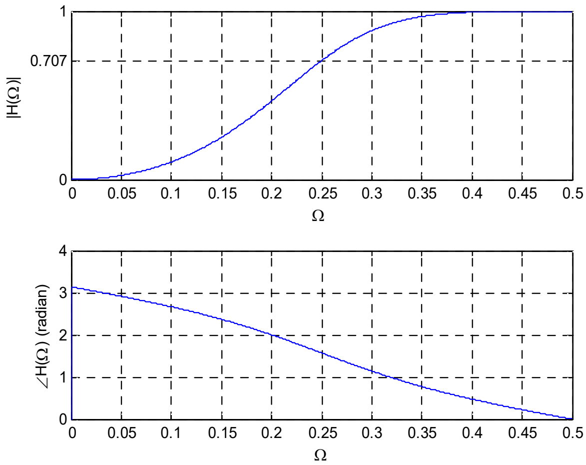
(d) 샘플링 주파수 $S=4$[kHz]일 때 저지 대역 경계 주파수가 1[kHz], 1.2[kHz]인 대역 저지 필터

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{0.1584(z^2-1)}{z^2+0.3168z+1}}=\frac{z^4+0.6336z^3+2.1004z^2+0.6336z+1}{1.2491z^4+0.7046z^3+2.0502z^2+0.5626z+0.8011}$$

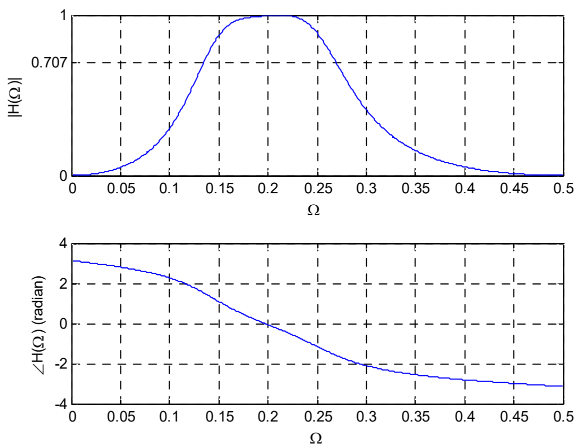
변환된 필터들의 주파수 응답을 매트랩을 이용하여 그려보면 다음과 같다. 프로그램은 바로 앞의 [연습문제 11.5]와 마찬가지이다.



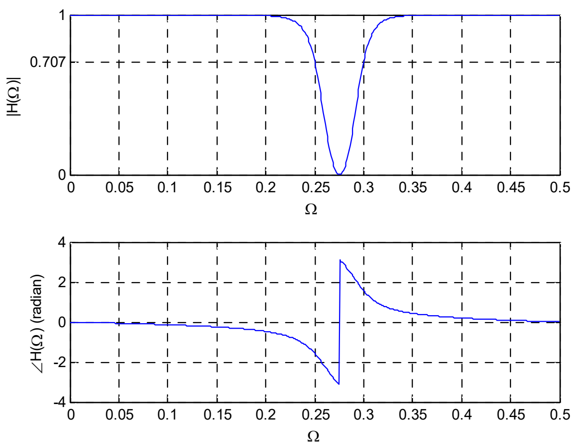
(a) 저역 통과 필터



(b) 고역 통과 필터



(c) 대역 통과 필터



(d) 대역 저지 필터

11.14 주파수 미리 휨하는 것이 필요하다. $T=1$로 두면,

$$\omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2} = \frac{2}{T}\tan 0.15\pi = 1.0191$$

$$\omega_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2} = \frac{2}{T}\tan 0.35\pi = 3.9259$$

먼저 아날로그 버터워스 필터를 설계한다.

$$N=5 \quad \& \quad \omega_c = \omega_{cp} = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{10^{A_p/10}-1}} = 1.1665$$

