

이산 신호와 시스템

책의 ‘1절 이산 신호’와 관련하여 책에서 다른 신호의 분류 중 일부에 대해 상세한 보충 설명을 추가하였고, 소개하지 못했던 새로운 기준에 의한 신호의 분류에 대해서도 소개하였다.

책의 ‘2절 기본 이산 신호’와 관련해서는 임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호의 표현 예를 추가하였고, 오일러 공식과 표본화 함수를 새로이 소개하였다.

책의 ‘3절 이산 신호에 대한 기본 연산’과 관련하여 표로 간단히 소개한 기본 연산들을 자세하게 설명하였다.

책의 ‘4절 이산 시스템’에 대해서는 예제에 대한 보충 설명을 상세하게 덧붙였다.

마지막으로 책의 ‘5절 이산 시스템의 분류’와 관련하여 책에서 소개한 기준에 의한 시스템 분류에 대해 추가적인 설명을 상당히 보충하였을 뿐만 아니라, 다루지 못했던 새로운 기준에 의한 시스템 분류들도 충분히 소개하였다. 그리고 이런 분류에 의해 시스템의 특성을 파악하는 예를 덧붙였다.

이 장의 주제들은 디지털 신호 처리에서만 특별히 소개되는 내용이라기보다는 기본적으로 신호 및 시스템과 관련하여 다루어지는 주제들이기 때문에, 디지털 신호 처리에 국한시켜 생각하면 심화 학습 자료들의 상당 부분은 과한 느낌이 들 수도 있을 것이다. 그러나 별도의 참고 자료의 도움이 없이도 기초 개념을 확실히 할 수 있도록 하자는 의도에서 상세하고 깊이 있게 제시한 것이다.

2.1 이산 신호

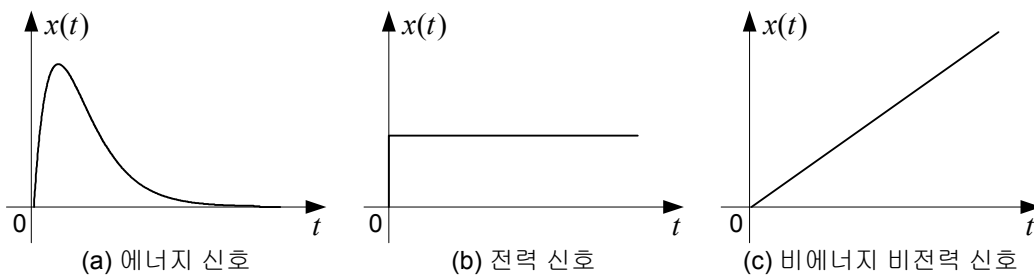
(1) 에너지 신호와 전력 신호

에너지 신호와 전력 신호의 구분은 신호를 주파수 영역으로 변환할 때 관련이 된다. 주파수 영역으로의 변환은 변환된 표현의 수렴이 보장된다는 전제하에 가능한데, 에너지 신호만이 푸리에 변환의 수렴 조건을 충족시키는 유일한 신호 그룹이다. 전력 신호들은 푸리에 변환의 수렴 조건을 충족시키진 않지만 워낙 활용도가 큰 신호 그룹이라 역지로 푸리에 변환이 존재하는 것으로 간주하여 취급한다.

그러나 [그림 C2-1(c)]의 램프 신호와 같이 에너지 신호도 전력 신호도 아닌 신호들은 푸리에 변환이 도저히 불가능하여 라플라스 변환을 통해 주파수 영역으로 표현을 바꿀 수 있게 된다.

■ 예제 C2-1 : 에너지 신호와 전력 신호

[그림 C2-1]의 (a)와 (b) 신호가 에너지 신호인지 전력 신호인지 판별하라.



[그림 C2-1] 에너지 신호와 전력 신호의 예

<풀이>

(a)의 신호는 $x(t) = Ae^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$)로 표현할 수 있으므로 에너지는

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} A^2 t^2 e^{-2\alpha t} dt \\
 &= -\frac{A^2}{2\alpha} t^2 e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} + \frac{2A^2}{2\alpha} \int_0^{\infty} t e^{-2\alpha t} dt \\
 &= \frac{A^2}{\alpha} \left(-\frac{1}{2\alpha} t e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt \right) = -\frac{A^2}{4\alpha^3} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A^2}{4\alpha^3}
 \end{aligned}$$

가 되어 유한하므로 에너지 신호이다.

