제 8 장

z 변환

책의 ‘1절 z 변환의 개념과 정의’와 관련하여 z 변환이 DTFT에 비해 갖는 장점과 수렴 영역에 관한 예제를 보충하였다.

책의 ‘3절 역 z 변환’과 관련하여 수렴 영역에 따라 단방향 또는 양방향 신호로 어떻게 역 z 변환할 수 있는지를 설명하였고 많은 예제를 통해 역 z 변환을 충분히 익힐 수 있도록 하였다. 특히 분모에 중근 또는 공액 복소근이 있을 경우의 부분 분수 전개를 간편하게 할 수 있는 팁을 예제로 소개하였다.

책의 ‘4절 z 변환의 성질’과 관련하여 몇 가지 성질에 대한 보충 설명과 z 변환의 성질을 이용하는 다양한 예제들을 제시하였다.

책의 ‘5절 z 변환에 의한 차분 방정식 해석’과 관련하여 출력을 두 가지 성분으로 나누어 구할 수 있는 예제를 추가하여 풀이법을 잘 익힐 수 있도록 하였다.

책의 ‘6절 전달 함수’와 관련해서는 안정도 및 인과성과 관련된 보충 설명과 예제를 보완하였다.

책의 ‘7절 전달 함수와 주파수 응답의 관계’와 관련하여 고유 함수의 관점에서 전달 함수와 주파수 응답을 새롭게 해석하고 관계를 유도하였다.

끝으로 책과 심화 학습 자료의 내용을 잘 익힐 수 있도록 연습 문제를 보충하였다.

8.1 z 변환의 개념과 정의

푸리에 변환이 불가능한 신호의 경우에도 라플라스 변환이 존재할 수 있는 것과 마찬가지로, *z 변환은 DTFT가 불가능한 신호의 경우에도 존재할 수 있다.* DTFT는 (책)식 (6.18)에 정의된 것처럼 $x[n]$이 절대 총합 가능한 경우에만 존재하는데, z를 특정하게 선정하면 비록 $x[n]$이 절대적으로 총합 가능하지 않더라도 $x[n]z^{-n}$은 절대 총합 가능하도록 만들 수 있다.

예를 들어, $x[n]=a^n u[n]$에서 $|a|>1$이면 DTFT는 존재하지 않지만, $|z|=r>a$로 선정한다면 $|az^{-1}|<1$이 되므로 $x[n]z^{-n}$은 절대 총합 가능해지고, 따라서 z 변환이 존재하게 된다. 이와 같이 z 변환은 DTFT보다 훨씬 많은 신호를 주파수 영역으로 변환하여 취급할 수 있게 해준다.

게다가 DTFT 정의식 (6.14)는 $e^{j\Omega}$항이 드러나 있어서 계산과 취급에 불편함이 있었으나 z 변환에서는 복소수가 변수 내로 숨어 들어가 밖으로 보이지 않으므로 간결하고 편리한 표현이 되었다는 것도 z 변환의 장점이다.

■ 예제 C8-1 : *안정한 신호와 불안정한 신호의 z 변환*

(a) 신호 $x[n]=(0.8)^n u[n]$의 z 변환을 구하라.

(b) $X(z)=\dfrac{1}{z+1.2}$를 역 z 변환하여 대응되는 신호를 구하라.

<풀이>

(a) z 변환의 정의식으로부터

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=1+0.8z^{-1}+0.8^2z^{-2}+0.8^3z^{-3}+\cdots$$

$$=1+0.8z^{-1}+(0.8z^{-1})^2+(0.8z^{-1})^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-0.8z^{-1}}=\frac{z}{z-0.8}$$

(b) $X(z)$을 z^{-1}의 함수로 나타내어 긴 나눗셈에 의해 $x[n]$을 구하면 다음과 같이 된다.

$$X(z)=\frac{1}{z+1.2}=\frac{z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}$$

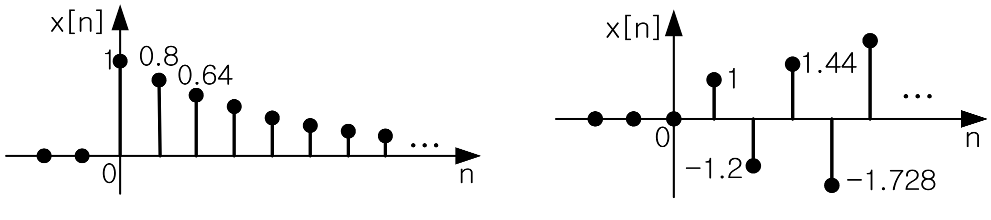
$$=z^{-1}\{1+(-1.2z^{-1})+(-1.2z^{-1})^2+(-1.2z^{-1})^3+\cdots\}$$

$$=z^{-1}+(-1.2)z^{-2}+(-1.2)^2z^{-3}+(-1.2)^3z^{-4}+\cdots$$

따라서 $x[n]$은 다음과 같이 구해진다.

$$x[0]=0,\ x[1]=1,\ x[2]=-1.2,\ x[3]=1.44,\ x[4]=-1.728,\ \cdots$$

두 신호를 [그림 C8-1]에 나타내었다.



(a) $x[n]=(0.8)^n u[n]$　　(b) $X(z)$의 시간 신호

[그림 C8-1] [예제 C8-1]의 신호

그림에서 보듯이 (b)의 신호는 시간이 지남에 따라 발산하는 불안정한 신호이다. ■

■ 예제 C8-2 : *양방향 신호의 z 변환*

다음과 같은 양방향 신호의 z 변환을 구하라.