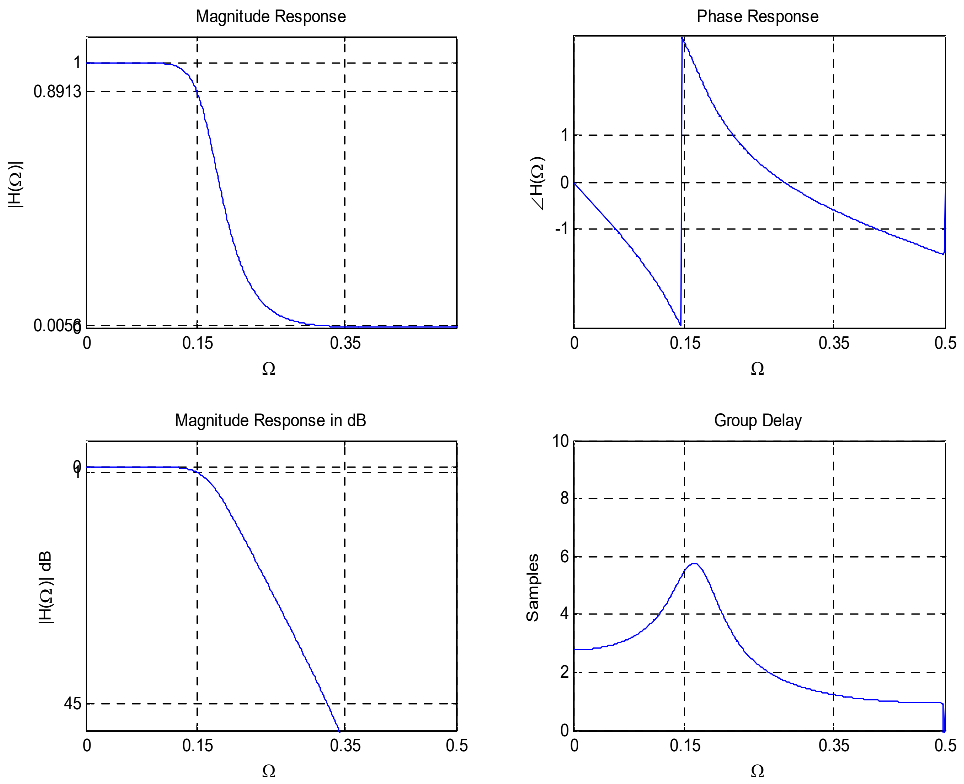
$$H(s) = \frac{2.1602}{(s+(0.3605 \pm j1.1094))(s+(0.9438 \pm j0.6857))(s+1.1665)}$$

$$= \frac{2.1602}{(s^2+0.721s+1.3607)(s^2+1.8876s+1.3609)(s+1.1665)}$$

쌍선형 변환하여 얻은 저역 통과 필터의 전달 함수는 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1}{z^5-1.6169z^4+1.5543z^3-0.7828z^2+0.2231z-0.0263}$$

그리고 설계된 저역 통과 필터의 주파수 응답은 아래 그림과 같다.



11.15 주파수 미리 휨하는 것이 필요하다. $T=1$로 두면,

$$\omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2} = \frac{2}{T}\tan 0.2\pi = 1.4531$$

$$\omega_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2} = \frac{2}{T}\tan 0.4\pi = 6.1554$$

먼저 체비쇼프 필터를 설계해야 한다.