(b)의 신호는 $x(t) = A, t \geq 0$ 으로 표현할 수 있으므로

$$\begin{aligned}
 E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} A^2 t \Big|_0^{T/2} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} A^2 \frac{T}{2} = \infty \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 t \Big|_0^{T/2} = \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

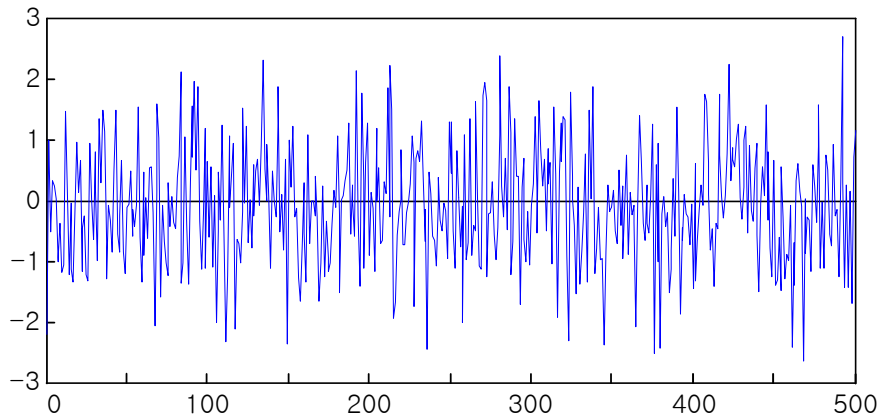
가 되어 에너지는 무한하지만 전력은 유한한 전력 신호이다. ■

(2) 확정 신호와 불규칙 신호

화정 신호는 같은 시간에 대한 신호 값은 항상 같으며, 이러한 시간과 신호의 관계는 결코 바뀌지 않는다. 예를 들어, $x(t) = 3t + 2$ 는 시간 t 의 값에 따라 신호의 값이 딱 정해져 고정되므로 확정 신호이지만, 만약 $x(t)$ 를 시간의 함수로 나타낼 수 없고 어떤 값이 될지 실제로 신호가 발생하기 전에는 알 수가 없다면 이는 확정 신호가 아니다.

이에 반해 불규칙 신호는 시간과 신호의 관계가 고정적이지 않아 신호가 발생하기 전에는 어떤 값이 될지 알 수가 없는 신호로서, 확률 밀도 함수와 평균, 분산과 같은 통계량을 이용하여 확률적으로 취급하여야 한다. 주사위 이어 던지기는 불규칙 신호의 대표적인 예로, 500번씩 던질 경우 어제와 오늘의 시행 결과는 다를 수 있지만 주사위 각 면의 숫자가 나올 확률이나 기댓값 등의 통계적 성질은 실험 환경이 바뀌지 않는 한 변하지 않는다.

반도체 소자에서 발생하는 열잡음이나 통신 시스템에서 나타나는 잡음도 불규칙 신호로서 스펙트럼이 모든 주파수에 걸쳐 있기 때문에 백색 잡음(white noise)이라고 부른다. [그림 C2-2]에 이러한 백색 잡음의 예를 보였다.



[그림 C2-2] 불규칙 신호의 예 - 백색 잡음

(3) 우함수 대칭 신호와 기함수 대칭 신호

어떤 신호들은 파형이 특별한 형태의 대칭성을 가진다. 코사인파와 같이 세로축에 대해 대칭인 신호를 우함수 대칭^{even symmetric} 신호, 사인파와 같이 원점에 대해 180°대칭인 신호를 기함수 대칭^{odd symmetric} 신호라고 한다.

