제 3 장

이산 시스템의 시간 영역 해석

책의 ‘1절 시스템의 임펄스 응답’과 관련하여 시스템 응답의 구분과 해석 대해 예제와 함께 상세히 소개하였고, FIR 및 IIR 시스템의 개념과 특징에 대해서도 예제와 함께 자세한 보충 설명을 덧붙였다.

책의 ‘3절 컨벌루션 합의 계산과 성질’과 관련해서는 컨벌루션 계산의 그림에 의한 접근의 유용함을 풀어서 설명하고 컨벌루션 계산을 잘 익힐 수 있도록 다양하고 충분한 예제들을 제공하였다.

책의 ‘4절 차분 방정식에 의한 이산 LTI 시스템의 해석’과 관련하여 반복 대입법에 대한 간단한 보충 설명뿐만 아니라 차분 방정식의 고전적 해법에 대한 추가적인 이론 설명과 함께 여러 케이스의 예제들을 추가하여 이해를 돕도록 하였다.

책의 ‘5절 임펄스 응답과 시스템의 특성’과 관련해서는 임필스 응답의 물리적 의미에 대한 충분한 보충 설명을 제공하여 쉽게 개념을 이해할 수 있도록 하였고, 임펄스 응답과 시스템 특성의 연관성 문제와 관련하여 특히 안정성에 대해 추가적인 설명을 상세하게 제시하였으며, 필터 등의 시스템을 다룰 때 확실하게 알아두어야 할 시정수의 개념을 최대한 쉽고 충분한 정도로 소개하였다. 또한 계단 응답과 임펄스 응답의 관계에 대해서도 예제와 함께 소개하였다.

1장부터 3장까지에 대한 책의 내용과 심화 학습 자료를 잘 학습한다면, 주파수 영역 해석을 제외한 신호 및 시스템 관련 이론적 기초는 튼튼히 쌓아둘 수 있을 것이다.

3.1 시스템의 임펄스 응답

3.1.1 시스템 응답의 구분과 해석

시스템 해석은 크게 보아 시간 영역과 주파수 영역의 두 가지 접근이 가능하며, 그 중에서 *시스템의 입력과 출력을 시간의 함수로 표현하여 상호 관계를 수식으로 나타내고 특성을 분석하는 것이 시스템의 시간 영역 해석이다.*

시간 영역에서 이산 시스템의 입출력 관계는 보통 차분 방정식으로 표현되며, 이 방정식의 해가 바로 시스템의 출력(응답)이 된다. 방정식을 풀어 얻어지는 해는 물론 하나이지만, 시스템의 동작을 파악하는 관점에 따라 성분을 나누어 서로 다른 물리적 의미를 부여할 수 있는데, [표 C3-1]에 나타낸 것처럼 3 가지의 분류가 널리 이용되고 있다.

[표 C3-1] 시스템 응답의 분류

구분 기준	시스템 응답 분류	
초기상태 및 입력 유무	영입력 응답 (zero input response)	영상태 응답 (zero state response)
시스템 모드 포함 여부	고유 응답 (natural response)	강제 응답 (forced response)
평형 상태 도달 여부	과도 응답 (transient response)	정상상태 응답 (steady state response)

[표 C3-1]의 첫 번째 구분 기준은 시스템을 여기하는 에너지(자극)가 어디에서 비롯된 것인가 하는 것이다. 시스템은 자신을 동작하도록 이끄는 힘이 외부에서 온 것인지 아니면 내부에 숨어 있던 것인지 분간할 수 있는 능력이 없으므로 둘의 영향을 하나로 뭉뚱그린 출력을 내보내지만, 시스템 특성을 파악하고 분석하는 차원에서 둘을 구분하여, 외부의 개입이 전혀 없는 상황에서 일어나는 시스템의 반응을 영입력 응답, 순전히 외부 입력만에 대한 시스템의 반응을 영상태 응답이라고 한다.
영입력 응답과 영상태 응답은 책에 정의와 의미가 잘 설명되어 있다.

두 번째 구분은 응답을 구성하는 기본 항들의 꼴을 시스템의 고유한 특성을 드러내는 성분과 입력과 같은 꼴을 갖는 성분으로 나눈 것이다. 전자의 경우, 시스템이 바뀌지 않는 한 *입력의 형태와는 상관없이 항상 같은 꼴의 항(이를 시스템의 (특성)모드라고 한다)들로 이루어지므로 시스템 자체의 고유성을 반영한 응답이라는 의미에서 고유 응답*이라 하고, 후자의 경우는 *외부에서 넣어준 입력에 의해 시스템의 자체적인 특성과는 무관하게 강제적으로 입력과 같은 꼴의 반응을 산출했다는 의미에서 강제 응답*이라고 한다. 미분/차분 방정식의 고전적인 풀이법에서 구하는 특이해가 바로 강제 응답에 해당되고 완전해에서 이 특이해를 제외한 나머지 해, 즉 초기 조건에 의해 적분 상수 값이 결정된 동차해가 고유 응답이 된다.

영입력 응답은 외부에서 인가되는 입력과는 무관한 응답 성분이므로 전적으로 고유 응답에 속한다. 이와 달리 영상태 응답의 경우에는 외부 입력이 시스템을 거치면서 고유 응답 성분과 강제 응답 성분을 함께 가지게 된다. 즉, 고유 응답은 영입력 응답에 영상태 응답 중의 시스템 모드 항들을 더한 것이고, 강제 응답은 영상태 응답 중에서 시스템 모드 항들을 뺀 나머지이다.

마지막 세 번째 구분은 시스템의 평형 상태 도달 여부가 그 기준으로, *시스템이 작동되기 시작하여 평형 상태에 도달하기까지의 진행 과정에서 나온 출력을 정상적인 동작이 이루어지기 전의 응답이라는 의미에서 과도 응답*이라 하고 *시스템이 평형 상태에 도달하여 그 후 변화 없이 안정적으로 유지되는 응답을 정상 상태 응답*이라고 한다. 이 구분은 출력 구성 성분들의 물리적 속성(의미)이 아니라 단지 출력을 시간적으로 두 구간으로 나누었다는 점에서 앞의 두 가지 구분과는 바탕 개념이 다르며, 평형 상태가 존재해야 하므로 안정한 시스템에만 적용 가능하다.

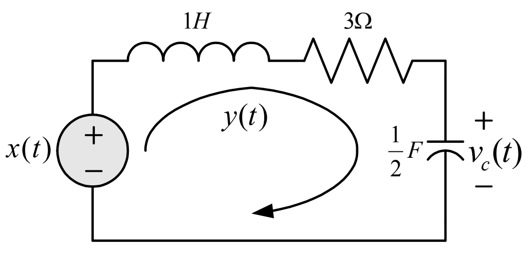
과도 응답은 시스템이 평형 상태에 도달하면 더 이상 나타나지 않아야 하므로 결국 응답 성분 중에서 시간의 흐름에 따라 감쇠하여 사라지는 성분들로 이루어진다. 평형 상태를 갖는 안정한 시스템의 경우, 시스템 모드 항들이 감쇠 지수 함수이므로 고유 응답이 과도 응답, 강제 응답이 정상상태 응답으로 대응되는 경우가 대부분이지만 항상 그런 것은 아니다. 왜냐하면 강제 응답은 입력의 닮은꼴이므로, 시스템에 인가되는 입력의 형태에 따라 과도 응답 성분을 가질 수 있기 때문이다. 예를 들어, 입력이 감쇠 지수 함수인 경우에는 강제 응답도 감쇠 지수 함수가 되어 시간이 흐름에 따라 결국에는 그 값이 0이 된다. 이 경우 고유 응답과 강제 응답을 모두 합한 것이 과도 응답이 되고 정상 상태 응답은 0이 된다. 그러나 입력이 상수인 경우에는 강제 응답 역시 상수항이 되므로 고유 응답은 과도응답, 그리고 강제 응답은 정상 상태 응답과 일치한다.

지금까지 설명한 시스템 응답의 분류는 시스템의 동작 특성을 이해하는 데 매우 중요하므로 잘 익혀 두어야 할 것이다.

■ **예제 C3-1 : *시스템 응답의 구분 - RLC 직렬회로의 폐로 전류***

[그림 C3-1]과 같은 RLC 직렬회로의 폐로 전류를 이 회로의 출력이라 할 때, 영입력 응답과 영상태 응답, 고유 응답과 강제 응답, 과도 응답과 정상상태 응답으로 구분해보라.

단 입력 전압은 $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$이고, 초기 조건은 $y(0^-) = 0,\ v_C(0^-) = 5$이다.