$N=3 \quad \& \quad \omega_c = \omega_p = 1.4531$

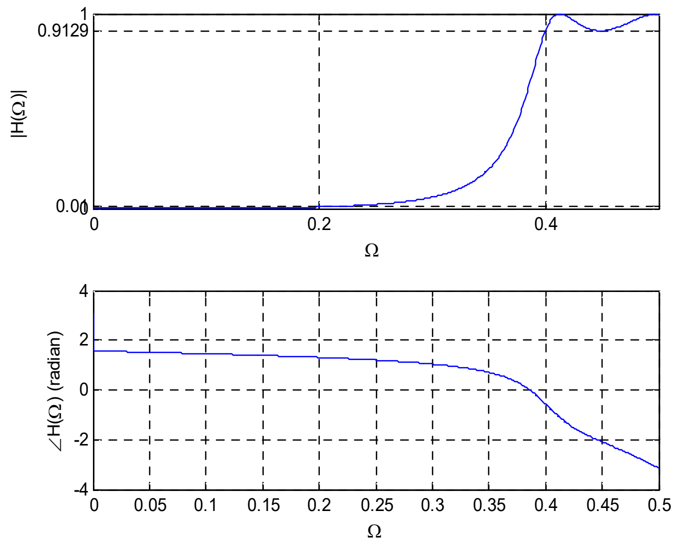
$$H(s) = \frac{1.7149}{(s+0.7815)(s^2+0.7815s+2.1945)} = \frac{1.7149}{s^3+1.563s^2+2.8051s+1.7149}$$

이제 구해진 아날로그 필터를 쌍선형 변환을 이용하여 변환하여 보면

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2(z-1)}{z+1}} = \frac{0.0795z^3+0.2384z^2+0.2384z+0.0795}{z^3-0.9036z^2+0.801z-0.2615}$$

그런데 주어진 문제는 고역통과 필터였으므로 [표 11-5]를 이용하여 LP2HP 대역 변환하면

$$H(z) = \frac{0.0127z^3+0.0381z^2+0.0381z+0.0127}{z^3-2.0887z^2+1.7017z-0.5113}$$



[응용 문제]

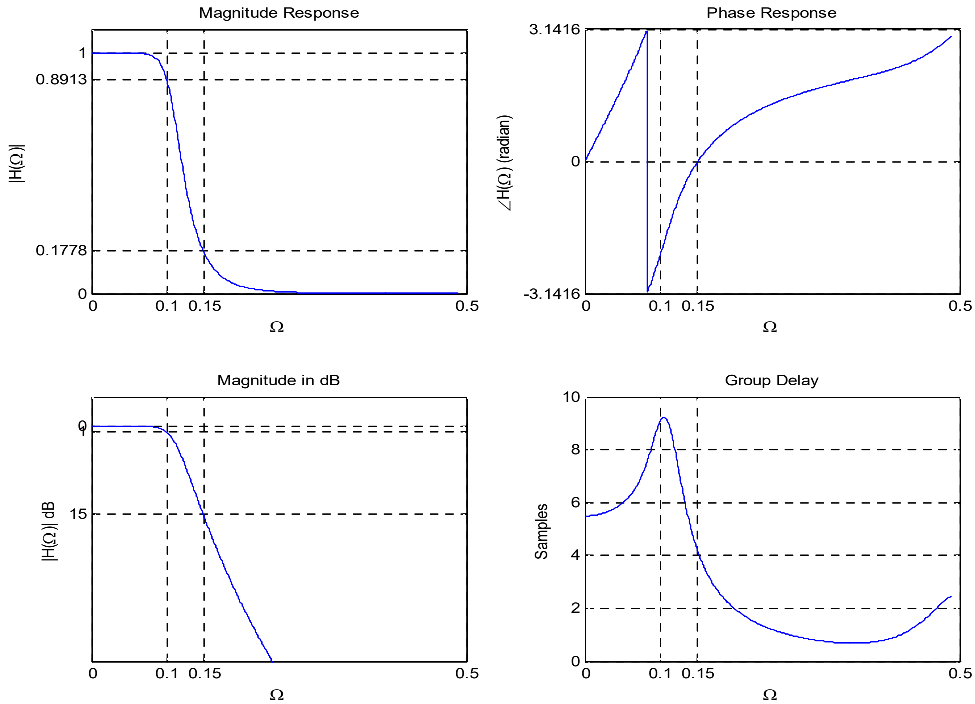
11.16 필터의 차수 $N=6$

설계된 버터워스 원형 필터

$$H(s)=\frac{0.1209}{s^6+2.717s^5+3.691s^4+3.1788s^3+1.8252s^2+0.6644s+0.1209}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.0006z^4+0.0101z^3+0.0161z^2+0.0041z+0.0001}{z^6-3.3635z^5+5.0684z^4-4.2759z^3+2.1066z^2-0.5706z+0.0661}$$



