

디지털 필터의 기초

책의 3부인 필터 설계와 관련하여 학부 수준에서 다룰만한 내용들은 책에서 필요한 내용들을 빠뜨림 없이 비교적 상세하게 설명하였기 때문에, 9장부터 12장까지는 보완할 내용이 그리 많지 않다.

책의 ‘1절 필터의 개요’와 관련하여 필터의 용도와 필터의 선택에 관한 보완 설명을 추가하였다.

책의 ‘2절 주파수 응답/전달 함수와 필터 특성’과 관련하여 인과성과 필터의 주파수 응답 및 임펄스 응답과의 관계에 대해 설명과 간단한 예제를 추가하였다.

책의 ‘3절 간단한 실용 필터’와 관련하여 빗살 필터라는 이름을 확인할 수 있는 주파수 응답 그림을 제시하였고, 디지털 공진기의 대역폭과 극의 반지름에 관한 근사식을 유도하였다.

마지막으로 책의 ‘4절 필터 설계의 개요’에 대해서는 같은 진폭 응답 특성을 나타내는 FIR 필터와 IIR 필터의 예를 통하여 간단히 장단점을 비교하였다.

9.1 필터의 개요

(1) 필터의 용도

필터의 용도는 대체로 **분리(separation)**와 **복구(restoration)**의 둘로 나눌 수 있다.

분리는 한꺼번에 섞여 있는 여러 신호들 중에서 특정한 신호만 뽑아내는 작업이다. 예를 들면, 공중파 방송에 대한 TV나 라디오의 튜너(tuner)는 공중에 날아다니는 다수의 방송 전파들 중에서 특정 방송국의 전파만 선택적으로 뽑아낸다. 또 병원에서 태아의 심박이나 심전도를 측정할 때 엄마의 것에 의해 간섭을 받은 측정 신호로부터 태아의 것만 뽑아내는 일들이 바로 필터를 분리의 용도로 사용하는 것들이다.

복구는 잡음 등으로 인해 훼손되어 있는 신호를 말끔한 상태로 재건하는 작업이다. 복구의 예로는 음반 복각 작업을 들 수 있다. 유명 가수나 연주자들의 유성기 음반이나 오래된 LP 음반들을 CD로 재녹음할 때, 음반 재질의 특성이나 보관상의 문제로 인해 생기는 찢찢거리는 Hiss 잡음을 비롯한 잡음들을 제거하여 최근에 녹음한 것 같은 깨끗한 음질을 만들어낸다. 또 카메라로 사진을 찍을 때 렌즈에 손자국이 묻거나 흔들려서 뭉개진 이미지를 손상이 없는 깨끗한 이미지로 화질 개선을 하는 것도 필터를 복구의 용도로 사용하는 것이다.

(2) 필터의 선택

필터를 설계하고 사용할 때 물론 주파수 선택 특성에 따라 LP, HP, BP, BS 중의 하나를 선택해야겠지만, 아날로그 필터와 디지털 필터, FIR 필터와 IIR 필터 중에 어느 쪽으로 가야 할 것인지도 선택해야 한다.

아날로그 필터는 싸고 빠르며 처리할 수 있는 신호의 진폭과 주파수 범위가 넓다는 장점을 지니지만, 필터 구성 소자들의 물리적 특성으로 인한 성능의 항상성이 보장 되지 않고 세밀한 성능 조절이 어렵다는 단점을 갖는다. 반면에 디지털 필터는 구성 요소와 비용의 증가, 처리 속도, 처리 대상 신호에 대한 제한 등 아날로그 필터에 미치지 못하는 단점들이 있음에도 불구하고, 우수한 성능(performance)으로 인해 폭넓게 선호되고 있다. 예를 들어, 디지털 필터에서는 통과 대역에 비해 매우 좁은 천이 대역과 통과 대역 및 저지 대역에서의 이득 조절이 아주 미세한 수준까지 실현이 가능한데, 연산 증폭기 등으로 구성된 아날로그 필터로는 할 수 없는 일이다.