$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]=(0.9)^n u[n]+(1.2)^n u[-(n+1)]$$

<풀이>

$x_1[n]$과 $x_2[n]$에 대해 (책)식 (8.9)와 (책)식 (8.10)을 이용하여 각각 z 변환을 하면 다음과 같다.

$$X_1(z)=\frac{z}{z-0.9} \qquad |z|>0.9$$

$$X_2(z)=\frac{-z}{z-1.2} \qquad |z|<1.2$$

$X_1(z)$와 $X_2(z)$ 양쪽 다 수렴하는 공통 영역은 $0.9<|z|<1.2$이다. 따라서 $x[n]$의 z 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(z)=X_1(z)+X_2(z) &= \frac{z}{z-0.9}-\frac{z}{z-1.2} \\ &= \frac{-0.3z}{(z-0.9)(z-1.2)}, \qquad 0.9<|z|<1.2 \end{aligned}$$

이 예와 같이 양방향 z 변환은 반드시 수렴 영역을 표시해야 한다. ■

8.2 기본 신호의 z 변환

8.3 역 z 변환

단방향 z 변환이나 양방향 z 변환이나 역 z 변환의 방법은 동일하다. 다만 역 z 변환을 할 때 ***양방향 z 변환에서는 주어진 수렴 영역에 맞는 시간 신호로 역 변환을 해야 한다***는 점을 주의해야 한다. 그런데 대부분의 경우에 우리는 인과적인 신호와 시스템을 다루게 되므로, 다시 말해 단방향 z 변환을 주로 사용하게 되므로, 수렴 영역을 별도로 고려하지 않고 역 z 변환하게 되는 것이다.

(1) 정의식에 의한 역 변환

(책)식 (8.5)의 정의식대로 복소 적분에 의한 역 변환은 수학적 지식이 없으면 적용을 하기가 어렵고 계산도 복잡해서 학부 수준에서는 거의 사용하지 않는다.

(책)식 (8.5)의 역변환 정의식은 복소 적분 이론을 이용하여 유도된다. $X(z)$에 대해 다음과 같은 적분을 생각하면

$$\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz = \oint_{\Gamma}\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}z^{n-1}dz = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz \tag{C8-1}$$

Cauchy의 복소 적분 정리에 의해 식 (C8-1)의 적분은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases} \tag{C8-2}$$

따라서 다음과 같이 역 z 변환의 정의식이 얻어진다.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz \tag{C8-3}$$

식 (C8-3)의 복소 적분 계산은 Cauchy의 유수 정리residue theorem에 의해 수행된다.

$$x[n] = \sum_{z_i \in D_{\Gamma}} \underset{z=z_i}{Res}\,[X(z)(z-z_i)^{n-1}] \tag{C8-4}$$

여기서 유수는 다음과 같이 계산된다.

$$\underset{z=z_i}{Res}\,[X(z)] = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}X(z)(z-z_i)^N}{dz^{N-1}}\bigg|_{z=z_i}, \quad \forall z_i \in D_{\Gamma} \tag{C8-5}$$

■ 예제 C8-3 : *복소 적분(유수 정리)에 의한 z 변환*

다음과 같은 $X(z)$을 역 변환 정의식을 이용하여 역 변환하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > a$$

<풀이>

역 변환 정의식에 유수 정리를 적용하면

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz \\
&= \underset{z=a}{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\right] = \underset{z=a}{Res}\left[\frac{z^{n}}{z-a}\right] \\
&= \frac{z^n}{z-a}(z-a)\bigg|_{z=a} = a^n
\end{aligned}
$$

■

(2) 멱급수 전개법에 의한 역 변환

멱급수 전개법으로 좌편향 신호의 역 z 변환을 구할 경우, 분모를 상수항부터 순서대로 나열한 뒤 긴 나눗셈을 수행하면 된다.

■ 예제 C8-4 : *멱급수 전개법에 의한 무한 구간 신호의 역 z 변환*

$X(z)$가 다음과 같이 주어질 경우, 멱급수 전개에 의해 $x[n]$를 구하라.

$$X(z) = \frac{z(4z-1)}{2z^2-2z+1}$$

<풀이>

분자를 분모로 나누면,

$$
\begin{array}{r l}
 & 2 \quad + 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.25z^{-3} + \cdots \\ \cline{2-2}
2z^2-2z+1\,) & 4z^2 - z \\
 & 4z^2 - 4z \quad + 2 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3z \quad - 2 \\
 & \quad 3z \quad - 3 \quad + 1.5z^{-1} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 1 \quad - 1.5z^{-1} \\
 & \qquad 1 \quad - 1.0z^{-1} + 0.5z^{-2} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

그러므로 $X(z)$는 다음의 멱급수 형태로 쓸 수 있다.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=2+1.5z^{-1}+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}+\cdots$$

따라서 $x[0]=2$, $x[1]=1.5$, $x[2]=0.5$, $x[3]=-0.25$, $\cdots$와 같이 $x[n]$의 값을 구할 수 있는데, 구해진 수열로부터 $x[n]$의 닫힌 꼴을 유추하기가 쉽지 않다. ■

■ 예제 C8-5 : *수렴 영역에 따른 역 z 변환 – 멱급수 전개법*

(책)[예제 8-3]의 $X(z)$에 대해 수렴 영역이 $|z|<0.5$일 때 역 z 변환을 구하라.