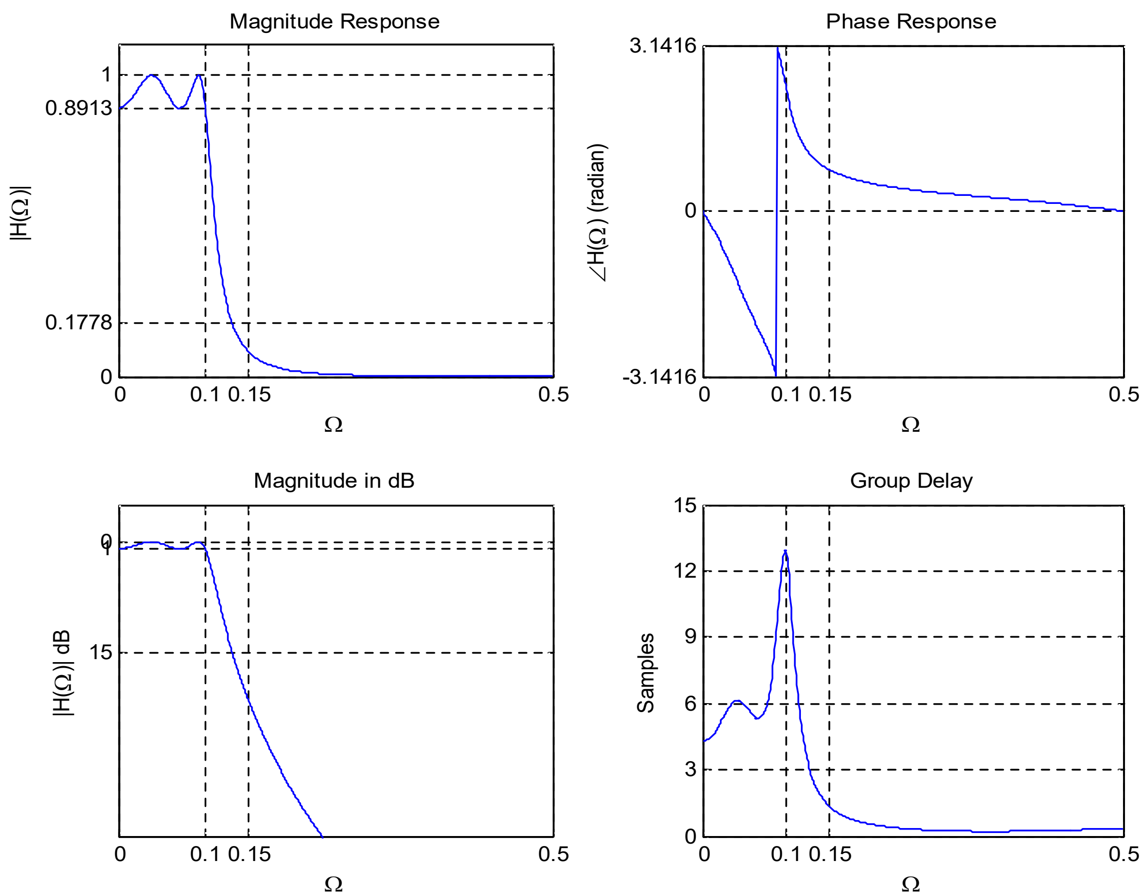
11.17 필터의 차수 $N=4$

설계된 1형 체비쇼프 필터

$$H(s)=\frac{0.2457}{s^4+0.5987s^3+0.574s^2+0.1842s+0.043}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.0345z^2+0.1162z+0.0256}{z^4-3.0591z^3+3.8323z^2-2.2919z+0.5495}$$