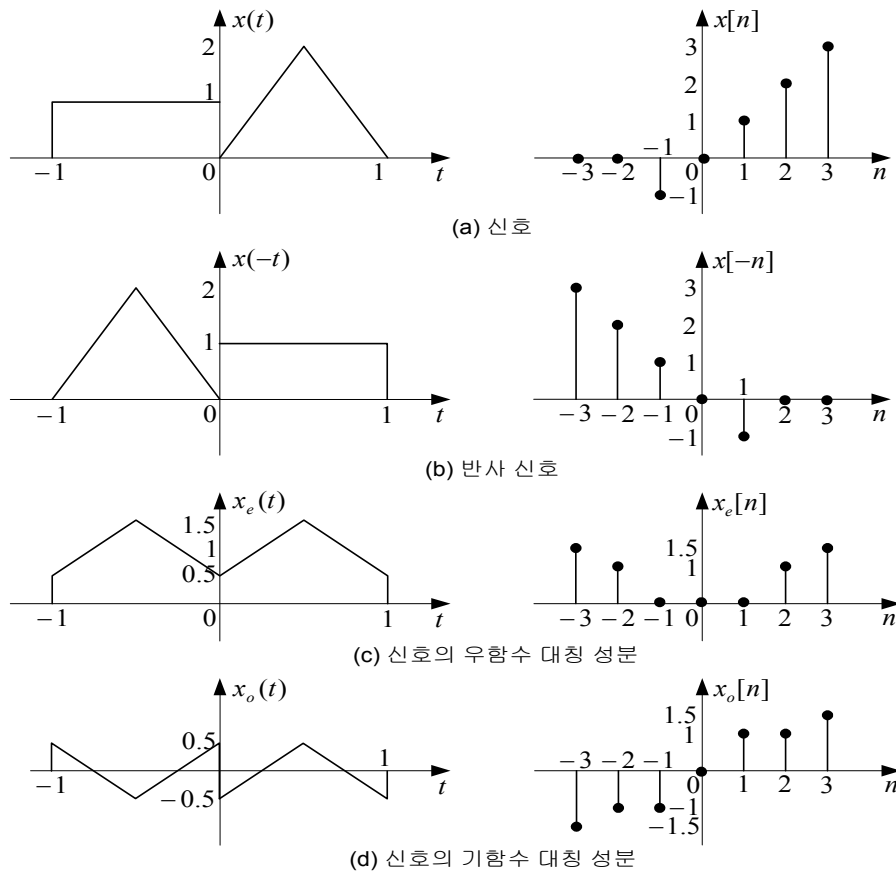
$$\text{우함수 대칭 신호 : } x[n] = x[-n] \quad (\text{C2-1})$$

$$\text{기함수 대칭 신호 : } x[n] = -x[-n] \quad (\text{C2-2})$$

모든 임의의 신호 $x(t)$ 는 우함수 대칭 신호 $x_e(t)$ 와 기함수 대칭 신호 $x_o(t)$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$x[n] = \frac{(x[n] + x[-n])}{2} + \frac{(x[n] - x[-n])}{2} = x_e[n] + x_o[n] \quad (\text{C2-3})$$

[그림 C2-3]은 임의의 신호가 주어질 때 그 신호의 우함수 대칭 성분과 기함수 대칭 성분을 구하는 과정을 그림으로 나타낸 것이다.



[그림 C2-3] 신호의 우함수 대칭 성분과 기함수 대칭 성분 예

그림에서 (a)의 원 신호에서 (b)의 시간축을 뒤집은 반사 신호를 더하거나 빼서 크기를 반으로 줄이면 우함수 대칭 성분과 기함수 대칭 성분이 얻어진다. 그림에서 우함수 대칭 성분은 세로축에 대해, 기함수 대칭 성분은 원점에 대해 180° 대칭이 됨을 볼 수 있으며, (c)의 우함수 대칭 성분과 (d)의 기함수 대칭 성분을 더하면 (a)의 원 신호가 얻어짐을 금방 알 수 있다.

■ 예제 C2-2 : 신호의 기함수 대칭 성분과 우함수 대칭 성분

신호 $x[n] = e^{-\alpha n} \cos(\Omega_0 n)$ 의 기함수 및 우함수 대칭 성분을 구하라.