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$$

<풀이>

수렴 영역이 원의 내부이므로 신호는 좌편향 신호이다. 따라서 전개하려는 멱급수에서 z의 지수가 양이 되어야 한다. 분모를 $0.5-1.5z+z^2$과 같이 상수항부터 순서대로 나열하여 표시한 뒤에 분자를 분모로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{rl}
 & 2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+62z^6+\ \cdots \\
\hline
\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z+z^2\ \big) & z^2 \\
 & z^2-\ 3z^3\ +2z^4 \\
\hline
 & \quad 3z^3-2z^4 \\
 & \quad 3z^3-9z^4\ +6z^5 \\
\hline
 & \qquad 7z^4\ -\ 6z^5 \\
 & \qquad 7z^4\ -21z^5+14z^6 \\
\hline
 & \qquad\quad 15z^5-14z^6 \\
 & \qquad\quad 15z^5-45z^6+30z^7 \\
\hline
 & \qquad\qquad 31z^6-30z^7 \\
 & \qquad\qquad\quad \vdots
\end{array}$$

그러므로 $X(z)$는 다음과 같은 멱급수가 된다.

$$X(z)=2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+6z^6+\ \cdots$$

따라서 $x[-1]=0$, $x[-2]=2$, $x[-4]=14$, $x[-5]=30$, $\cdots$ 과 같이 시간 신호 $x[n]$의 값을 구할 수 있다. ■

(3) 부분분수 전개법에 의한 역 변환

■ 예제 C8-6 : *부분분수 전개법에 의한 역 z 변환*

다음의 $X(z)$에 대해 부분분수 전개법으로 역 z 변환하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

<풀이>

$X(z)$를 직접 부분 분수 전개하면 다음과 같다.

$$X(z) = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}$$

위 식은 변환쌍표를 이용하여 바로 역 변환할 수가 없고, 양변에 z를 곱한 뒤에야 변환쌍표를 이용하여 다음과 같이 역 변환할 수 있다.

$$x'[n] = Z^{-1}\{zX(z)\} = 3(2)^n + 5(3)^n$$

그런데, $zX(z)$는 z 변환의 정의로부터 다음과 같이 주어지는 함수이므로

$$zX(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]z + x[1] + x[2]z^{-1} + \cdots + x[n]z^{-n+1} + \cdots$$

$x'[n]$은 $x[n]$을 좌측으로 1만큼 시간 이동시킨 신호가 된다. 따라서 $x[n]$은 $x'[n]$을 1만큼 시간 지연 시킨 신호, 즉 $x[n] = x'[n-1]u[n-1]$이 되므로 다음과 같이 구해진다.

$$x[n] = (3(2)^{n-1} + 5(3)^{n-1})u[n-1]$$

이상에서 볼 수 있듯이 $X(z)$를 직접 부분 분수로 전개하면 언제나 $u[n-1]$이 곱해진 답이 구해진다. 이런 형태는 어색해 보일 뿐만 아니라 불편하다. 우리는 $u[n-1]$이 곱해진 것 대신 $u[n]$이 곱해진 형태를 선호한다. 앞 절에서 여러 신호의 z 변환을 구해보았지만, $u[n]$이 곱해진 신호들의 z 변환은 모두 분자에 인수 z를 갖는다. 이러한 사실로부터 $X(z)$를 전개한 후에 각 항의 분자가 인수 z를 갖도록 하는, 변형된 부분 분수로 전개하여야 함을 알 수 있다. 이것은 $X(z)/z$를 부분 분수로 전개한 뒤 양변을 z로 곱함으로써 가능하다.

주어진 문제를 이 방법으로 다시 구해보면, $X(z)/z$의 부분 분수 전개는 다음과 같이 된다.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)} = \frac{K_1}{z} + \frac{K_2}{z-2} + \frac{K_3}{z-3}$$

(책)식 (8.31)을 이용하여 부분분수 항들의 계수를 결정하면 다음과 같다.

$$K_1 = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)} z \bigg|_{z=0} = -\frac{19}{6}$$

$$K_2 = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)} (z-2) \bigg|_{z=2} = \frac{3}{2}$$

$$K_3 = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)} (z-3) \bigg|_{z=3} = \frac{5}{3}$$

그러므로 $X(z)$는 다음과 같이 부분 분수로 전개된다.

$$X(z) = -\frac{19}{6} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{5}{3}\frac{z}{z-3}$$

따라서 z 변환쌍표로부터 다음과 같이 $x[n]$을 구할 수 있다.

$$x[n] = -\frac{19}{6}\delta[n] + \left(\frac{3}{2}(2)^n + \frac{5}{3}(3)^n\right)u[n]$$

이 답이 앞에서 $X(z)$를 직접 부분분수로 전개하여 구한 $x[n]$과 같다는 것은 $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$을 대입하여 $x[n]$의 값을 계산해서 비교해보면 금방 알 수 있다.

얻어진 답의 형태도 그렇고 계산 과정도 그렇고 후자의 경우가 좀 더 편리하다. 그러므로 역 z 변환은 언제나 $X(z)$가 아니라 $X(z)/z$를 부분 분수로 전개한 후 양변에 z를 곱하여 $X(z)$의 분자에 인수 z를 갖게 만들어 구하게 된다. ■

좌편향 신호에 대해 부분 분수 전개법을 이용하여 역 z 변환을 구할 경우에는 다음의 z 변환쌍을 적용하면 된다.

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad \text{(C8-6)}$$

■ **예제 C8-7 : *수렴 영역에 따른 역 z 변환 - 부분 분수 전개법***
(책)[예제 8-3]의 $X(z)$의 수렴 영역에 따른 역 z 변환을 부분분수 전개법으로 구하라.

<풀이>
주어진 $X(z)$에 대한 부분 분수 전개는 이미 (책)예제 6.7에서 다음과 같이 구한 바 있다.

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$X(z)$의 수렴 영역은 다음의 세 가지 경우가 가능하므로, 역 변환도 이에 맞추어 세 가지

신호 중의 하나가 될 것이다.