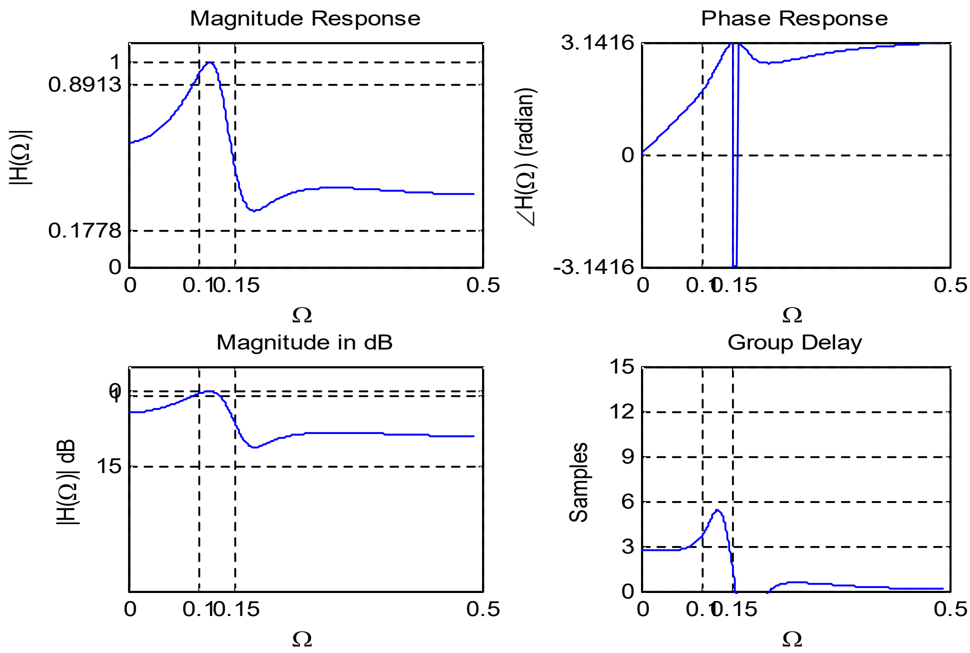
11.18 필터의 차수 $N=4$

설계된 2형 체비쇼프 필터

$$H(s)=\frac{0.1778s^4+1.2637s^2+1.1225}{s^4+2.3696s^3+3.0322s^2+1.9925s+1.1225}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{-0.2435z^4+0.6762z^3-0.5578z^2+0.3282z+0.0166}{z^4-1.6658z^3+1.4289z^2-0.5193z+0.0935}$$