<풀이>

주어진 신호에 $n = -n$ 을 대입하여 $x[-n]$ 을 구하면 다음과 같다.

$$x[-n] = e^{\alpha n} \cos(-\Omega_0 n) = e^{\alpha n} \cos(\Omega_0 n)$$

이제 식 (C2-1)과 (C2-2)를 이용하여 우함수 및 기함수 대칭 성분을 구하면

$$x_e[n] = \frac{e^{-\alpha n} \cos(\Omega_0 n) + e^{\alpha n} \cos(\Omega_0 n)}{2} = \frac{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}{2} \cos(\Omega_0 n) = \cosh(\alpha n) \cos(\Omega_0 n)$$

$$x_o[n] = \frac{e^{-\alpha n} \cos(\Omega_0 n) - e^{\alpha n} \cos(\Omega_0 n)}{2} = \frac{e^{\alpha n} - e^{-\alpha n}}{2} \cos(\Omega_0 n) = -\sinh(\alpha n) \cos(\Omega_0 n)$$

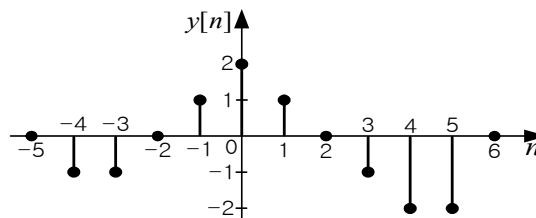
$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ 인 것은 위의 결과로부터 쉽게 확인할 수 있다. ■

2.2 기본 이산 신호

기본 신호들은 시스템을 해석하는 데 큰 역할을 할 뿐만 아니라 이들의 결합으로 다양하고 더 복잡한 신호를 나타낼 수 있게 해준다.

■ 예제 C2-3 : 임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호 표현

[그림 C2-4]에 주어진 이산 신호를 임펄스 신호와 계단 신호를 이용하여 나타내라.



[그림 C2-4] [예제 C2-3]의 신호 $y[n]$

<풀이>

임펄스 신호를 이용한 신호의 표현은 신호를 각각의 시간 성분으로 쪼갬 뒤에 (책)식 (2.6)에 해당 시간의 신호 샘플 값을 대입하면 되므로

$$y[n] = -\delta[n+4] - \delta[n+3] + \delta[n+1] + 2\delta[n] \\ + \delta[n-1] - \delta[n-3] - 2\delta[n-4] - 2\delta[n-5]$$

계단 신호를 이용하여 신호를 나타내기 위하여 $y[n]$ 을 같은 함수 꼴로 표현될 수 있는 성분들로 나누면, ① 2개의 샘플로 이루어진 크기 -1인 사각형 펄스($-4 \leq n \leq -3$) ② 3개의 샘플로 된 기울기 1인 램프 신호($-2 \leq n \leq 0$) ③ 3개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($1 \leq n \leq 3$) ④ 샘플 2개로 구성된 크기 -2인 사각형 펄스($4 \leq n \leq 5$)의 4개로 쪼갤 수 있다.

따라서 계단 신호를 이용한 표현은 다음과 같이 된다.

$$y[n] = -\{u[n+4] - u[n+2]\} + (n+2)\{u[n+2] - u[n-1]\} \\ - (n-2)\{u[n-1] - u[n-4]\} - 2\{u[n-4] - u[n-6]\} \\ = -u[n+4] + (n+3)u[n+2] - 2nu[n-1] + (n-4)u[n-4] + 2u[n-6]$$

신호를 어떻게 쪼개느냐에 따라 계단 신호를 이용한 표현은 달라질 수 있다. $y[n]$ 을 ① 크기 -1인 임펄스 신호($n=-4$) ② 샘플 3개로 된 기울기 1인 램프 신호($-3 \leq n \leq -1$) ③ 5개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($0 \leq n \leq 4$) ④ 크기 -2인 임펄스 신호($n=5$)로 쪼갤 수도 있다. 이 경우의 신호 표현은 다음과 같이 된다.

$$y[n] = -\{u[n+4] - u[n+3]\} + (n+2)\{u[n+3] - u[n]\} \\ - (n-2)\{u[n] - u[n-5]\} - 2\{u[n-5] - u[n-6]\} \\ = -u[n+4] + (n+3)u[n+3] - 2nu[n] + (n-4)u[n-5] + 2u[n-6]$$