[그림 C3-1] RLC 회로

<풀이>
회로 방정식이 다음과 같으므로

$$x(t) = Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int y(t)dt$$
$$= 3y(t) + \frac{dy(t)}{dt} + 2\int y(t)dt$$

이를 다시 쓰면

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

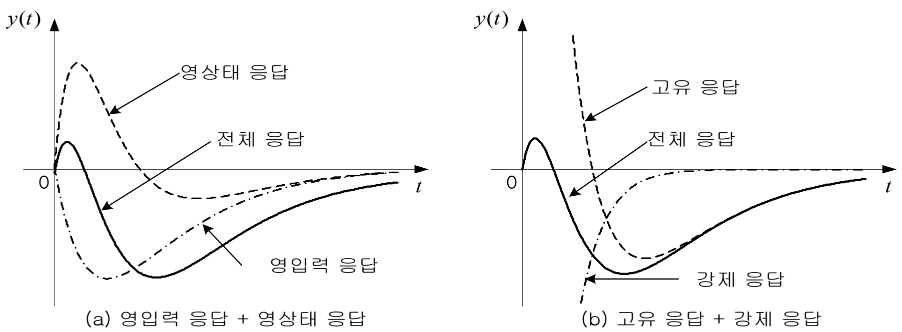
과 같고, 아 미분 방정식을 풀면 회로의 출력, 즉 폐로 전류 $y(t)$를 구할 수 있는데, $y(t)$는 다음과 같이 각각 구분하여 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= [-5e^{-t}+5e^{-2t}] \ + \ [-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t}] \\ &= [\text{영입력 응답}] \ + \ [\text{영상태 응답}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= [-10e^{-t}+25e^{-2t}] \ + \ [-15e^{-3t}] \\ &= [\text{고유 응답}] \ + \ [\text{강제 응답}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= [-10e^{-t}+25e^{-2t}-15e^{-3t}] \ + \ [0] \\ &= [\text{과도 응답}] \ + \ [\text{정상상태 응답}] \end{aligned}$$

[그림 C3-2]의 (a)는 영입력 응답과 영상태 응답의 합으로, (b)는 고유 응답과 강제 응답의 합으로 폐로 전류 $y(t)$를 나타낸 것이다.



[그림 C3-2] RLC 회로의 응답

그림에서 보듯이 두 분류의 각 성분들의 변화 추이가 매우 다름을 알 수 있다. 또한 시간이 지남에 따라 $y(t)$가 0으로 가므로 그림의 $y(t)$ 파형 자체가 과도 응답이 되고 정상상태 응답이 0인 것을 확인할 수 있다. ■

3.1.2 FIR 시스템과 IIR 시스템

(책)[예제 2-5]에서 다루었던 입력의 평균값을 구하는 문제를 다시 생각해보자. 문제를 좀 더 일반화하여 $m+1$개의 입력 신호의 평균값을 구한다고 하면 입출력 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} x[n-k] = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m+1}x[n-k] \tag{C3-1}$$

이 시스템의 임펄스 응답을 $h[n]$이라 하고 입출력 관계를 컨벌루션으로 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{C3-2}$$

총합 하한이 0이 된 것은 시스템이 인과적이기 때문이다.

식 (C3-1)의 m이 유한한 경우와 m이 매우 커서 무한대에 가까워지는 두 가지 경우로 나누어 살펴보자.

먼저 $m=q$로 유한한 경우, $\frac{1}{m+1} = h[k]$로 치환하면 식 (C3-1)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{q} h[k]x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[q]x[n-q] \end{aligned} \tag{C3-3}$$

식 (C3-3)은 임펄스 응답의 길이가 유한한 FIR 시스템의 컨벌루션 표현이다.
만약 $\frac{1}{m+1} = b_k$로 치환하게 되면 식 (C3-1)은 다음과 같이 이동 평균(MA) 항으로만 이루어진 차분 방정식이 된다.

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_q x[n-q] \tag{C3-4}$$

식 (C3-3)과 식 (C3-4)을 비교하면, 차분 방정식의 상수 계수 b_k가 FIR 시스템의 임펄스 응답 $h[k]$와 같으면 차분 방정식 표현과 컨벌루션 표현이 완전히 일치함을 알 수 있다. 다시 말해 *FIR 시스템의 차분 방정식은 입력의 이동 평균 항들로만 구성된다.*

m이 매우 클 경우에는 이런 방법으로 해서는 식 (C3-2)와 등가인 차분 방정식의 항의 개

수가 무한히 커지므로 소용이 없다. 따라서, 컨벌루션 표현과 차분 방정식의 관계를 이끌어 낼 수 있도록 식을 바꾸어 나타내보자. (책)[예제 2-5]에서와 같은 방법으로 직전의 출력 $y[n-1]$을 이용하여 식 (C3-1)을 다시 쓰면

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\left(x[n] + \sum_{k=0}^{m} x[n-1-k] - x[n-m-1]\right) \tag{C3-5}$$

$$= y[n-1] + \frac{1}{m+1}x[n] - \frac{1}{m+1}x[n-m-1]$$

식 (C3-5)은 식 (C3-1)과 달리 m이 얼마가 되든지 간에 단지 3개의 항만을 사용하여 시스템의 입출력 관계를 차분 방정식 형태로 표현하고 있다.

이 예로부터 식 (C3-2)의 총합 상한이 ∞가 되는 *IIR 시스템은 식 (C3-5)와 같이 자기 회귀(AR) 항을 포함하는 차분 방정식으로 나타낼 수 있음*을 미루어 알 수 있다.

식 (C3-1)을 식 (C3-5)로 변환하는 데 m의 크기에 대한 특별한 조건이 없으므로 FIR 시스템의 경우에도 얼마든지 자기 회귀 항을 포함하는 차분 방정식으로 표현을 변환할 수 있으며, 실제 응용에서 그렇게 하는 것이 더 효율적인 경우도 많다.

■ 예제 C3-2 : *IIR 시스템의 차분 방정식*

임펄스 응답이 $h[n] = (0.5)^n u[n]$인 이산 인과 LTI 시스템의 차분 방정식 표현을 구하라.

<풀이>

임펄스 응답이 길이가 무한한 지수 함수이므로 이 시스템은 IIR 시스템이다. 따라서 입출력 관계를 컨벌루션으로 나타내면

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^k x[n-k] \tag{C3-6}$$

$$= x[n] + 0.5x[n-1] + 0.5^2 x[n-2] + \cdots + 0.5^k x[n-k] + \cdots$$

식 (C3-6)으로부터 $y[n-1]$의 경우를 다시 쓰면

$$y[n-1] = \sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^{k+1} x[n-1-k]$$

$$= x[n-1] + 0.5x[n-2] + 0.5^2 x[n-3] + \cdots + 0.5^{k-1} x[n-k] + \cdots$$

식 (C3-6)에서 위의 식에 0.5를 곱하여 빼면 바로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \tag{C3-7}$$

식 (C3-7)의 차분 방정식이 과연 식 (C3-6)의 시스템이 맞는지 반복 대입에 의해 임펄스 응답을 구함으로써 확인해보자. $x[n]=\delta[n]$이라 두고 식 (C3-7)을 다시 정리하면

$$h[n]=0.5h[n-1]+\delta[n]$$

$n=0$에서부터 순차적으로 $h[n]$의 값을 구하면

$$\begin{array}{lll} n=0 & : & h[0]=0.5h[-1]+\delta[0]=1 \\ n=1 & : & h[1]=0.5h[0]+\delta[1]=0.5 \\ n=2 & : & h[2]=0.5h[1]+\delta[2]=(0.5)^2 \\ n=3 & : & h[3]=0.5h[2]+\delta[3]=(0.5)^3 \\ & & \vdots \\ n=k & : & h[k]=0.5h[k-1]+\delta[k]=(0.5)^k \\ & & \vdots \end{array}$$

식 (C3-7)의 차분 방정식에 의한 임펄스 응답이 $h[n]=(0.5)^n u[n]$으로 구해지므로 두 식은 같은 시스템을 표현한 것이 맞다. 그러므로 식 (C3-7)은 식 (C3-6)의 IIR 시스템을 차분 방정식으로 바꾸어 나타낸 것이다.