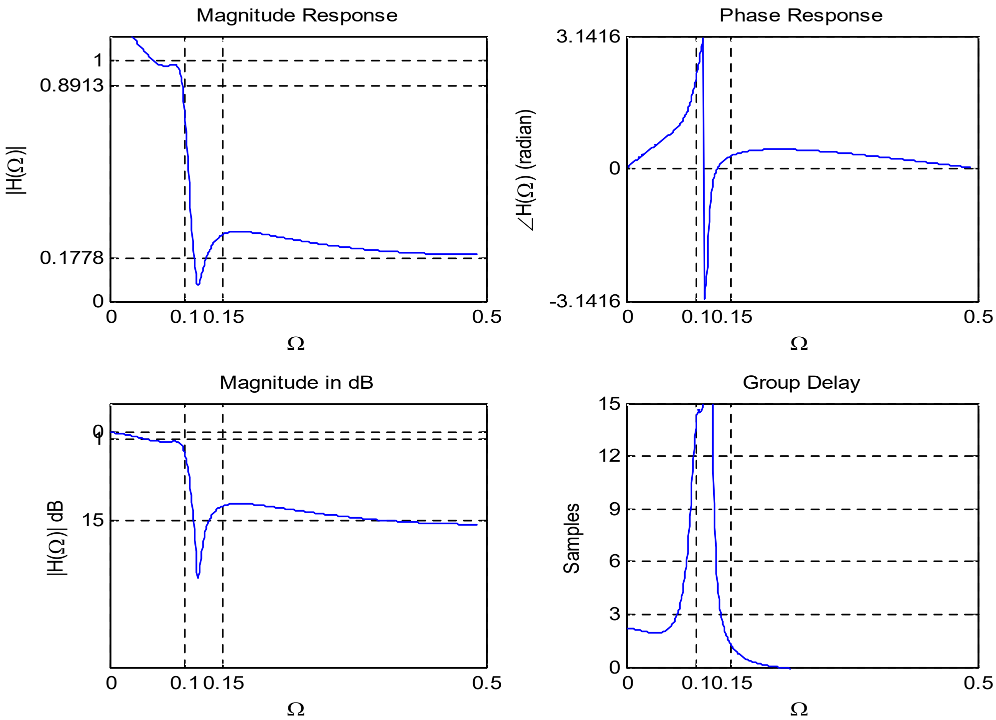
11.19 필터의 차수 $N=3$

설계된 타원형 필터

$$H(s)=\frac{0.296s^2+0.1873}{s^3+0.6161s^2+0.4837s+0.1873}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.296z^2-0.4461z+0.3063}{z^3-2.1192z^2+1.7935z-0.5401}$$