① ROC : $|z| > 1$
② ROC : $0.5 < |z| < 1$
③ ROC : $|z| < 0.5$

① ROC : $|z| > 1$
(책)[예제 8-4]에서 이미 구한 것과 같이 인과 신호에 해당하며, $x[n]$은 다음과 같다.

$$x[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n]$$

② ROC : $0.5 < |z| < 1$
양방향 신호로서 $|z| < 1$과 관련이 있는 $X(z)$의 첫 번째 항은 비인과 신호, $|z| > 0.5$와 관련이 있는 두 번째 항은 인과 신호로 역 변환된다. 따라서

$$x[n] = 2u[-n-1] - (0.5)^n u[n]$$

③ ROC : $|z| < 0.5$
비인과 신호로서 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = 2u[-n-1] - (0.5)^n u[-n-1]$$

이상과 같이 수렴 영역에 따라서 역 z 변환의 결과가 완전히 달라지는데, 수렴 영역의 표시 등 특별한 전제가 없는 한 보통 인과 신호를 다루는 단방향 z 변환의 경우로 한정하여 취급하게 되는 것이다. ■

■ 예제 C8-8 : *수렴 영역에 따른 역 z 변환 - 부분 분수 전개법*
다음 신호의 수렴 영역이 (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 0.8$, (c) $0.8 < |z| < 2$일 때 역 z 변환을 각각 구하라.

$$X(z) = \frac{-z(z+0.4)}{(z-0.8)(z-2)}$$

<풀이>
$X(z)$의 양변을 z로 나누어 부분분수 전개하면 다음과 같다.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-(z+0.4)}{(z-0.8)(z-2)} = \frac{1}{(z-0.8)} - \frac{2}{(z-2)}$$

따라서 $X(z)$는 다음과 같이 된다.

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.8)} - 2\frac{z}{(z-2)}$$

(a) $|z| > 2$
인과 우편향 신호의 경우로 역 z 변환한 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = \left((0.8)^n - 2(2)^n\right)u[n]$$

(b) $|z| < 0.8$
비인과 좌편향 신호의 경우로 역 z 변환 결과는 다음과 같다.

$$x[n] = \left(-(0.8)^n + 2(2)^n\right)u[-(n+1)]$$

(c) $0.8 < |z| < 2$
$X(z)$의 첫 번째 항은 우편향 신호, 두 번째 항은 좌편향 신호의 경우로 역 z 변환 결과는 다음과 같이 된다.

$$x[n] = (0.8)^n u[n] + 2(2)^n u[-(n+1)]$$

■

■ **예제 C8-9 : *$X(z)$의 분모가 중근을 갖는 경우의 역 z 변환***
다음과 같은 $X(z)$에 대해 역 z 변환 $x[n]$을 구하라.

$$X(z) = \frac{z(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

<풀이>
먼저, $X(z)/z$를 부분 분수 전개하면

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3} = \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_{23}}{(z-2)^3} + \frac{K_{22}}{(z-2)^2} + \frac{K_{21}}{z-2}$$

여기서 K_1과 K_{23}는 헤비사이드의 커버업 방법으로 다음과 같이 계산된다.

$$K_1 = \left.\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)(z-2)^3}(z-1)\right|_{z=1} = -3$$

$$K_{23} = \left.\frac{2z^2 - 11z + 12}{(z-1)(z-2)^3}(z-2)\right|_{z=2} = -2$$

따라서 $X(z)/z$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-11z+12}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3}{z-1}-\frac{2}{(z-2)^3}+\frac{K_{22}}{(z-2)^2}+\frac{K_{21}}{z-2} \tag{C8-7}$$

K_{21}과 K_{22}는 (책)식 (6.32)를 사용하여 구할 수 있지만, 좀 더 손쉽게 다음과 같이 구할 수 있다. 식 (C6-2)의 양변에 z를 곱하여 $z\rightarrow\infty$로 극한을 취하면, 식 (C6-2)는 다음과 같이 된다.

$$0=-3-0+0+K_{21}$$

따라서 $K_{21}=3$을 얻는다.

이제 미지수는 K_{22} 하나만 남았는데 이것은 식 (C6-2)의 양변의 z에 임의의 편리한 값을 취함으로써 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어 $z=0$을 대입하면,

$$\frac{12}{8}=3+\frac{1}{4}+\frac{K_{22}}{4}-\frac{3}{2}$$

이 되므로, 이를 정리하면 $K_{22}=-1$이 얻어진다.

구해진 계수 값들을 식 (C6-2)에 대입한 뒤 양변에 z를 곱하면 다음과 같이 부분 분수 전개된 $X(z)$가 구해진다.

$$X(z)=-3\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{(z-2)^3}-\frac{z}{(z-2)^2}+3\frac{z}{z-2}$$

변환쌍표를 이용하여 역 z 변환을 수행하면 $x[n]$은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x[n]&=\left(-3-2\frac{n(n-1)}{8}(2)^n-\frac{n}{2}(2)^n+3(2)^n\right)u[n] \\ &=-\left(3+\frac{1}{4}(n^2+n-12)2^n\right)u[n] \end{aligned}$$

이 방법은 (책)식 (8.33)을 몰라도 부분 분수 전개가 가능하며, (책)식 (8.33)을 사용하는 것보다 좀 더 간편함을 느낄 수 있을 것이다. ■

■ (책)[예제 8-6]의 보충 :

$X(z)$의 분모가 공액 복소근을 가지는 경우에는 (책)예제 6.9의 풀이와 같이 단순근을 갖는 부분 분수 항으로 전개하면 복잡한 복소수 계산을 거쳐야 하므로 다음과 같이 2차 항으로 전개를 하는 쪽이 계산상 더 편하다.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{Az+B}{z^2+2bz+a^2} = \frac{A(z-b)}{(z^2+2bz+a^2)} + \frac{Ab+B}{(z^2+2bz+a^2)} \tag{C8-8}$$

그런 다음 (책)8.2절에서 구한 지수적으로 변동하는 정현파의 z 변환쌍 (책)식 (8.23)과 (책)식 (8.25)를 이용하여 역 변환하면 된다. 그리고 필요하다면 삼각함수 합성 공식을 적용하여 코사인파 또는 사인파로 정리하는 것이 더 쉽고 효율적이다.