식 (C3-6)은 무한개의 시간 지연 소자와 곱셈기, 그리고 덧셈기를 필요로 하므로 물리적으로 구현이 불가능하지만, 식 (C3-7)은 시간 지연 소자, 곱셈기, 덧셈기가 각각 하나씩만 있으면 간단히 시스템을 구현할 수 있다. 여러분들은 어떤 식을 사용하겠는가? ■

3.2 이산 LTI 시스템의 컨벌루션 표현

3.3 컨벌루션 합의 계산과 성질

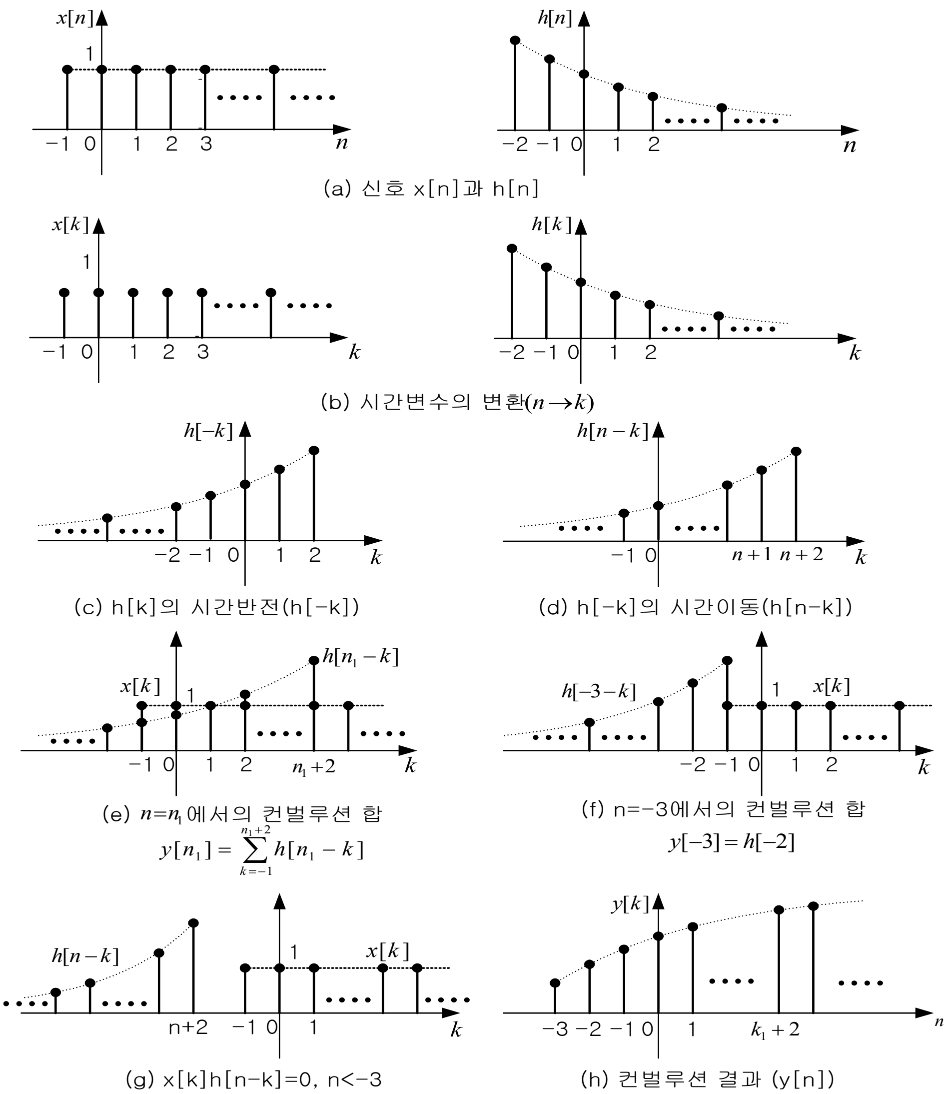
컨벌루션은 두 신호 중 하나를 뒤집어 시간 $-\infty$에서부터 미끄러뜨려 오른쪽으로 끌고 오면서 매 시간 순간마다 고정 신호와 곱한 결과를 모든 더하여 그 순간의 계산 값으로 취하는 연산으로서, 계산이 진행되는 시간축과 결과가 표시되는 시간축을 혼동하면 안 된다는 것을 강조한 바 있다.
이를 좀 더 자세히 알아보기 위해 먼저 [그림 C3-3]의 경우를 살펴보자.

우선 그림 (a)에 주어진 신호 $x[n]$와 $h[n]$에 대해 (b)와 같이 시간 변수를 k로 변환한 뒤, (c)에서처럼 두 신호 중 하나(여기서는 $h[k]$)를 시간 반전시키면 $h[-k]$가 된다. 그런 다음 이를 n만큼 이동시키면 (d)와 같이 $h[n-k]$가 얻어진다. $h[n-k]=h[-(k-n)]$이므로 n이 양의 값이면 오른쪽으로 이동하고 음의 값이면 왼쪽으로 이동된다.

특정한 시간 $n=n_1$에서의 컨벌루션 값 $y[n_1]$은 (e)의 그림처럼 두 신호 $x[k]$와 $h[n_1-k]$를

곱하여 얻어진 결과의 각 샘플 값들을 전부 더한 것으로서, $y[n_1]$은 (h)에 보인 것처럼 시간 축을 n으로 하는 평면에 표시된 $y[n]$ 곡선 상의 한 점이 된다. 다시 n 값을 변화시켜 같은 작업을 반복하면 $y[n]$ 곡선 상의 또 다른 점의 값을 얻을 수 있다.(그림 (f)) 그런데 $n<-3$ 이면 $x[k]$와 $h[n-k]$가 겹치는 부분이 없어서 구태여 컨벌루션 계산을 수행할 필요가 없음을 알 수 있으며(그림 (g)), 보통의 경우에는 이 과정을 $-\infty$와 $+\infty$ 사이의 모든 n 값에 대해 반복함으로써 완전한 컨벌루션 결과 $y[n]$을 구하게 된다.(그림 (h))

이처럼 그림을 이용하면 컨벌루션 계산을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.



[그림 C3-3] 컨벌루션 합의 도해적 설명

■ 예제 C3-3 : *미끄럼 방식에 의한 컨벌루션 계산*

이산 LTI 시스템에 [그림 C3-4(a)]의 $x[n]$을 입력으로 넣었을 때 출력이 [그림 C3-4(b)]의 $y[n]$과 같이 되는 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 구하고, 이를 이용하여 [그림

C3-4(c)]의 $s[n]$을 입력으로 할 때의 시스템 출력 $z[n]$을 구하라.

<풀이>
먼저 임펄스 응답을 구하기 위해 $x[n]$을 임펄스 성분으로 분해해보면 $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$이다. 이에 대한 출력은 $y[n]=h[n]+h[n-1]$이 된다. 여기에 n을 1씩 증가시켜가며 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{array}{llll} n=0 & : & y[0]=h[0]=0 & \therefore h[0]=0 \\ n=1 & : & y[1]=h[1]+h[0]=1 & \therefore h[1]=1 \\ n=2 & : & y[2]=h[2]+h[1]=2 & \therefore h[2]=1 \\ n=3 & : & y[3]=h[3]+h[2]=1 & \therefore h[3]=0 \end{array}$$

이렇게 구해진 임펄스 응답 $h[n]$을 [그림 C3-4(d)]에 나타내었다.

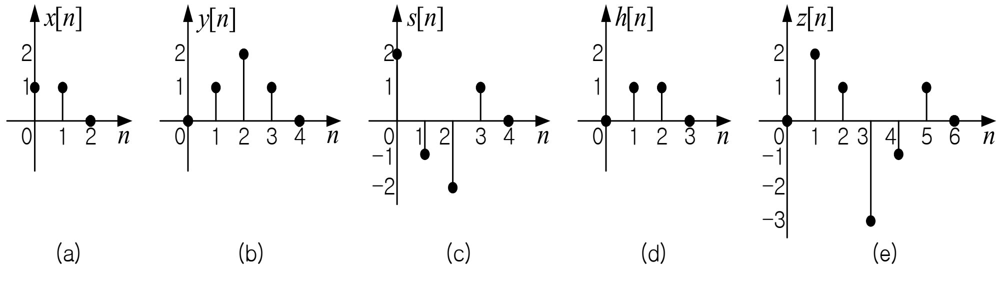
이제 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 알고 있으므로 입력 $s[n]$에 대한 시스템 출력 $z[n]$을 컨벌루션을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$z[n]=s[n]*h[n]=\sum_{k=0}^{3}s[k]\,h[n-k]$$

이 컨벌루션에 대한 미끄럼 방식 계산표를 작성하면 [표 C3-2]와 같고, 이에 의해 구해진 출력 $z[n]$을 [그림 C3-4(e)]에 보였다.