표현식이 바르게 구해졌는지 확인해 보려면 시간 변수 n 에 적당한 값을 대입하여 그림의 신호와 값이 일치하는지를 따져보면 된다. ■

(1) 정현파 신호와 오일러(Euler) 공식

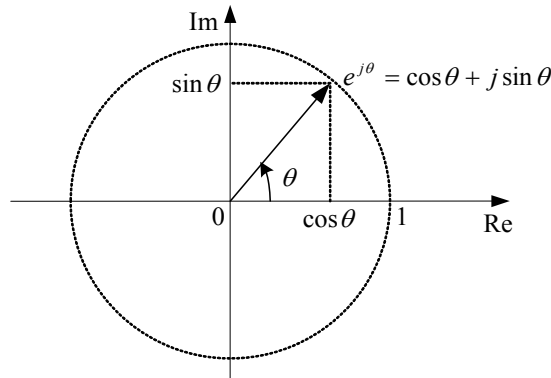
삼각 함수로 표현된 정현파 신호는 신호와 시스템 해석에서 많이 하게 되는 수학 연산-미분, 적분, 곱셈, 덧셈-의 계산이 까다롭고 책의 부록에 제시한 많은 공식을 알아야 하는 번거로움이 있다.

이러한 문제점을 피하고 편리하게 사용할 수 있는 것이 복소 정현파 신호이다. 이산 복소 정현파 신호는 $e^{j\Omega n}$ 과 같이 순 허수 지수를 갖는 지수 함수로서 삼각 함수로 표현된 정현파와는 다음의 오일러 공식에 의해 관계가 정의된다.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (\text{C2-4})$$

위 식에서 알 수 있듯이, 코사인이나 사인 신호는 (C2-4)의 실수부 또는 허수부를 취함으로써 얻을 수 있으므로 $e^{j\Omega n}$ 를 복소 정현파 신호라고 하는 것이다.

[그림 C2-5]는 오일러 공식의 관계를 잘 보여주는 페이지도이다.



[그림 C2-5] 오일러 공식의 페이지도

오일러 공식을 이용하면, $\cos\theta$ 및 $\sin\theta$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (\text{C2-5})$$

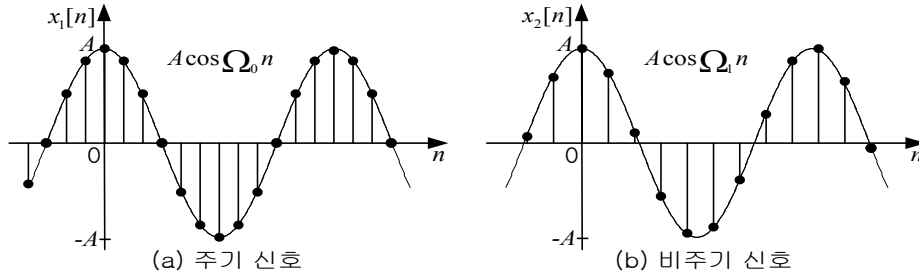
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (\text{C2-6})$$

정현파 신호는 소리굽쇠, 전기 회로나 기계 구조물에서의 진동, 전원 장치나 신호 발생기 등을 비롯하여 다양한 형태의 신호에서 찾아볼 수 있다. 정현 신호는 특히 임의의 파형을 갖는 신호들이 다양한 진폭과 주파수의 정현 신호들의 합으로 표현될 수 있다는 점 때문에 신호의 분석이나 합성에 매우 중요한 역할을 한다. 상세한 내용은 뒤에 푸리에 해석에서 다루게 될 것이다.

■ 예제 C2-4 : 이산 정현파 신호의 주기성 - (책) [그림 2-8]의 보충

이산 정현파 신호의 주기성과 관련하여 (책) [그림 2-8]의 코사인파를 살펴보자. 그림의 두 이산 코사인파는 애초에 이산 신호일 수도 있지만 연속 코사인파를 다른 샘플링률로 샘플링하여 얻어진 이산 신호라고 생각할 수도 있다.

그림 (a)의 $x_1[n]$ 은 연속 코사인파의 한 주기에 맞추어 이산 코사인파도 같은 샘플 값들을 반복하므로 주기 신호이다. 그림에서 보면, $x_1[n]$ 은 12개의 샘플마다 같은 값이 반복되므로 주기 $N=12$ 이고, 따라서 $\Omega_0 = 2\pi/N = \pi/6$ 이다.