이 예의 경우 $X(z)$를 식 (C6-3)의 형태로 다시 쓰면 다음과 같으므로

$$X(z) = \frac{z(4z-1)}{4z^2-2z+1} = \frac{4z(z-0.5)}{4(z^2-0.5z+0.25)}$$

이를 (책)식 (8.23)과 비교하여 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} 2a\cos\Omega = 0.5 \\ a^2 = 0.25 \end{cases}$$

위의 방정식을 a와 Ω에 대해 풀면

$$\begin{cases} a = 0.5 \\ \Omega = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

그러므로 $X(z)$의 역 변환은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = a^n(\cos\Omega n)u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u[n]$$

풀이 과정에 복소수의 계산이 없으므로 좀 더 간편하다. ■

8.4 z 변환의 성질

z 변환의 성질은 시간 이동 성질을 제외하고는 양방향 z 변환과 단방향 z 변환의 차이가 거의 없다.

(1) 선형성

(책)식 (8.34)로 주어진 선형성을 나타내는 z 변환쌍의 수렴 영역은 $X(z)$의 수렴 영역 R_X와 $Y(z)$의 수렴 영역 R_Y을 동시에 만족해야 하므로 $R_X \cap R_Y$가 된다. 따라서 z 변환쌍을 수렴 영역과 함께 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \Leftrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z), \quad ROC: R_X \bigcap R_Y \tag{C8-9}$$

z 변환의 선형성을 이용하면, 복잡한 신호를 여러 개의 기본 신호로 분해하여 이미 알고 있는 기본 신호의 z 변환의 일차 결합으로 나타냄으로써 복잡한 신호도 손쉽게 z 변환을 할 수 있게 된다. 예를 들어, 2절에서 (책)식 (8.22)와 같이 정현파의 z 변환을 구한 것도 선형성을 적용한 결과이다.

(2) 시간 반전

시간 반전은 z을 z^{-1}으로 치환하는 동작이므로 수렴 영역은 $x[n]$의 수렴 영역 R_X의 역이 된다. 예를 들어, $x[n]$의 수렴 영역이 $a < |z| < b$이면, $x[-n]$의 수렴 영역은 z을 z^{-1}으로 치환하면 $\frac{1}{b} < |z| < \frac{1}{a}$가 된다.

따라서 z 변환쌍을 수렴 영역과 함께 나타내면 다음과 같이 된다.

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}), \quad ROC: R_X^{-1} \tag{C8-10}$$

(3) 시간 이동

$x[n]$을 n_0만큼 지연한 신호의 단방향 z 변환에 대한 (책)식 (8.43)은 다음과 같이 수식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z\{x[n-n_0]u[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} = \sum_{k=-n_0}^{\infty} x[k]z^{-(k+n_0)} \\ &= z^{-n_0}\left(\sum_{k=-n_0}^{-1} x[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}\right) \\ &= z^{-n_0}X(z) + z^{-n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x[-n]z^{n} \end{aligned} \tag{C8-11}$$

$x[n]$을 n_0만큼 선행시킨 신호의 단방향 z 변환에 대한 (책)식 (8.44)도 마찬가지로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} Z\{x[n+n_0]u[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+n_0]z^{-n} = \sum_{k=n_0}^{\infty} x[k]z^{-(k-n_0)} \\ &= z^{n_0}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} - \sum_{k=0}^{n_0-1} x[k]z^{-k}\right) \\ &= z^{n_0}X(z) - z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} x[n]z^{-n} \end{aligned} \tag{C8-12}$$

시간 이동 $x[n-n_0]$의 z 변환에 대한 수렴 영역은 양방향 z 변환에서 경우에 따라 $z=0$ 또는 $|z|=\infty$가 제외되는 것을 빼고는 $x[n]$의 수렴 영역 R_X와 같다.

(4) 주파수 척도 변화

주파수 척도 변화는 z가 z/z_0로 바뀌었기 때문에 수렴 영역은 $x[n]$의 수렴 영역 R_X의 $|z_0|$배가 된다. 따라서 수렴 영역을 표시한 변환쌍은 다음과 같다.

$$z_0^n x[n] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC : |z_0| R_X \qquad \text{(C8-13)}$$

■ 예제 C8-10 : *z 변환의 성질들의 혼합 적용*

다음과 같은 $X(z)$에 대해 z 변환의 성질을 이용하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z) = \log(1 + az^{-1})$$

<풀이>

주파수 미분 성질을 이용하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = Z\{nx[n]\}$$

그런데 $(-a)^n u[n] \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+az^{-1}}$ 이므로 위 식의 우변은 선형성과 시간 이동 성질에 의해 $(-a)^n u[n]$을 a배하고 1만큼 시간 지연시킨 것에 대응된다. 즉,

$$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = Z\{a(-a)^{n-1}u[n-1]\}$$

따라서 두 식을 비교하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

■

8.5 z 변환에 의한 차분 방정식 해석

3장에서 보았듯이 시스템 응답은 필요에 따라, 시스템을 동작하게 만드는 원인(자극)을 기준으로 '영입력 응답+영상태 응답'의 형태로 표현하거나, 시스템 모드의 포함 여부를 기준으로 '고유 응답+강제 응답' 형태로 표현할 수 있다.