책의 [표 9-2]에 비교한 것과 같이, FIR 필터는 기본적으로 높은 차수로 인하여 처리 속도나 필터 구성 소자 수 등에서 약점을 지니고, IIR 필터는 유한 어장 효과에 더 민감하고 위상 특성이 비선형적이라는 단점이 있다. 따라서 FIR 필터는 유한 어장 효과의 영향이 중요하거나 선형 위상 특성이 요구되는 경우에 주로 사용되며, IIR 필터는 (낮은 차수의 장점을 살릴 수 있는) 처리량이 많거나 날카로운 천이 특성을 필요로 하는 경우에 주로 사용된다.

9.2 주파수 응답/전달 함수와 필터 특성

9.2.1 인과성과 주파수 응답 및 임펄스 응답의 관계

필터의 임펄스 응답 $h[n]$ 은 다음과 같이 우함수 성분과 기함수 성분의 합으로 나타낼 수 있다.

$$h[n] = h_e[n] + h_o[n] \quad (C9-1)$$

여기서

$$\begin{cases} h_e[n] = \frac{h[n] + h[-n]}{2} \\ h_o[n] = \frac{h[n] - h[-n]}{2} \end{cases} \quad (C9-2)$$

만약 $h[n]$ 이 인과적이라면 $h[-n]$ 은 $n=0$ 일 경우, 즉 $h[0]$ 를 제외하고는 모두 0이 된다. 따라서 $h[n]$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h[n] = 2h_e[n] - h[0]\delta[n] \quad (C9-3)$$

$$h[n] = 2h_o[n] + h[0]\delta[n] \quad (C9-4)$$

그러므로 $h_e[n]$ 만 주어지거나 $h_o[n]$ 과 $h[0]$ 만 주어지면 $h[n]$ 을 완전히 복원할 수 있다.

일반적으로 물리적으로 구현되는 필터의 임펄스 응답 $h[n]$ 은 실수 신호이므로 푸리에 변환의 대칭성 성질에 의해 $h[n]$ 의 우함수 및 기함수 성분과 주파수 응답 $H(\Omega)$ 의 실수부 및 허수부 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} h_e[n] \Leftrightarrow \text{Re}\{H(\Omega)\} \\ h_o[n] \Leftrightarrow \text{Im}\{H(\Omega)\} \end{cases} \quad (C9-5)$$

식 (C9-3), 식 (C9-4)와 식 (C9-5)를 결부시키면, $\text{Re}\{H(\Omega)\}$ 만 알거나, $\text{Im}\{H(\Omega)\}$ 와 $h[0]$ 만 알면 주파수 응답 $H(\Omega)$ 를 완전히 결정할 수 있다는 결론을 얻는다.

이상의 관계들로부터 주파수 응답 실수부와 허수부가 각각 이산 힐베르트 변환으로 구해질 수 있다.

이는 주파수 응답의 실수부와 허수부가 독립적이 아니고 서로 종속적임을 의미하며, 그 결과 **진폭 응답과 위상 응답 또한 서로 종속적이다**. 다시 말해, **진폭 응답과 위상 응답을 전혀 별개의 특성으로 취급하여 필터를 설계할 수 없으며, 어느 한쪽이 결정되면 그에 의해 나머지 한쪽은 반드시 특정한 형태를 갖게 된다**는 것이다.

인과성으로 인해 주파수 응답이 가지게 되는 성질들을 정리하면 다음과 같다.

1. $H(\Omega)$ 는 임의의 유한한 주파수 대역에서 0이 되지 않으며 다만 유한개의 주파수에서만 0이 될 수 있다. (Paley-Wiener 정리의 결과)
2. $H(\Omega)$ 는 임의의 유한한 주파수 대역 전체에서 이득이 상수가 될 수 없으며, 통과 대역에서 저지 대역으로의 천이 또한 이상적인 필터와 같이 급작스런 불연속을 가질 수 없다. (Gibbs 현상의 결과)
3. $H(\Omega)$ 의 진폭 응답과 위상 응답은 서로 종속적이며, 따라서 $|H(\Omega)|$ 와 $\angle H(\Omega)$ 가 독립적으로 임의로 선택될 수 없다.