(책)[그림 2-7] 이산 정현 신호의 주기성

반면에 그림 (b)의 $x_2[n]$ 은 $F_1 = \Omega_1/2\pi = 10/63\sqrt{2}$ 가 무리수인 경우로, 연속 코사인파의 첫 번째와 두 번째 주기에서 이산 코사인파의 샘플들이 샘플링된 위치가 미세하게 어긋나 일치하지 않음을 볼 수 있는데, 연속 코사인파의 한 주기 파형의 같은 위치에서 샘플링되는 일이 결코 생기지 않는 비주기 신호이다.

$x_3[n]$ 을 $\Omega_2 = \pi/6 + 2\pi$ 인 이산 코사인파라고 하자. 아래와 같이 간단한 계산에 의해 $x_1[n]$ 과 $x_3[n]$ 이 같다는 것을 금방 알 수 있다.

$$x_3[n] = A \cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)n\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{6}n + 2\pi n\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) = x_1[n]$$

이 결과는 2π 의 정수배만큼 떨어져 있는 주파수를 갖는 이산 정현 신호들을 구분할 수 없는 사실을 확인해 준다. ■

(2) 표본화(sampling) 함수와 싱크(sinc) 함수

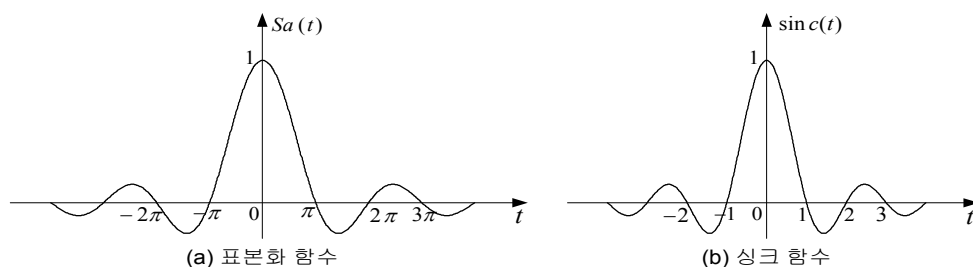
표본화 함수는 주파수 영역에서 신호를 해석할 때 사각 펄스 함수와 짝을 이루어 가장 많이 사용되는 신호로 다음과 같이 정의된다.

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (C2-7)$$

표본화 함수는 [그림 C2-6(a)]에 나타난 것처럼, $t=0$ 에서 최댓값 1을 가지고, $|t|$ 가 커질수록 진폭이 감소하며 $t = \pm k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$)에서 값이 0이 되는, 감쇠 정현파 모양을 갖는다($t=0$ 에서의 값은 L'Hopital 정리를 적용해 구한다).

이 표본화 함수를 시간축에서 π 만큼 압축시킨 형태의 함수를 싱크(sinc) 함수라고 하는데, 둘을 특별히 구분하지 않고 싱크 함수로 통칭하기도 한다.

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (C2-8)$$



[그림 C2-6] 표본화 함수와 싱크 함수

2.3 이산 신호에 대한 기본 연산

(1) 두 신호의 합과 곱

신호 $x[n]$ 과 $s[n]$ 이 있을 때 두 신호의 합은 다음과 같이 주어진다.

$$y[n] = x[n] + s[n] \quad (\text{C2-9})$$

신호 $x[n]$ 과 $p[n]$ 이 주어질 때 두 신호의 곱은 다음과 같다.

$$y[n] = x[n] \cdot p[n] \quad (\text{C2-10})$$

(2) 신호의 차분

이산 시간에서는 미분이 정의되지 않으므로 미분의 등가 연산이라 할 수 있는 차분의 개념이 도입된다. 미분은 시간 t 에서의 신호의 기울기이므로 이산 시간 n 에서의 신호의 기울기는 거칠지만 다음과 같이 시간적으로 하나 앞서거나 뒤진 신호와의 차이로 표현할 수 있다.

$$y[n] = \Delta x[n] = x[n+1] - x[n] \quad (\text{C2-11})$$

$$y[n] = \nabla x[n] = x[n] - x[n-1] \quad (\text{C2-12})$$

식 (C2-11)과 같이 하나 앞선 시간의 신호 값과의 차이로 기울기를 근사화한 것을 전향^{forward} 차분이라고 하며, 식 (C2-12)와 같이 하나 뒤진 시간의 신호 값과의 차이를 사용한 것은 후향^{backward} 차분이라고 한다.