[표 C3-2]의 작성은 칸이 질러진 두 개의 테이프에 하나는 왼쪽 끝에서부터 각 칸에 순서대로 $s[k]$의 값을 적고($\boxed{2}\boxed{-2}\boxed{-1}\boxed{1}$) 다른 하나는 정반대로 오른쪽 끝에서부터 순서대로 $h[k]$의 값을 적어($\boxed{1}\boxed{1}$) $h[k]$의 값이 적힌 테이프를 $s[k]$의 값이 적힌 테이프 아래에 두고 오른쪽으로 한 칸씩 미끄러뜨리면서 그때마다 겹쳐지는 값들을 곱해서 모두 더해 새로운 테이프에 차례로 적어 넣는 동작과 동일하다.

계산표를 작성하든지 테이프를 이용하든지 어느 경우이든 간에 컨벌루션되는 두 신호의 겹침이 시작되고 끝나는 n값을 미리 알면 편한데, 이것은 컨벌루션의 길이와 끝에 대한 성질을 이용하면 된다. ■



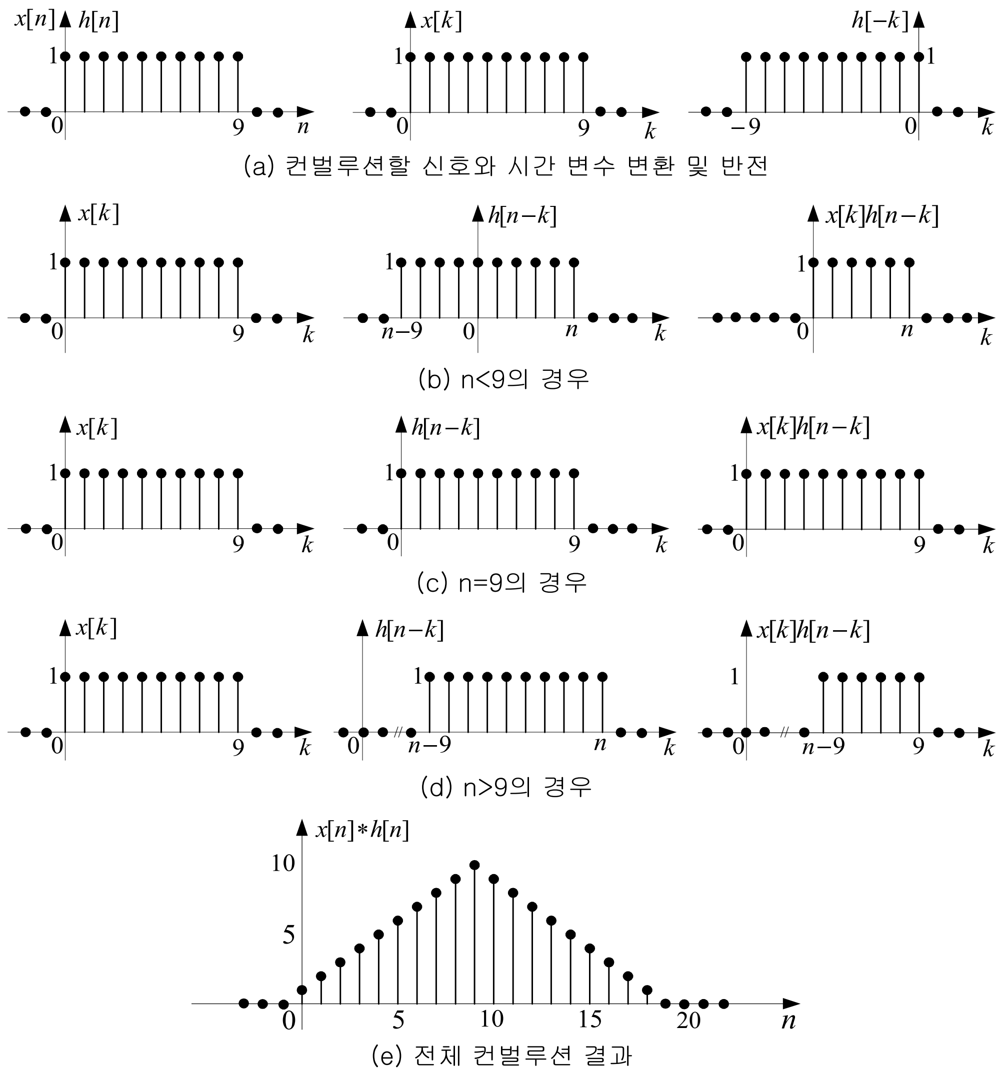
[그림 C3-4] 예제 C3-3의 신호들

[표 C3-2] [예제 C3-3]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산표

	$n \backslash k$	0	1	2	3	
$s[k]$		2	-1	-2	1	$z[n]$
$h[n-k]$	1	1				2
	2	1	1			1
	3		1	1		-3
	4			1	1	-1
	5				1	1

■ 예제 C3-4 : *컨벌루션 계산의 구간 분할*

[그림 C3-5(a)]에 주어진 $x[n]$과 $h[n]$의 컨벌루션을 구하라.



(a) 컨벌루션할 신호와 시간 변수 변환 및 반전

(b) n<9의 경우

(c) n=9의 경우

(d) n>9의 경우

(e) 전체 컨벌루션 결과

[그림 C3-5] [예제 C3-4]의 컨벌루션 계산의 구간 분할

<풀이>

두 신호는 같은 신호로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x[n] = h[n] = u[n] - u[n-10] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

그림 (b)와 같이 시간축을 n에서 k로 바꾸고 $h[k]$을 뒤집은 뒤 이동시키면, $n<0$ 또는 $n>18$ 구간에서는 $x[k]$와 $h[n-k]$이 겹치지 않으므로 컨벌루션 값이 0이 된다. 따라서 구간 $0 \leqq n \leqq 18$에 대해서만 계산을 진행하면 된다.

$n=0$일 때는 하나의 샘플만 겹치므로 컨벌루션 값은 1이고, $h[-k]$을 오른쪽으로 미끄러뜨리면 겹치는 샘플의 개수가 하나씩 늘어나서 컨벌루션 값은 1씩 증가하게 된다. 이 경우가 그림 (c)이다. $n=9$가 되면 그림 (d)에 보인 것처럼 $h[-k]$은 $x[k]$와 완전히 겹쳐져서 컨벌루션의 값이 최대가 된다. 계속해서 $h[-k]$을 미끄러뜨리면 겹쳐지는 부분이 하나씩 줄어들게 되어 컨벌루션 값도 1씩 감소한다. 이 경우는 그림 (e)에 해당된다. $n=19$가 되면 더 이상 겹치는 샘플이 존재하지 않으므로 컨벌루션의 계산도 끝난다. 원래 컨벌루션은 모든 시간 값에 대해 수행되어야 하지만, 이처럼 고정 신호와 반전 이동 신호가 겹쳐지는 양상에 따라 구간을 나누어 몇 번 정도만 계산을 하면 된다. 이렇게 얻어진 최종 결과가 그림 (f)이며, 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 9 \\ 19-n, & 10 \le n \le 18 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

컨벌루션의 성질에 의하면, $x[n]$과 $h[n]$이 $0 \leqq n \leqq 9$에서 값을 갖고 길이는 $N_x = N_h = 10$이므로, $y[n] = x[n] * h[n]$은 $0 \leqq n \leqq 18$에서 값을 갖고 $N_y = N_x + N_h - 1 = 19$인 신호가 되는데, [그림 C3-5(f)]에서 확인할 수 있다. 만일 컨벌루션을 계산하여 얻은 결과가 위와 같이 예측한 길이와 끝을 만족시키지 않는다면 계산이 잘못된 것이라고 보면 된다.
[그림 C3-5]의 계산표를 작성하기에는 약간 번거로우므로 더 간단한 테이프 방법을 이용하여 나타내면 [그림 C3-6]과 같이 된다. [그림 C3-6]을 보면 테이프 방법이 간단할 뿐만 아니라 컨벌루션 계산에 매우 효과적이라는 것을 느낄 수 있을 것이다. ■

$n=0$: $x[k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$h[n-k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 →
⋮
$0<n<9$: $x[k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$h[n-k]$ → 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 →
⋮
$n=9$: $x[k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$h[n-k]$ → 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 →
⋮
$9<n<18$: $x[k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$h[n-k]$ → 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 →
⋮
$n=18$: $x[k]$ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$h[n-k]$ → 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

[그림 C3-6] [그림 C3-5]의 컨벌루션 계산의 등가 테이프 방법

3.4 차분 방정식에 의한 이산 LTI 시스템의 해석

3.4.1 차분 방정식의 풀이 – 반복 대입법

■ (책)예제 3.6의 보충 설명

이 예제의 경우와 같이 1차 또는 2차 정도의 간단한 차분 방정식이라면 반복적 대입법을 이용하여 닫힌 꼴의 해를 어렵지 않게 구할 수도 있다.