이러한 성질들이 반영되어 실제 인과 필터의 진폭 응답 특성이 9.4절의 (책)[그림 9-15]와 같이 되는 것이다. 또한 위의 성질들은 (책)[그림 9-2]의 이상적인 주파수 선택 필터들은 비인과 필터가 될 수밖에 없음을 암시하고 있다.

■ 예제 C9-1 : 필터의 인과성

어떤 인과 필터의 임펄스 응답이 우함수 대칭인 실수 신호라고 한다. 주파수 응답의 실수부가 다음과 같이 주어질 때 이 필터의 임펄스 응답과 주파수 응답을 구하라.

$$H(\Omega) = \frac{1 - \cos\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}, \quad |a| < 1$$

<풀이>

오일러 공식을 이용하여 주어진 주파수 응답을 다시 쓰면

$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{a}{2}(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})}{1 - a(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) + a^2}$$

$$H(z) = \frac{1 - \frac{a}{2}(z + z^{-1})}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} =$$

그런데 극이 $z = a$, $z = 1/a$ 이므로 수렴 영역이 $|a| < |z| < 1/|a|$ 가 되어 양방향 신호이다. 이를 역변환하면

$$h_e[n] = \frac{1}{2}a^{|n|} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

따라서 임펄스 응답은 다음과 같이 된다.

$$h[n] = 2h_e[n] - h[0]\delta[n] = a^n u[n]$$

그러므로 주파수 응답은 다음과 같이 구해진다.

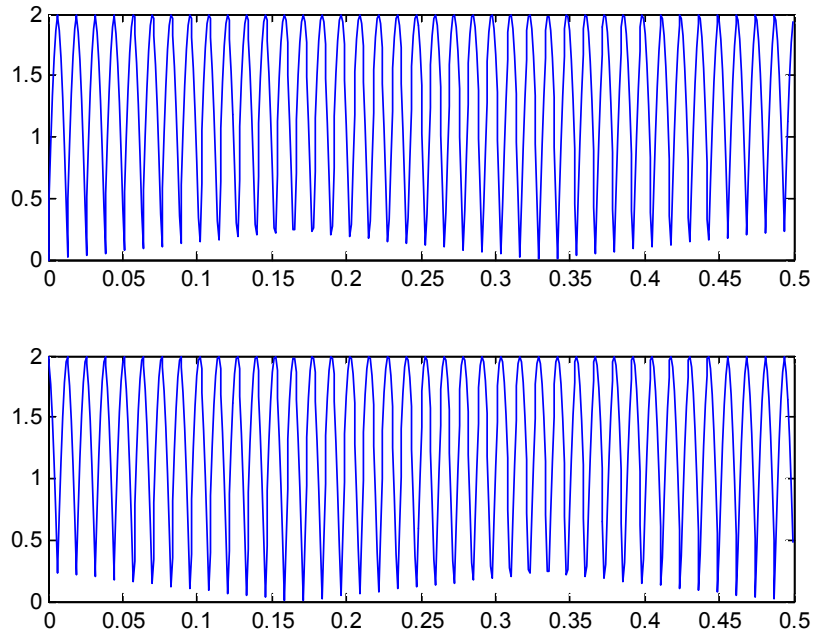
$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

■

9.3 간단한 실용 필터

(1) 빗살 필터

빗살 필터는 (책)[그림 9-8]이나 (책)[그림 9-9]만 보아서도 왜 빗살 필터라는 이름이 붙었는지 이해가 잘 안갈 수 있다. 그러나 아래의 [그림 C9-1]을 보면 금방 고개를 끄덕이게 될 것이다. [그림 C9-1]은 $N=80$ 의 경우에 대해 (책)식 (9.36)과 (책)식 (9.37)의 주파수 응답을 그린 것으로, 위의 그림이 (책)식 (9.36), 아래 그림이 (책)식 (9.37)의 경우이다.