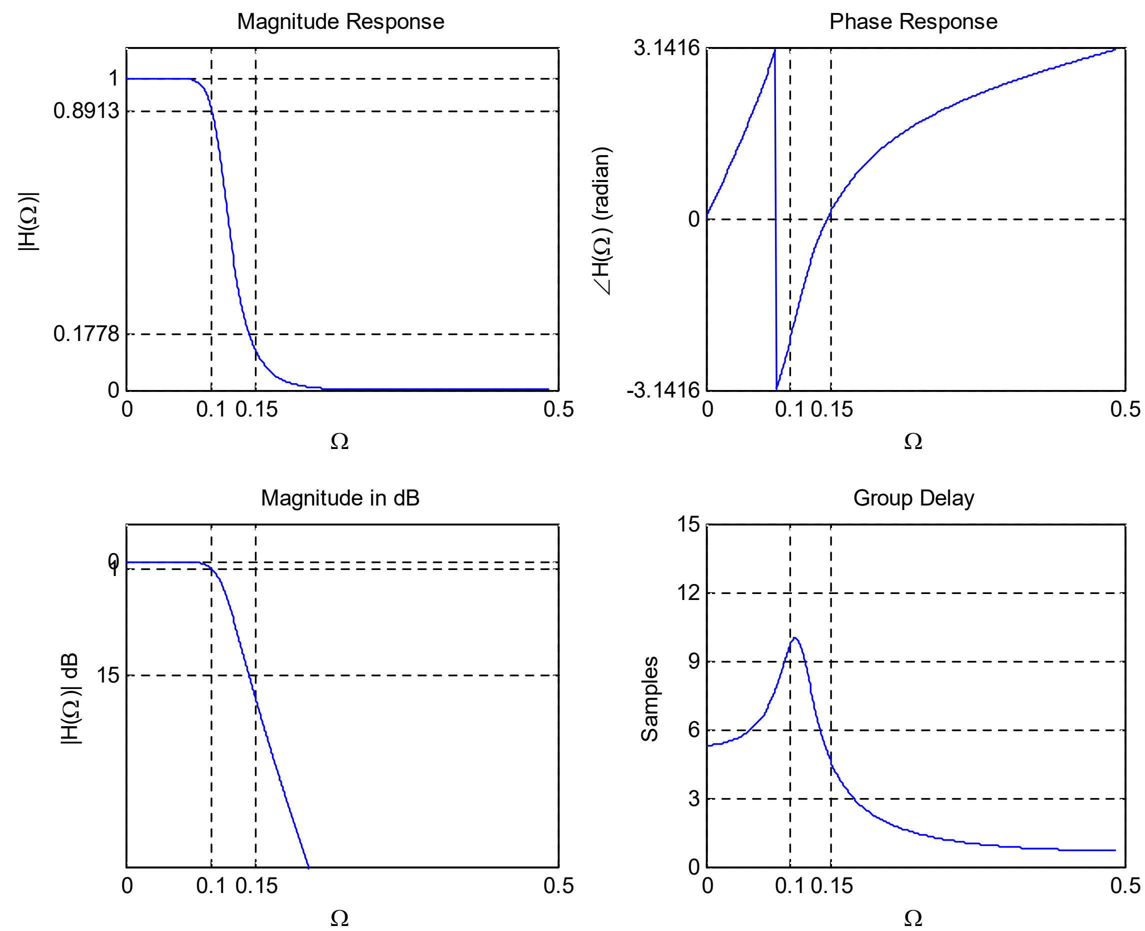
11.20 필터의 차수 $N=6$

설계된 버터워스 필터

$$H(s)=\frac{0.148}{s^6+2.81s^5+3.9482s^4+3.5168s^3+2.0884s^2+0.7862s+0.148}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.0006z^6+0.0035z^5+0.0087z^4+0.0116z^3+0.0087z^2+0.0035z+0.0006}{z^6-3.3143z^5+4.9501z^4-4.1433z^3+2.0275z^2-0.5458z+0.0628}$$



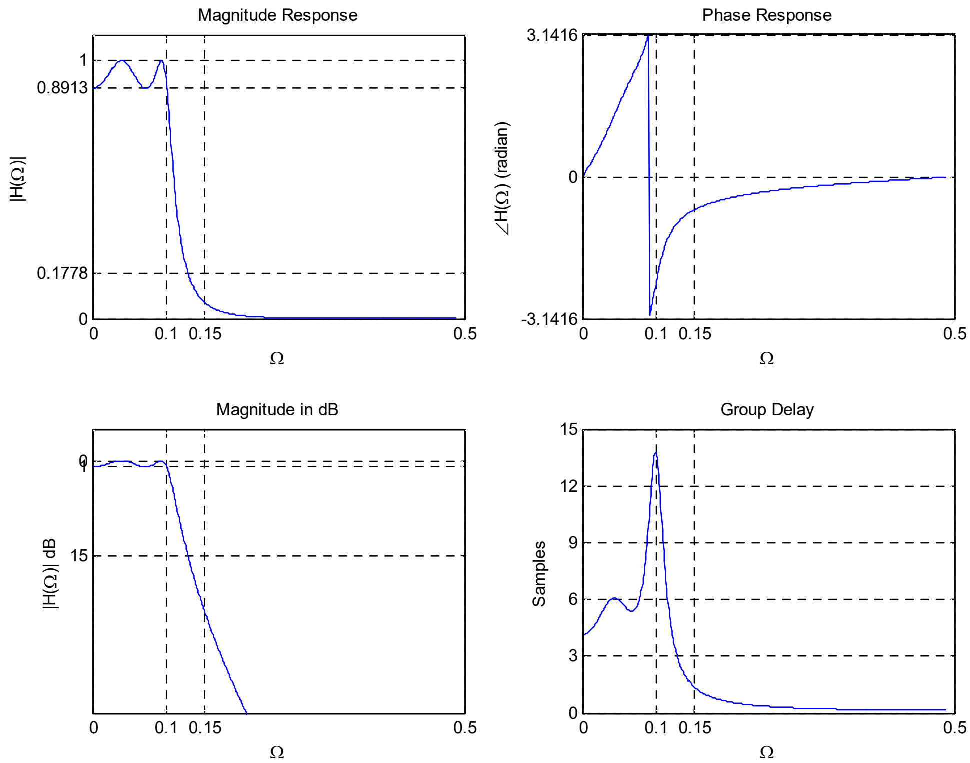
11.21 필터의 차수 $N=4$

설계된 1형 체비쇼프 원형 필터

$$H(s)=\frac{0.2457}{s^4+0.6192s^3+0.614s^2+0.2038s+0.0492}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.0103z^4+0.0412z^3+0.0618z^2+0.0412z+0.0103}{z^4-3.0543z^3+3.829z^2-2.2925z+0.5507}$$