예금 잔고에 대한 차분 방정식을 다시 쓰면

$$y[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$$

위 식에 n을 1씩 증가시키며 계산을 진행하되, 변수에 그 값을 바꾸어 넣지 않고 그대로 둔 채 다음 단계의 계산에 대입하는 과정을 반복하면 닫힌 꼴의 해를 얻을 수 있다. 즉 $n=0$의 경우

$$y[0] = 1.01y[-1] + x[0]$$

$n=1$로 증가시킨 뒤 위의 결과를 다시 차분 방정식에 대입하면

$$y[1] = 1.01y[0] + x[1] = 1.01(1.01y[-1] + x[0]) + x[1]$$

이를 계속 반복하면

$$\begin{aligned}
y[2] &= 1.01y[1] + x[2] = 1.01(1.01^2y[-1] + 1.01x[0] + x[0]) + x[2] \\
y[3] &= 1.01y[2] + x[3] = 1.01(1.01^3y[-1] + 1.01^2x[0] + 1.01x[1] + x[2]) + x[3] \\
&\vdots \\
y[n] &= (1.01)^{n+1}y[-1] + (1.01)^n x[0] + (1.01)^{n-1}x[1] + \cdots + 1.01x[n-1] + x[n] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

이로부터 닫힌 꼴의 $y[n]$은 다음과 같이 얻어진다.

$$y[n] = (1.01)^{n+1}y[-1] + \sum_{i=0}^{n}(1.01)^i x[n-i]$$

차분 방정식의 차수가 높아지면 이런 식으로 닫힌 꼴 해를 구하기가 매우 복잡하고 힘들기 때문에 잘 사용하지 않고 해석적인 방법을 이용한다. ■

3.4.2 차분 방정식의 고전적 해법

이산 LTI 시스템을 나타내는 차분 방정식이 다음과 같을 때

$$y[n]+a_1 y[n-1]+\cdots+a_p y[n-p]=b_0 x[n]+\cdots+b_q x[n-q] \qquad \text{(책)(3.14)}$$

고전적 해법은 이 식의 해를 (책) 식(3.18)과 같이 동차해 $y_h[n]$와 특이해 $y_p[n]$의 합으로 구한다. 동차해는 (책)식 (3.14)의 우변이 0인 동차 차분 방정식을 만족하는 해이다.

$$y[n]+a_1 y[n-1]+\cdots+a_p y[n-p]=0 \qquad \text{(C3-8)}$$

$y_h[n]=c\gamma^n$(단 $\gamma \neq 0$)이라 가정하고 식 (C3-8)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$c\gamma^n + a_1 c\gamma^{n-1}+\cdots+a_p c\gamma^{n-p} = c\gamma^{n-p}(\gamma^p + a_1\gamma^{p-1}+\cdots+a_p)=0 \qquad \text{(C3-9)}$$

그러므로 γ는 (책)식 (3.19)의 특성 방정식을 만족하는 p개의 근으로서 특성근이라고 한다. 입력 항들이 없는 동차 방정식으로부터 얻어진 특성 방정식은 시스템의 고유한 특성을 나타낸다고 볼 수 있으므로(그렇기 때문에 특성 방정식이라는 이름을 가진다) 특성근 γ_i의 지수함수로 주어지는 *γ_i^n을 시스템의 (특성) 모드*라고 부른다. 즉 ***동차해는 시스템 모드들로만 이루어진 해 성분***이다.

■ 예제 C3-5 : *차분 방정식의 동차해 - 토끼 인구 증가 문제*
토끼 1쌍이 매달 새끼 1쌍을 낳고 생후 1개월이면 임신 가능하다고 한다. 첫 번째 달에 토끼 1쌍이 있을 때 n번째 달의 토끼 쌍수를 구할 수 있는 차분 방정식을 세우고 이의 해를 구하라.

<풀이>
n번째 달 1일에서의 토끼 쌍수를 $y[n]$으로 표시하면, 이는 전달에 임신 가능한 토끼 쌍수의 2배에다 전달에 새로 태어난 토끼 쌍수를 더한 것이 된다. $n-1$번째 달 1일에 임신 가능한 토끼 쌍수는 그 전달의 토끼 쌍수와 같으므로 $y[n-2]$가 되고 $n-1$번째 달 1일에 새로 태어난 토끼 쌍수는 그 달의 토끼 쌍수에서 그 전달의 토끼 쌍수를 뺀 것이므로 $y[n-1]-y[n-2]$가 된다. 따라서 $y[n]$은 다음과 같이 된다.

$$y[n]=2y[n-2]+y[n-1]-y[n-2]=y[n-1]+y[n-2] \qquad \text{(C3-10)}$$

이를 정리하여 다시 쓰면

$$y[n]-y[n-1]-y[n-2]=0$$

위 식의 특성 방정식은 $Q(\gamma)=\gamma^2-\gamma-1=0$이고, 특성근은 $\gamma=(1\pm\sqrt{5})/2$ 가 된다. 따라

서 해는 다음과 같이 구해진다.

$$y[n] = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 문제의 경우 초기 조건은 $y[0]=0$, $y[1]=1$이므로 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} y[0] = c_1 + c_2 = 0 \\ y[1] = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

이를 풀면

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

따라서 이 문제의 해는 다음과 같이 된다.

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 결과를 이용하든지 식 (C3-10)을 이용하든지 $y[n]$의 처음의 몇 개 값을 계산해보면,

$$y[1]=1,\ y[2]=1,\ y[3]=2,\ y[4]=3,\ y[5]=5,\ y[6]=8,\ \cdots$$

이는 여러분들이 잘 알고 있는 유명한 Fibonacci 수열로서, 어떤 순간의 값은 식 (C3-10)과 같이 직전의 2개 값의 합으로 구해진다. ■

■ 예제 C3-6 : *동차해와 과도 응답 - 물탱크의 수위 데이터 필터링*

물탱크의 수위를 매 10분마다 측정하여 1[cm] 단위로 LCD창에 표시하는 시스템이 있다. 측정된 수위 정보는 LCD창에 표시되기 전에 물의 출렁임 등 원하지 않는 측정 잡음을 줄이기 위해 다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 디지털 필터에 의해 필터링 과정을 거치게 된다고 한다.

$$y[n] - 0.5y[n-1] = 0.5x[n] \tag{C3-11}$$

물이 공급되기 직전의 수위가 4[cm]이고, 물이 공급되면 10분에 1[cm]씩 수위가 높아진다고 할 때, LCD 창에 표시되는 수위는 어떻게 되는지 구하라.

<풀이>

식 (C3-11)의 특성 방정식은 $\gamma - 0.5 = 0$이므로 특성근은 $\gamma = 0.5$가 되고, 동차해는 다음과 같다.

$$y_h[n] = c(0.5)^n$$

문제의 조건에서 수위의 측정값, 즉 디지털 필터의 입력은 $x[n] = 4 + n$으로 쓸 수 있으므로, 특이해를 $y_p[n] = c_1 n + c_0$라 두고 이를 차분 방정식에 대입하면

$$(c_1 n + c_0) - 0.5(c_1(n-1) + c_0) = 0.5(n+4)$$

이를 정리하여 양변을 비교하면 $c_1 = 1$, $c_0 = 3$이 되므로 특이해는 다음과 같다.

$$y_p[n] = n + 3$$

따라서 디지털 필터의 출력은 다음과 같이 되고

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c(0.5)^n + n + 3$$

차분 방정식에 $n = 0$로 두어 얻어진 초기 조건 $y[0] = 2$를 위의 식에 대입하면 $c = -1$을 얻게 된다. 그러므로 디지털 필터의 출력, 즉 LCD창에 표시되는 수위는 다음과 같게 된다.

$$y[n] = -(0.5)^n + n + 3$$

[그림 C3-7]에 디지털 필터의 동차해와 특이해, 그리고 전체 출력을 보였다. 그림에서 시간이 지남에 따라 동차해 성분은 점점 줄어들어 사라지는 것을 볼 수 있다. 이것은 이 디지털 필터의 동차해 성분이 과도 응답임을 의미한다.

만일 물을 공급하기 시작하는 순간의 물탱크의 수위에 따라 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않을 수도 있다고 한다면, 다시 말해 과도현상이 전혀 발생하지 않는 매우 특이한 경우의 초기 수위를 한번 구해보자.