[그림 C9-1] 빗살 필터의 주파수 응답 ($N=80$)

(2) 디지털 공진기

디지털 공진기의 대역폭을 결정하려면 정확한 공진 주파수와 $|H(\Omega)|^2$ 의 첨두치를 알아야 한다. 공진 주파수는 다음과 같이 주어지는데,

$$\Omega_r = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2}{2r} \cos \Omega_0 \right) \quad (\text{C9-6})$$

r 이 1에 가까우면, 즉 극이 단위원에 가까이 위치하면 $\Omega_r \simeq \Omega_0$ 가 됨을 알 수 있다. 이 경우에 $|H(\Omega)|^2$ 의 첨두치는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} |H(\Omega)|_{\Omega=\Omega_0}^2 &= \frac{b_0^2}{[1-2r\cos(\Omega-\Omega_0)+r^2][1-2r\cos(\Omega+\Omega_0)+r^2]} \Bigg|_{\Omega=\Omega_0} \\ &= \frac{b_0^2}{(1-r)^2(1-2r\cos 2\Omega_0+r^2)} \end{aligned} \quad (C9-7)$$

그러므로 반전력 주파수에서는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-2r\cos(\Omega-\Omega_0)+r^2)(1-2r\cos(\Omega+\Omega_0)+r^2)} \\ &= \frac{0.5}{(1-r)^2(1-2r\cos 2\Omega_0+r^2)} \end{aligned} \quad (C9-8)$$

$r \simeq 1$ 인 경우에는 반전력 주파수도 Ω_0 에 가까우므로 식 (C9-8)에서 $\Omega+\Omega_0 \simeq 2\Omega_0$, $\Omega-\Omega_0 = 0.5\Delta\Omega$ 로 근사화하여 정리하면 다음의 관계를 얻는다.

$$1-2r\cos 0.5\Delta\Omega+r^2=2(1-r)^2 \quad (C9-9)$$

이로부터 대역폭과 극의 반지름에 대한 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$\Delta\Omega \simeq 2(1-r) \quad (C9-10)$$

$$r \simeq 1-0.5\Delta\Omega \quad (C9-11)$$

9.4 필터 설계의 개요

다음의 두 필터는 같은 진폭 응답 특성을 나타내는 필터로, 이들의 주파수 응답은 각각 [그림 C9-2]와 [그림 C9-3]에 나타나 있다.

FIR 필터 :

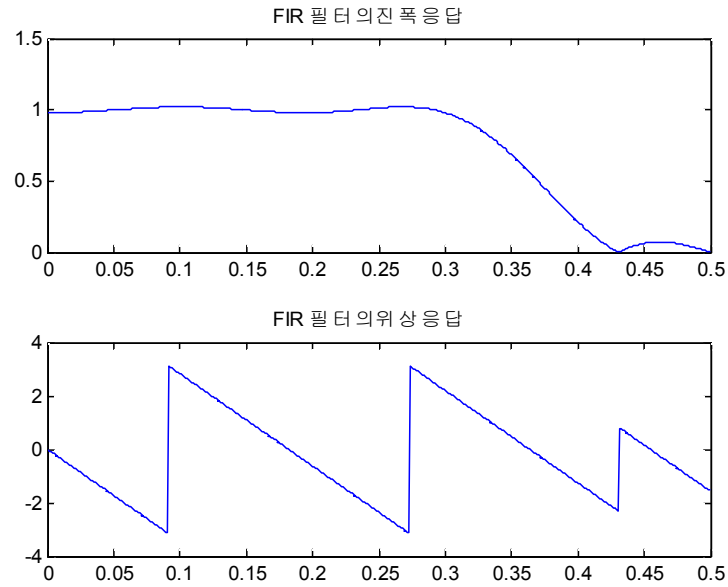
$$H(z) = \sum_{n=0}^{11} h[n]z^{-n} \quad (C9-12)$$

$$\begin{aligned} h[0] &= h[11] = 0.54603280 \times 10^{-2}, & h[1] &= h[10] = -0.45068750 \times 10^{-1} \\ h[2] &= h[9] = 0.69169420 \times 10^{-1}, & h[3] &= h[8] = -0.55384370 \times 10^{-1} \\ h[4] &= h[7] = -0.63428410 \times 10^{-1}, & h[5] &= h[6] = 0.57892400 \times 10^0 \end{aligned}$$