차분 방정식의 풀이에 z 변환을 이용하면 어느 쪽으로든지 비교적 쉽게 시스템의 응답을 분리할 수 있다. 시스템 응답을 영입력 응답과 영상태 응답으로 분리하고자 할 경우에는 차분 방정식의 z 변환 결과에서 입력에 의한 항과 초기 조건에 의한 항으로 분리하기만 하면

된다. 고유 응답과 강제 응답으로 분리하고자 할 경우에는 차분 방정식을 z 변환하여 부분 분수로 전개한 결과에서 입력과 같은 꼴인 항과 아닌 항으로 나누면 된다.

■ 예제 C8-11 : *z 변환을 이용한 차분 방정식의 풀이*

다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 응답을 z 변환을 이용하여 구하러.
단 입력은 $x[n]=(2)^{-n}u[n]$이고, 초기 조건은$y[-1]=11/6$, $y[-2]=37/36$ 이다.

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=3x[n+1]+5x[n]$$

<풀이>

주어진 차분 방정식이 선행 연산자 형으로 표현되어 있으므로 해를 구하기 위하여 z 변환의 시간 선행(좌측 이동) 성질을 사용하는 것이 적절한 것처럼 보이지만, 이 성질을 이용하기 위해서는 초기 조건이 $y[0]$, $y[1]$으로 주어져야 한다. 그러나 문제에는 $y[-1]$, $y[-2]$이 주어져 있으므로 차분 방정식을 지연 연산자 형으로 표현하고 z 변환의 시간 지연(우측 이동) 성질을 사용하여 푸는 것이 낫다. 그렇게 하지 않으려면, 3장에서 살펴본 것처럼 반복 대입법을 사용하여 $y[-1]$, $y[-2]$으로부터 $y[0]$, $y[1]$을 구한 뒤 시간 선행 성질을 적용해야 한다.

주어진 차분 방정식을 지연 연산자 형으로 표현하면 다음과 같다.

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

시간 지연(우측 이동) 성질을 사용하여 이 방정식의 z 변환을 구하면,

$$\begin{aligned}&Y(z)-5(z^{-1}Y(z)+y[-1])+6(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])\\&=3z^{-1}X[z]+5z^{-2}X(z)\end{aligned}$$

이를 다시 정리하면

$$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)-5y[-1]+6z^{-1}y[-1]+6y[-2]=(3z^{-1}+5z^{-2})X(z)$$

위 식의 우변에 $x[-1]$, $x[-2]$ 항들이 포함되지 않은 이유는 입력 신호 $x[n]$이 인과 신호여서 $n<0$에서의 값들을 고려할 필요가 없기 때문이다.

입력 신호 $x[n]$의 z 변환은 다음과 같으므로

$$X(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

이와 주어진 초기 조건을 대입하여 차분 방정식을 z 변환한 것을 정리하면 다음과 같다.

$$(z^2-5z+6)Y(z)-(3z^2-11z)=\frac{(3z+5)z}{z-0.5}$$

이를 $Y(z)$에 대해 정리하면

$$Y(z)=\frac{(3z^2-11z)}{(z^2-5z+6)} \;+\; \frac{(3z+5)z}{(z^2-5z+6)(z-0.5)}$$

위 식의 우변의 첫 번째 항은 초기 조건에 의한 응답 성분이고 두 번째 항은 입력에 의한 응답 성분이다. 그러므로 이를 각각 부분 분수 전개하면

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z}&=\frac{(3z-11)}{(z^2-5z+6)} \;+\; \frac{(3z+5)}{(z^2-5z+6)(z-0.5)}\\&=\left[\frac{5}{z-2}-\frac{2}{z-3}\right] \;+\; \left[\frac{26}{15}\left(\frac{1}{z-0.5}\right)-\frac{22}{3}\left(\frac{1}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{1}{z-3}\right)\right]\end{aligned}$$

따라서 $Y(z)$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}Y(z)&=\underbrace{\left[\frac{5z}{z-2}-\frac{2z}{z-3}\right]}_{\text{영입력 응답}} \;+\; \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)-\frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{영상태 응답}}\\&=\underbrace{\left[\frac{5z}{z-2}-\frac{2z}{z-3}-\frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{고유 응답}} \;+\; \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)\right]}_{\text{강제 응답}}\end{aligned}$$

위 식의 두 번째 등식은 영상태 응답에 포함되어 있는 시스템 모드 항들을 모두 영입력 응답 쪽으로 옮겨서 얻어진 결과이다.

'영입력 응답 + 영상태 응답'의 형태로 출력 $y[n]$을 구하려면 위 식의 첫 번째 등식을 역 z 변환하면 된다.

$$y[n]=[5(2)^n-2(3)^n]u[n]+\left[-\frac{22}{3}(2)^n+\frac{28}{5}(3)^n+\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n]$$

'고유 응답 + 강제 응답'의 형태로 출력 $y[n]$을 구하려면 위 식의 두 번째 등식을 역 z 변환하면 된다.

$$\begin{aligned}y[n]&=\left[5(2)^n-2(3)^n-\frac{22}{3}(2)^n+\frac{28}{5}(3)^n\right]u[n]+\left[\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n]\\&=\left[-\frac{7}{3}(2)^n+\frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]+\left[\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n]\end{aligned}$$

이렇게 얻어진 '고유 응답 + 강제 응답' 형태의 출력이 3장에서 배운 시간 영역에서 고전적 해법으로 차분 방정식을 풀 경우에 얻어지는 해이다. ■

8.6 전달 함수

인과 LTI 시스템이 BIBO 안정하기 위한 조건은 전달 함수의 극 p_i이 z 평면에서 단위원 내에 존재, 즉 $|p_i| < 1$을 만족해야 한다. z 평면에서 단위원 외부는 인과 우편향 신호에 대한 z 변환의 수렴 영역인데, 안정 조건이 $|p_i| < 1$이기 때문에 안정한 전달 함수의 수렴 영역은 단위원을 포함한다.