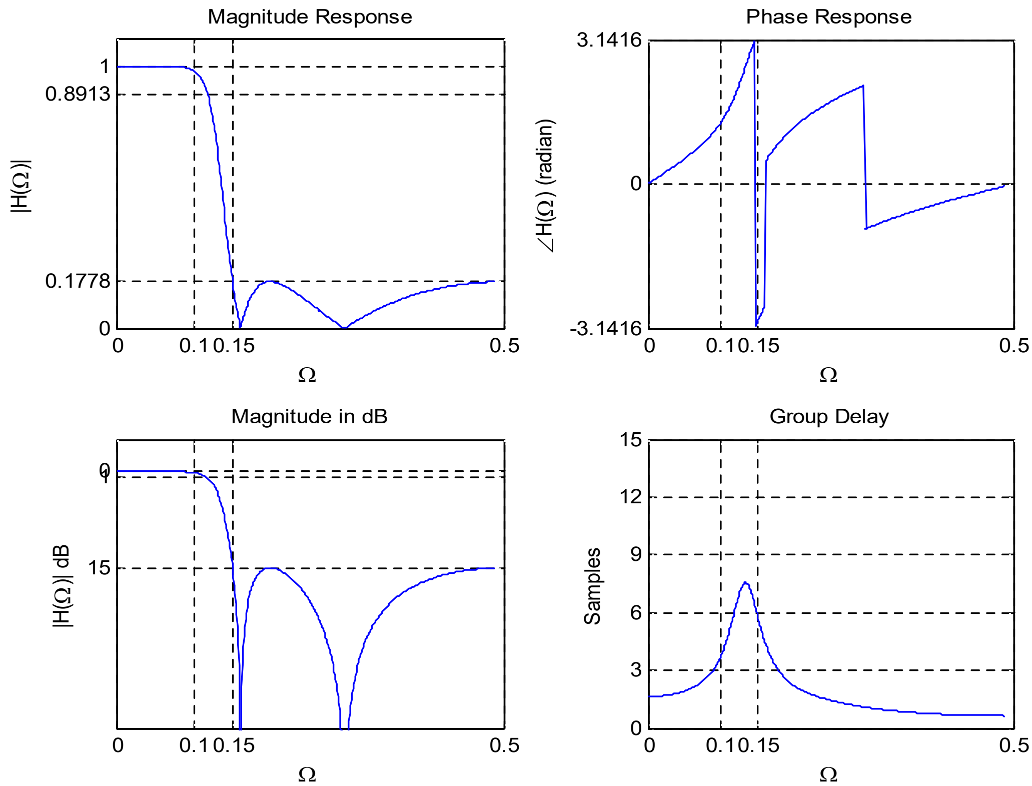
11.22 필터의 차수 $N=4$

설계된 2형 체비쇼프 원형 필터

$$H(s)=\frac{0.1778s^4+1.4773s^2+1.5342}{s^4+2.5621s^3+3.5449s^2+2.5187s+1.5342}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.1797z^4-0.0916z^3+0.2525z^2-0.0916z+0.1797}{z^4-1.5508z^3+1.3423z^2-0.4707z+0.1079}$$



11.23 필터의 차수 $N=3$

설계된 타원형 필터

$$H(s)=\frac{0.3062s^2+0.2072}{s^3+0.6372s^2+0.5174s+0.2072}$$

최종 설계된 디지털 저역 통과 필터

$$H(z)=\frac{0.1214z^3-0.0511z^2-0.0511z+0.1214}{z^4-2.1112z^3+1.7843z^2-0.5325}$$