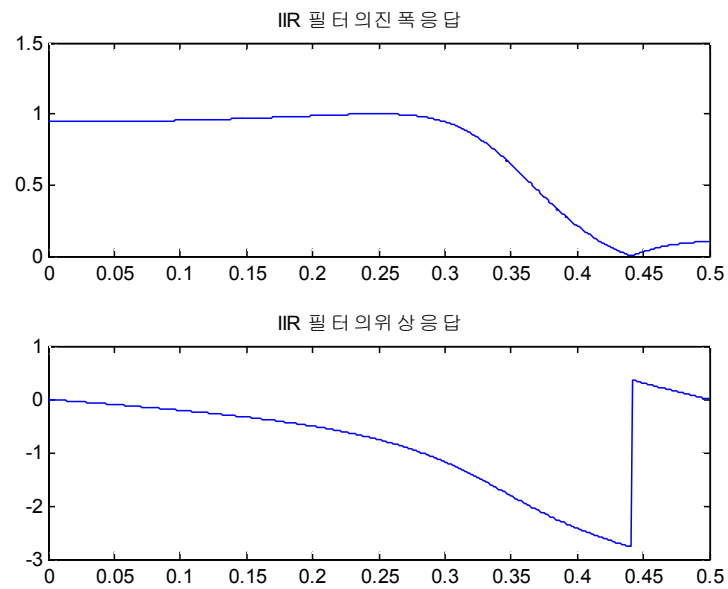
IIR 필터 :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (C9-13)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 0.4981819, & b_1 &= 0.9274777, & b_2 &= 0.4981819 \\ a_1 &= 0.6744878, & a_2 &= 0.3633482 \end{aligned}$$



[그림 C9-2] FIR 필터의 주파수 응답



[그림 C9-3] IIR 필터의 주파수 응답

이 두 필터를 차분 방정식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{FIR 필터} : y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots + h[11]x[n-11] \quad (\text{C9-14})$$

$$= \sum_{n=0}^{11} h[n]x[n-k]$$

$$\text{IIR 필터} : y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] \quad (\text{C9-15})$$

이들 차분 방정식으로부터 필터를 직접형 구조로 소프트웨어로 구현할 경우 연산량과 데이터 및 계수 저장을 위한 메모리의 양은 [표 C9-1]과 같다.

[표 C9-1] FIR 필터와 IIR 필터의 구현 비교

	FIR 필터	IIR 필터
곱셈 수	12	5
덧셈 수	11	4
메모리 수	24	10(8)

식 (C9-15)를 변형하면 다음과 같이 쓸 수 있는데, 이 경우에는 필요한 메모리의 수가 8이 되어 더 줄어든다.

$$w[n] = -a_1w[n-1] - a_2w[n-2] + x[n] \quad (\text{C9-16})$$

$$y[n] = b_0w[n] + b_1w[n-1] + b_2w[n-2] \quad (\text{C9-17})$$

[표 C9-1]을 보면 필터의 구현 측면에서는 IIR 필터가 더 유리하다는 것을 알 수 있다. 물론 FIR 필터의 경우에도 선형 위상형 구조로 구현하게 되면 곱셈과 메모리의 수가 줄기는 하지만, 그래도 IIR 필터의 경우보다 적어지지 않는다.

일반적으로 동일한 사양을 만족하는 필터를 만들려면 FIR 필터가 훨씬 차수가 높아야 한다는 점에서, FIR 필터는 비교적 구현이 단순하고 선형 위상 필터로 구현하면 계수가 대칭성 만족(계수가 절반만 있으면 됨)한다는 점 말고는 구현 측면에서는 큰 장점이 없다.

그러나 [그림 C9-2]와 [그림 C9-3]에서 보듯이 선형 위상 특성이 요구된다면 FIR 필터로 설계하는 것이 바람직하다. IIR 필터는 특히 대역 경계부에서 위상의 비선형 정도가 심해지는 경우가 많으므로 선형 위상이 요구되는 경우에는 사용하기가 어렵다. IIR 필터를 써야 할 경우에는 전역 통과 필터와 같은 위상 등화기를 달아야 하는데, 그럴 경우에는 [표 C9-1]에서 살펴본 필터 구현의 이점이 상쇄된다.