임펄스 응답이 비인과 좌편향 신호가 될 경우에는 안정도 조건이 반대가 된다. 전달 함수의 극이 z 평면에서 단위원 밖에 존재해야, 다시 말해 $|p_i| > 1$을 만족해야 한다. 그리고 이때에도 전달 함수의 수렴 영역은 마찬가지로 단위원을 포함해야 한다.

■ 예제 C8-12 : *시스템의 인과성과 안정도*
다음의 전달 함수로 표현되는 LTI 시스템이 있을 때, 이 시스템이 인과적이기 위한 수렴 영역의 조건과 그 때의 임펄스 응답을 구하라.

$$H(z) = \frac{z(3z-4)}{z^3 - 3.5z + 1.5}$$

<풀이>
전달 함수를 부분 분수로 전개하면 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{2z}{z-3}$$

인과 시스템이 되려면 임펄스 응답이 $h[n] = 0,\ n < 0$을 만족해야 한다. 이는 $h[n]$이 우편향 신호임을 의미한다. 따라서 수렴 영역은 $|z| > 0.5$와 $|z| > 3$을 동시에 만족해야 하므로 $|z| > 3$이 수렴 영역이다. 이 수렴 영역 조건 아래 부분 분수로 전개된 $H(z)$를 역 변환하면

$$h[n] = (0.5)^n u[n] + 2(3)^n u[n]$$

으로 임펄스 응답이 구해진다. 이 임펄스 응답은 인과적이긴 하나. $(3)^n u[n]$항으로 인해 값이 발산하게 되므로 불안정하다.

이번에는 시스템이 안정하기 위한 수렴 영역의 조건과 그 때의 임펄스 응답을 구해 보자. 안정한 시스템이 되려면 수렴 영역이 단위원을 포함해야만 하는데, 주어진 전달 함수가 가질 수 있는 3가지 수렴 영역 중 이를 만족하는 것은 $0.5 < |z| < 3$의 경우뿐이다. 그러므로

임펄스 응답은 다음과 같이 인과 신호와 비인과 신호의 합이 된다.

$$h[n] = (0.5)^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1]$$

$n<0$에 대해 $(3)^n < 1$이므로 임펄스 응답은 안정한 대신 $(3)^n u[-n-1]$항으로 인해 비인과적이다.

이 예에서 보듯이 *전달 함수의 극이 단위원 내부와 외부로 나뉘어 있는 시스템은 인과성과 안정성을 동시에 만족시킬 수가 없다.* ■

8.7 전달 함수와 주파수 응답의 관계

전달 함수와 주파수 응답을 고유 함수의 개념으로 접근하여 살펴보기로 하자. 시스템에 입력 $x(t) = \psi(t)$를 인가하였을 때 출력이 $y(t) = \lambda\psi(t)$와 같이 되는 함수 $\psi(t)$를 고유 함수 eigen function, λ를 고유값eigenvalue이라 한다. 연속계의 경우 지수 함수 e^{st}가 LTI 시스템의 고유 함수가 된다. 이를 증명하기 위해 e^{st}를 입력으로 인가할 때 LTI 시스템의 출력을 계산해보자.

시스템의 임펄스 응답을 $h(t)$라고 하면, 출력은 다음과 같이 입력과 입력의 컨벌루션으로 주어진다.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} e^{-s\tau} h(\tau)\,d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau)\,d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned} \tag{C8-14}$$

여기서 $H(s)$는 복소 상수로서 그 값은 다음과 같이 계산된다.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt \tag{C8-15}$$

식 (C8-15)는 바로 임펄스 응답 $h(t)$의 라플라스 변환이다.

식 (C8-14)에서 입력과 출력의 비를 구해보면 다음과 같다.

$$\left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{st}} = H(s) \tag{C8-16}$$

분명히 $H(s)$는 입력이 출력으로 전달되는 정도를 나타내고 있으며, 이로부터 임펄스 응답

을 라플라스 변환한 $H(s)$가 왜 전달 함수라고 불리는지 이해할 수 있을 것이다.

나아가서 한 가지 더 알아두면 좋은 사실은 시간 영역에서 주파수 영역으로 표현을 바꿔주는 변환은 모두 기본 신호로 고유 함수인 e^{st}를 사용한 결과로 해석할 수 있다는 점이다. e^{st}에서 $s=jk\omega_0$로 두면 푸리에 급수, $s=j\omega$로 두면 푸리에 변환, 그냥 그대로 s로 두면 라플라스 변환이 된다. 즉 고유 함수의 개념에 의해서 주파수 영역으로의 변환이 하나의 틀로 설명될 수 있는 것이다.

이산 LTI 시스템에 대해서도 같은 논리가 적용되어 비슷한 결과를 얻을 수 있다. 다만 이번에는 고유 함수가 e^{st}가 아니라 z^n이라는 점이 다를 뿐이다. 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답이 $h[n]$이라면, 입력 z^n에 대한 시스템의 출력은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * z^n = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k} \\ &= H(z) z^n \end{aligned} \tag{C8-17}$$

따라서, 전달 함수 $H(z)$는 임펄스 응답의 z 변환으로서, 지수 함수 입력 신호 z^n에 대한 출력 신호의 비로 정의할 수 있다. 즉

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \left. \frac{y[n]}{x[n]} \right|_{x[n]=z^n} \tag{C8-18}$$

이제 전달 함수에 대한 이상의 결과를 이용하여 주파수 응답에 대해서 살펴보기로 하자. 주파수 응답은 입력의 주파수 변화에 대한 시스템의 응답 특성이므로 결국 입력 정현파에 대한 출력 정현파의 진폭과 위상 변화를 나타낸 것이다.