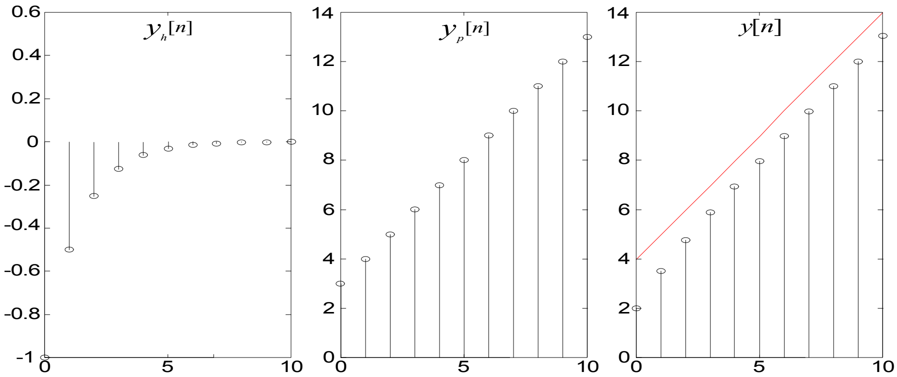
물을 공급하기 시작한 순간의 수위를 모르므로 측정 수위를 $x[n] = n + c$라고 두자. 디지털 필터의 출력은 특이해 성분만 가지므로 $y[n] = y_p[n] = an + b$이 되는데, 이 출력과 차분 방정식에 $x[n]$을 대입해 얻은 결과가 같아야 하기 때문에 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$n = 0 \ : \ y[0] = 0.5y[-1] + 0.5x[0] = 0.5c = b$$

$$n = 1 \ : \ y[1] = 0.5y[0] + 0.5x[1] = 0.75c + 0.5 = a + b$$

$$n = 2 \ : \ y[2] = 0.5y[1] + 0.5x[2] = 0.875c + 1.25 = 2a + b$$

이를 a, b, c에 대해 풀면 $a=1,\ b=1,\ c=2$이므로 $x[n]=n+2,\ y[n]=n+1$이 된다. 다시 말해 물을 공급하기 시작할 때의 물탱크의 수위가 2[cm]이면 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않아 과도현상 없이 바로 항상 측정값에서 1[cm]가 낮은 수위가 LCD 창에 표시된다. ■



[그림 C3-7] [예제 C3-6]의 디지털 필터의 출력

3.5 임펄스 응답과 시스템의 특성

3.5.1 임펄스 응답의 물리적 의미

책에서 설명한 임펄스 응답의 물리적 의미 이상으로 중요한 의미는 *임펄스 함수가 모든 주파수 성분을 지니는 함수*라는 사실에서부터 나온다. 신호와 시스템은 시간 또는 주파수의 두 가지 관점에서 표현하고 취급할 수 있는데, 주파수의 관점에서는 다양한 주파수의 입력 신호에 대한 이득과 위상이 어떻게 되느냐가 중요하다. 이는 전기회로에 정현파 전원을 인가하면 동일한 주파수의 정현파 전압, 전류가 각 소자에 발생하지만 크기와 위상이 바뀌게 된다는 사실을 생각하면 쉽게 납득이 갈 것이다.

모든 주파수에 대한 출력의 입력에 대한 이득과 위상 값을 나타낸 것을 시스템의 주파수 응답 특성이라고 하며, 나중에 상세히 다루겠지만 시간 영역에서 시스템의 동작을 분석할 경우 입력 파형이 달라지면 출력 파형이 달라지는 것과는 달리 입력의 형태와는 무관하며 시스템이 달라지기 전에는 변화하지 않으므로 시스템 해석에 매우 유용하고 중요한 특성이다. 어떤 시스템의 주파수 응답 특성을 얻기 위해서는 전 주파수 범위에 걸쳐 정현파의 주파수를 차례로 변화시켜 가며 시스템에 인가하여 그때의 이득과 위상 변화를 일일이 기록해야 하지만, 만약 모든 주파수 성분을 갖는 입력이 있다면 단번에 주파수 응답 특성을 구할 수 있으므로 일이 매우 수월해질 것이다.

그런데 기가 막히게도 임펄스 함수는 주파수 영역에서 보면 모든 주파수에서 그 크기가 1인 함수, 즉 모든 주파수 성분을 갖는 함수가 된다(이는 나중에 푸리에 변환을 배울 때 보게 될 것이다). 그러므로 서로 다른 주파수를 갖는 신호를 하나씩 넣어서 응답 특성을 구할

필요 없이 *임펄스를 시스템에 넣어주면 중첩의 원리에 의해 모든 주파수에 대한 응답 특성을 단번에 구할 수 있게 된다.* 이에 대해서는 5장에서 상세히 다룰 것이다.

3.5.2 임펄스 응답과 시스템의 특성

(1) 기억성

임펄스 응답으로부터 시스템이 순시적인지 동적인지를 알 수 있다. 임펄스 응답이 임펄스로 주어지면($h[n]=a\delta[n]$) 순시적 시스템이고, 그렇지 않으면($h[n]\neq a\delta[n]$) 동적 시스템이 된다. 이는 임펄스 함수의 샘플링 성질을 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,a\,\delta[n-k]=a\,x[n] \qquad \text{(C3-12)}$$

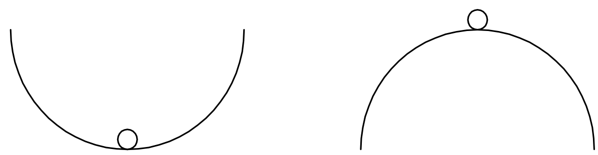
식 (C3-12)에서 볼 수 있는 것처럼 임펄스 응답이 임펄스가 되면 시스템 출력은 현재의 입력에만 연관되므로 순시적 시스템이 된다.

(2) 안정성

시스템의 안정도에는 BIBO 안정도 외에 널리 쓰이는 개념으로 점근적 안정도asymtotic stability라는 것이 있다. 점근적 안정도는 시스템의 평형 상태와 관련하여 정의된다. 시스템의 평형 상태란 외부에서 시스템을 여기하는 입력이 인가되지 않는 경우 시스템이 지속적으로 유지하게 되는 특정한 상태를 말한다.

예를 들어 삼각형의 경우 꼭짓점을 바닥에 대고 거꾸로 세우면 손가락으로 받쳐주지 않는 한 넘어져서 한 변이 바닥에 대이면 더 이상 움직이지 않게 된다. 이 상태가 평형상태이며 여러분도 알고 있듯이 삼각형의 가장 안정한 자세이다. 이처럼 시간이 지남에 따라 시스템이 특정한 상태에서 평형 상태로 될 때 그 시스템은 점근적 안정이라고 한다.

[그림 C3-8]의 경우를 생각해보자. 그림 (a)는 반구모양의 그릇을 바로 놓은 경우이고, 그림 (b)는 엎어놓은 경우로서 여기에 구슬을 잘 놓아서 움직이지 않고 있다고 하자(즉, 평형 상태에 있다). 이제 구슬을 밀면 어떤 결과가 나오겠는가? 그림 (a)의 경우는 구슬이 움직이다가 결국에는 원래의 자리에 서게 된다. 반면, 그림 (b)의 구슬은 그릇 곡면을 타고 굴러 떨어져버린다. 다시 말해 (a)의 경우는 점근적 안정이며, (b)의 경우는 점근적 불안정이다.



a) 안정한 시스템 b) 불안정한 시스템

[그림 C3-8] 점근적 안정도의 예

그렇다면 시스템에 특정한 초기 조건을 인가하였을 때 시스템이 돌아가게 될 평형 상태는 만약 존재한다면 무엇일까? 입력이 인가되지 않는 경우 시스템의 응답은 영입력 응답뿐이며, 이것은 시스템 모드 항들로 이루어져 있음을 이미 알고 있다. 그런데 시스템 모드 항들은 지수 함수 형태이므로 다음과 같이 특성근의 값에 의해 시간이 지남에 따라 감소하거나 증가하는 양상을 보인다.

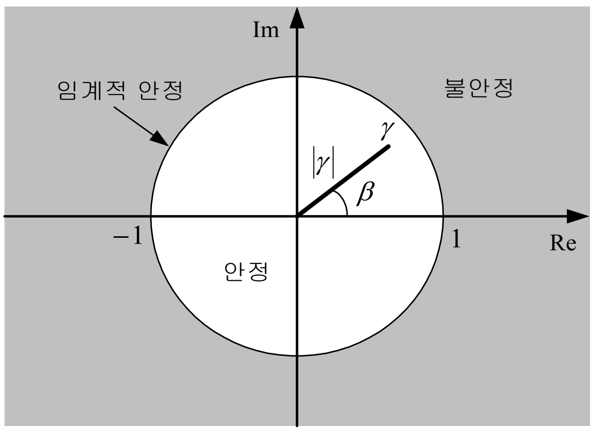
$$\lim_{n\to\infty}|\gamma_i^n| = \begin{cases} 0, & |\gamma_i|) < 1 \\ \infty, & |\gamma_i| > 1 \end{cases} \quad \text{(C3-13)}$$

둘 중 충분한 시간이 지난 뒤에 값이 변하지 않게 되는 것은 지수적으로 감소하는 경우로서 최종적인 값은 0이 된다. 즉 시스템의 평형상태는 영상태이다. 따라서 시스템의 점근적 안정도는 $n\to\infty$로 접근함에 따라 시스템이 영상태로 가는 성질을 말하며, 이를 위한 조건은 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $|\gamma_i| < 1$이어야 한다. 반면에 $|\gamma_i| > 1$의 경우는 $n\to\infty$로 접근함에 따라 시스템 응답은 계속 증가하게 되어 불안정해진다.

이 결과는 BIBO 안정도에서 얻은 결론과도 부합한다. 그러므로 시스템이 점근적으로든 BIBO 관점으로든 안정할 조건은 특성 방정식의 특성근이 $|\gamma_i| < 1$을 만족해야 한다. 이를 복소평면에 그림으로 나타내면 [그림 C3-9]와 같이 된다. 즉 복소평면 상의 단위원 내부에 특성근이 존재하면 안정, 외부에 존재하면 불안정이 된다.

단위원상에 특성근이 존재하게 되면, 즉 $|\gamma_i| = 1$이면, 임펄스 응답을 이루는 시스템 모드가 정현적으로 진동하게 되어 평형 상태가 존재하지 않을뿐더러 (책)식 (3.30)의 BIBO 안정 조건을 만족시키지도 못한다. 그러므로 일반적으로는 불안정한 경우로 분류되는데, 특별히 이 경우를 안정과 불안정의 경계로 보아 별도로 임계[marginally] 안정이라고도 한다.

그러나 다중근인 특성근이 단위원상에 존재하면 시스템은 무조건 불안정하다. 왜냐하면, 이 경우 시스템 모드에 $n^{m-1}\gamma^n$의 꼴이 포함되어 $n\to\infty$로 됨에 따라 $|n^{m-1}\gamma^n| = n^{m-1} \to \infty$가 되어 발산하기 때문이다.



[그림 C3-9] 특성근의 위치와 시스템 안정도

(3) 시정수

아무리 훌륭한 육상 선수라 할지라도 출발에서부터 자신의 최대 속도를 내기까지에는 시간이 걸린다. 시스템도 사람과 마찬가지로 입력에 대해 완전히 응답하기까지는 어느 정도의 시간이 소요된다. 형광등을 켤 때, 또는 펌프를 가동할 때 여러분들은 이런 시간 지연을 경험했을 것이다. 이처럼 입력을 넣었을 때 시스템이 입력에 대해 완전히 응답하기까지 소요되는 응답 시간을 시스템의 시정수라고 한다.

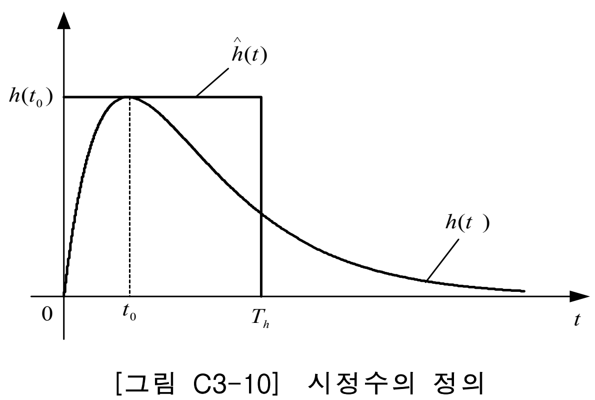
시스템의 시정수는 시스템이 얼마나 빠른가를 나타내는 지표이다. 작은 시정수를 갖는 시스템은 입력에 대해 빨리 응답하는 시스템이며 상대적으로 큰 시정수를 갖는 시스템은 입력 신호의 변화에 대해 재빨리 응답하지 못하는 느린 시스템이다.

시정수와 임펄스 응답의 연관성을 살펴보기 위해 연속 시스템에 임펄스 신호를 입력으로 인가한 경우를 생각해보자. 임펄스 신호 $\delta(t)$는 $t=0$ 순간에만 값을 갖는 순간적인 신호지만 이에 대한 응답 $h(t)$는 지속 시간 T_h 동안 값을 갖는다. 다시 말해 시스템이 임펄스 입력에 대해 완전하게 응답하기 위해서는 T_h의 시간을 필요로 한다. 따라서 T_h를 시스템의 응답 시간 또는 시정수로 보는 것이 타당할 것이다.

그런데 일반적으로 시스템의 임펄스 응답은 지수 함수 형태의 시스템 모드들로 구성되어 있기 때문에 엄격히 말해 임펄스 응답의 지속 시간은 ∞이고 따라서 거의 모든 시스템의 시정수도 ∞가 되어야 맞다. 그렇게 되면 애써 시정수를 정의하는 의미가 없어진다.

그러나 안정한 시스템에서는 지수적으로 감소하는 임펄스 응답 $h(t)$가 어느 정도 시간이 흐르고 나면 크기가 거의 무시할 정도가 되므로, 반응 시간만 생각한다면 무한한 지속 시간을 갖는 임펄스 응답을 유한한 시간 동안 지속되는 적당한 신호로 근사화하여 생각해도 큰 차이가 나지 않을 것이다. 이러한 근사화에 의해 임펄스 응답의 유효폭을 정하는 데에는 어떤 적절한 기준이 필요하다.

많은 경우 [그림 C3-10]에 나타낸 것처럼 임펄스 응답의 최대치를 그 높이로 하고 임펄스 응답의 면적과 같은 면적을 갖게끔 폭을 취하는 사각 펄스의 지속 시간, 즉 폭을 임펄스 응답의 유효 지속 시간 T_h로 정의하는 것이 적절하고 나름대로 타당성을 지닌다.



[그림 C3-10] 시정수의 정의

$$T_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt}{h(t_0)} \qquad \text{(C3-14)}$$

만일 $h(t) = ce^{\lambda t}$일 경우 $h(t)$는 $t=0$에서 최대치 $h_{\max} = c$를 갖는다. 그러므로

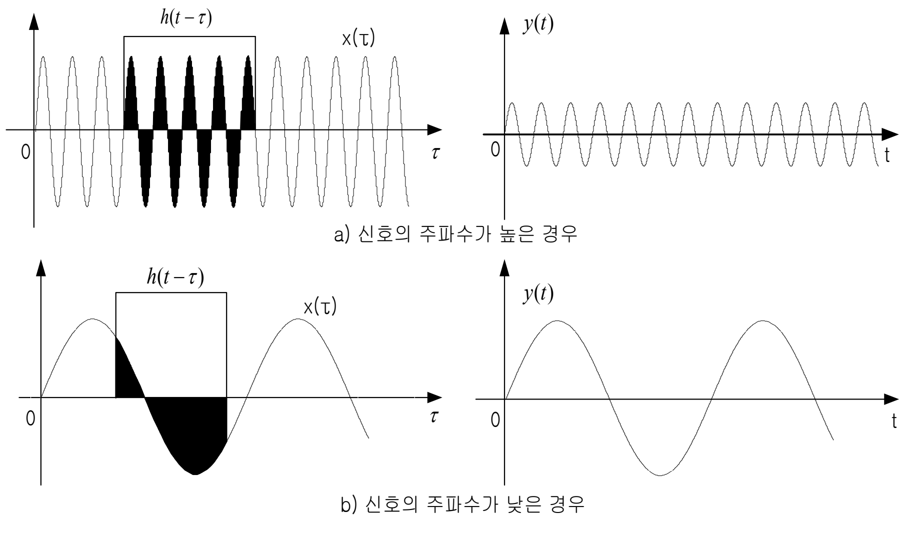
$$T_h = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} ce^{\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda} \qquad \text{(C3-15)}$$

가 되고 이 T_h를 임펄스 응답에 대입하면

$$h(T_h) = ce^{-1} = \frac{1}{e}h_{\max} \qquad \text{(C3-16)}$$

가 얻어진다. 이것은 $h(t)$의 최대치 $h_{\max} = c$의 $1/e$인데, 회로 이론 등에서 보았던 최댓값의 $1/e$배 되기까지 걸리는 시간으로 정의되는 시정수 개념과 일치한다.