정현파 입력 $x[n] = \cos \Omega n$에 대한 이산 LTI 시스템의 응답을 구해보자. 오일러 공식에 의해 $\cos \Omega n = (e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n})/2$이고, 식 (C8-17)에서 지수 함수 z^n에 대한 시스템 응답이 $H(z)z^n$으로 주어지므로, $z = e^{\pm j\Omega}$라 두면 시스템 응답은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}\left(H(z) z^n \Big|_{z=e^{j\Omega}} + H(z) z^n \Big|_{z=e^{-j\Omega}} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} + H(e^{-j\Omega}) e^{-j\Omega n} \right) \end{aligned} \tag{C8-19}$$

여기서 $H(e^{j\Omega})$는 Ω의 함수이므로 간단히 $H(\Omega)$로 나타내기로 하면,

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = \left. \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \right|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \tag{C8-20}$$

즉 $H(\Omega)$는 $h[n]$의 이산 시간 Fourier 변환이 된다. $H(\Omega)$를 극좌표 형식으로 표현하면 $H(\Omega)=|H(\Omega)|e^{j\angle H(\Omega)}$이므로, 식 (C6-14)의 시스템 출력은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}\left[|H(\Omega)|e^{j\angle H(\Omega)}e^{j\Omega n}+|H(\Omega)|e^{-j\angle H(\Omega)}e^{-j\Omega n}\right] \\ &= |H(\Omega)|\cos(\Omega n+\angle H(\Omega)) \end{aligned} \tag{C8-21}$$

이상의 결과는 책에서 살펴보았던 주파수 응답의 개념 및 전달 함수와의 관계와 정확히 일치하는 결과이다.

■ 예제 C8-13 : *전달 함수를 이용한 주파수 응답 계산*

다음 차분 방정식으로 표현되는 이산계 LTI 시스템의 주파수 응답과 정현파 $\cos\left(\frac{\pi}{6}n-0.2\right)$에 대한 시스템 출력을 구하라.

$$y[n]-0.8y[n-1]=x[n]$$

<풀이>

위의 차분 방정식을 z 변환하여 전달 함수를 구하면 다음과 같다.

$$H(z)=\frac{z}{z-0.8}=\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$

따라서, 주파수 응답은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{1-0.8e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-0.8(\cos\Omega-j\sin)} \\ &= \frac{1}{(1-0.8\cos\Omega)+j0.8\sin\Omega} \end{aligned}$$

이때, 진폭 응답과 위상 응답은 다음과 같이 주어진다.

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-0.8\cos\Omega)^2+(0.8\sin\Omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1.64-1.6\cos\Omega}}$$

$$\angle H(\Omega)=-\tan^{-1}\left[\frac{0.8\sin\Omega}{1-0.8\cos\Omega}\right]$$

[그림 C8-2]는 이 시스템의 진폭 및 위상 응답을 그린 것이다.

이제 주어진 입력에 대하여 진폭 및 위상 응답을 계산하자. 위 식에 $\Omega=\pi/6$을 대입하여 다음을 얻는다. 이 값들은 그림 C6-1에서 $\Omega=\pi/6$에서의 값을 읽어서 바로 구할 수도 있다.

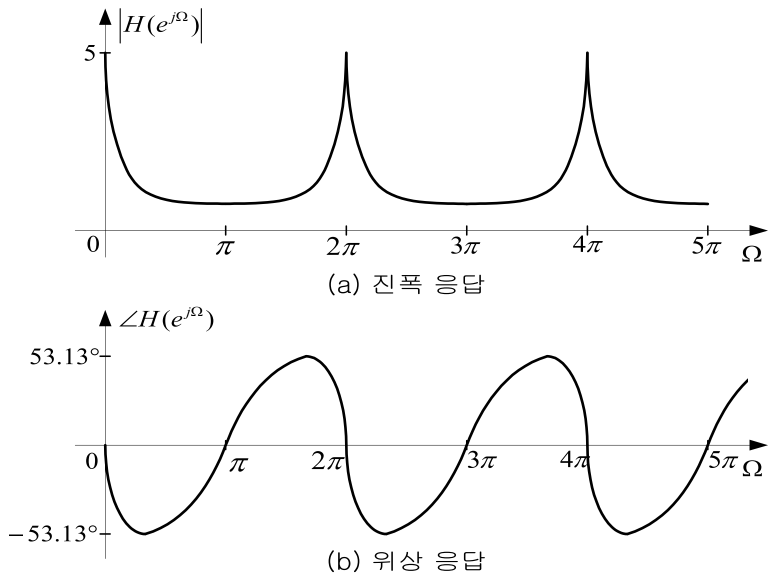
$$\left|H\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\frac{\pi}{6}}} = 1.983$$

$$\angle H\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\tan^{-1}\left[\frac{0.8\sin\frac{\pi}{6}}{1 - 0.8\cos\frac{\pi}{6}}\right] = -0.916$$

따라서 시스템 응답은 다음과 같다.

$$y[n] = 1.983\cos\left(\frac{\pi}{6}n - 0.2 - 0.916\right) = 1.983\cos\left(\frac{\pi}{6}k - 1.116\right)$$

■



[그림 C8-1] [예제 C8-13]의 시스템 주파수 응답