시정수는 시스템의 필터링 성질과도 직접적인 관련이 있다.
시스템에 높은 주파수의 정현파를 입력으로 인가한 경우를 생각해 보자. 이 신호는 시간에 따라 급속히 변하는 신호이다. 시스템의 임펄스 응답을 [그림 C3-10]에 나타낸 것처럼 유효 지속 시간을 갖는 사각 펄스로 대치하여 정현파 입력과 컨벌루션하여 시스템의 응답을 구해 보면 [그림 C3-11(a)]와 같이 된다. 입력 $x(t)$와 등가 임펄스 응답 $h(t)$의 컨벌루션은 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$의 면적([그림 C3-11(a)]의 그늘진 부분)이 되는데, 그림에서 보듯이 높은 주파수의 정현파에 대해서는 신호의 주기가 시스템의 시정수보다도 훨씬 작기 때문에 양과 음의 면적이 거의 서로 상쇄되어 그 값이 매우 작다. 따라서 출력 $y(t)$는 주기적이기는 하지만 입력 신호에 비해 작은 진폭을 갖는다.



[그림 C3-11] 시정수와 필터링 효과

이와 반대로 그림 (b)에 나타낸 것처럼 낮은 주파수의 정현파를 입력으로 인가하면 정현파의 주기가 시정수 T_h보다 크므로 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$의 면적([그림 C3-11(b)]의 그늘진 부분)의 상쇄 정도는 작다. 따라서 시스템의 출력 $y(t)$는 그림에서 볼 수 있듯이 (a)의 경우에 비해 훨씬 더 크다.

이로부터 큰 시정수를 갖는 시스템은 고주파 신호를 억제하는 저역 통과 필터처럼 동작한다는 사실을 알 수 있다. 그림으로부터 유추해 보면, 입력 정현파의 주기가 시정수 T_h와 같아지는 점을 경계로 시스템의 동작이 입력 신호에 대한 억제 동작으로 옮겨가는 것을 알 수 있다. 이와 같은 천이가 발생하는 주파수를 시스템의 차단 주파수라고 하는데, 차단 주파수 f_c는 다음과 같이 된다.

$$f_c = \frac{1}{T_h} \tag{C3-17}$$

물론 차단 주파수를 전후한 시스템의 동작 변화는 점진적으로 일어나므로 극적인 변화는 없지만 이를 전후하여 시스템은 이 주파수보다 낮은 정현파 성분은 통과시키고, 높은 주파수 성분은 감쇠시키는 동작을 하는 것으로 취급하게 된다. 그러므로 이 차단 주파수를 시스템의 대역폭이라고도 한다.

(4) 계단 응답

임펄스 응답 이상으로 시스템의 특성을 파악하는 데 매우 유용하게 사용되는 것이 바로 (단위) 계단 응답이다. 계단 응답은 말 그대로 계단 신호를 입력으로 할 때의 시스템 응답으로서, 물리적으로는 직류, 즉 시간에 따른 변화가 전혀 없는 신호에 대한 시스템의 동작 특성을 나타낸다. 따라서 가장 기본적이고 대표적인 시험 신호로 널리 이용되고 있다.

계단 신호는 (책)식 (2.9)와 같이 임펄스 $\delta[n]$의 이동 합으로 표현할 수 있으므로 계단 응답 $s[n]$은 다음과 같이 임펄스 응답 $h[n]$의 이동 합이 된다.

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \qquad \text{(책)(2.9)}$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{C3-18}$$

한편 임펄스 신호는 계단 함수를 이용하여 (책)식 (2.8)과 같이 표현되므로 임펄스 응답은 다음과 같이 계단 응답 $s[n]$의 1차 차분으로 나타낼 수 있다.

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \qquad \text{(책)(2.8)}$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{C3-19}$$

■ 예제 C3-7 : *시스템의 계단 응답*
다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 인과 LTI 시스템의 임펄스 응답과 계단 응답을 구하라.

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]$$

<풀이>
먼저 이 시스템의 임펄스 응답을 구해보자. 주어진 차분 방정식의 특성 방정식이 다음과 같으므로

$$\gamma-0.5=0$$

특성근은 $\gamma=0.5$가 된다. 따라서 임펄스 응답은

$$h[n]=c(0.5)^n$$

이 되는데, 차분 방정식으로부터 $n=0$에 대해 $h[0]=1$을 얻어 위의 식에 대입하면 $c=1$이 된다. 그러므로 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h[n]=(0.5)^n, \qquad n \geqq 0 \tag{C3-20}$$

이제 이 시스템의 계단 응답을 구해보자. 동차해는 앞에서 구하였으므로 입력 $x[n]=u[n]$에 대한 특이해만 구하면 된다. $s_p[n]=c_0$라 두고 차분 방정식에 대입하면

$$c_0-0.5c_0=1$$

따라서 $c_0=2$, 즉 $s_p[n]=2$가 된다. 그러므로 계단 응답은 다음과 같고

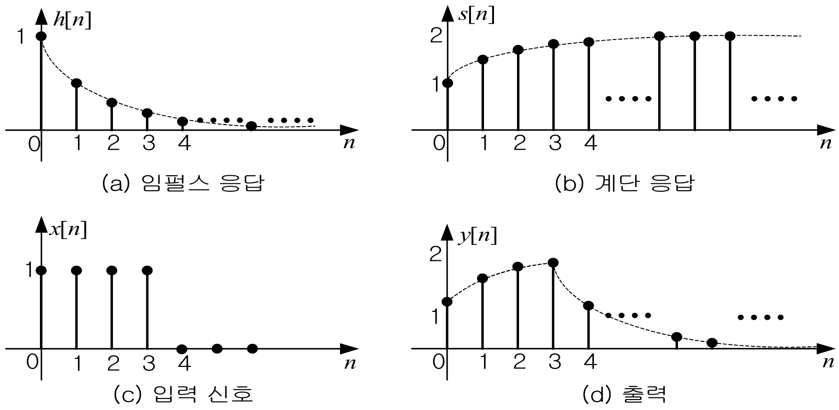
$$s[n]=s_h[n]+s_p[n]=c(0.5)^n+2$$

주어진 차분 방정식으로부터 $n=0$에 대해 $s[0]=1$을 얻어 위의 식에 대입하면 $c=-1$이 된다. 그러므로 계단 응답은 다음과 같다.

$$s[n]=-(0.5)^n+2, \qquad n \geqq 0 \tag{C3-21}$$

[그림 C3-12]의 (a)와 (b)에 이렇게 구한 임펄스 응답과 계단 응답을 나타내었다.

임펄스 응답과 계단 응답이 과연 식(C3-18)과 식 (C3-19)의 관계를 만족하는지 알아보자. 식 (C3-20)과 식 (C3-21)을 이용하여 임펄스 응답과 계단 응답의 처음 몇 샘플의 값을 구해보면 다음과 같이 된다.



[그림 C3-12] [예제 C3-7]의 임펄스 응답, 계단 응답, 입력 및 출력

$$h[0]=1=s[0]-s[-1] \qquad s[0]=1=h[0]$$
$$h[1]=0.5=s[1]-s[0] \qquad s[1]=1.5=h[0]+h[1]$$
$$h[2]=0.25=s[2]-s[1] \qquad s[2]=1.75=h[0]+h[1]+h[2]$$
$$h[3]=0.125=s[3]-s[2] \qquad s[3]=1.875=h[0]+h[1]+h[2]+h[3]$$
$$\vdots$$

따라서 식 (C3-18)과 식 (C3-19)의 관계를 만족함을 알 수 있다.

실제로 식 (C3-18)과 식 (C3-20)으로부터 계단 응답은 다음과 같이 되는데

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]=\sum_{k=0}^{n}(0.5)^n=\frac{1-(0.5)^{n+1}}{1-0.5}=-(0.5)^n+2$$

이는 식 (C3-21)과 정확히 일치한다. 또한 식 (C3-19)와 식 (C3-21)로부터

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=(-(0.5)^n+2)-(-(0.5)^{n-1}+2)=(0.5)^n$$

이 되어 식 (C3-20)과 일치한다.

만약 시스템에 그림의 (c)와 같은 신호를 입력으로 넣으면 출력은 어떻게 될까? (c)의 신호는 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$x[n]=u[n]-u[n-4]$$

시스템의 출력은 계단 응답을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y[n]=s[n]-s[n-4]=(-(0.6)^n+2)u[n]-(-(0.8)^{n-4}+2)u[n-4]$$ ■