(3) 신호의 총합

미분과 마찬가지로 적분도 이산 시간에서는 정의되지 않으므로 이산 신호에 대해서는 다음과 같이 정의되는 총합의 개념을 도입하게 된다.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{C2-13})$$

구분구적법에 의하면 적분은 함수를 잘게 잘라서 얻어지는 각 띠의 면적의 합으로 이해할 수 있으므로 식 (C2-13)의 총합 연산은 구간을 충분히 작게 잘라서 근사화한 적분으로 받아들일 수 있을 것이다.

(4) 진폭 변환

진폭에 대한 기본 연산은 반전, 척도 변화, 이동이다.

반전은 진폭의 부호가 뒤바뀌는 것으로서 시간축에 대해 대칭인 신호를 만들어 내게 된다.

$$y[n] = -x[n] \quad (\text{C2-14})$$

척도 변화는 진폭의 값을 일정한 비율로 바꾸는 것으로서 다음과 같다.

$$y[n] = ax[n] \quad (\text{C2-15})$$

이때 $a > 1$ 인 경우를 증폭, $a < 1$ 의 경우를 감쇠라고 한다.

진폭의 이동은 파형의 변화 없이 세로축을 따라 평행 이동하는 동작이다.

$$y[n] = x[n] + a \quad (\text{C2-16})$$

(5) 시간 반전

시간 변수에 대해 다음과 같이 n 을 $-n$ 으로 바꾼 것이 시간 반전 연산이다.

$$y[n] = x[-n] \quad (\text{C2-17})$$

시간 반전은 시간축을 거꾸로 뒤집는 동작으로, 신호 파형의 관점에서 보면 수직축에 대칭인 상을 만드는 반사 연산이다. 시간 반전의 개념을 잘 보여주는 실제 예로는 영상을 녹화한 뒤 이를 거꾸로 재생하는 경우가 해당된다.

(6) 시간 이동

신호를 시간축에 대해 이동시키면 다음과 같이 된다.

$$y[n] = x[n - n_0] \quad (\text{C2-18})$$

$n_0 > 0$ 의 경우는 시간 지연, $n_0 < 0$ 의 경우는 시간 앞섬에 해당된다.

시간 척도 변화에 대해서는 이미 책에서 상세히 설명한 바 있다. TV에서 가끔 보게 되는 슬로우 모션이나 씨앗의 싹틔우기-성장-꽃피우기의 과정을 아주 짧은 시간에 연속적으로 보여주는 일들은 고속/저속으로 촬영하여 저속/고속으로 재생함으로써 가능한데, 이는 시간축에 대해 늘이기(stretching) 또는 압축(contraction) 동작, 즉 시간 척도 변화를 일으킨 좋은 예이다.

2.4 이산 시스템

2.5 이산 시스템의 분류

(1) 선형 시스템과 비선형 시스템

100원짜리 동전 하나를 넣었을 때 사탕이 2개 나오는 사탕 뽑기 기계가 있다고 하자. 100원짜리 동전 셋을 한꺼번에 넣었을 때에는 사탕이 5개밖에 나오지 않고 100원짜리 동전 넷을 한꺼번에 넣으면 사탕이 9개가 나왔다면 500원짜리 동전을 쥐고 차례를 기다리고 있는 아이는 과연 사탕이 몇 개가 나올지 알 수가 없어 불안한 마음에 살까말까 망설이게 될지 모른다.

사탕 뽑기 기계에 300원을 넣으면 6개, 500원을 넣으면 10개의 사탕이 나온다면, 돈에 따라 사탕이 몇 개 나올지 불안해하지 않아도 될 것이고 사탕 뽑기 기계의 동작을 '사탕의 수 = (넣은 돈/100) × 2'와 같이 간단한 선형 수식으로 나타낼 수 있다. 그렇지 않다면 일일이 모든 경우에 대해서 시험해 본 뒤에야 기계의 동작을 완전히 파악할 수 있을 뿐만 아니라 그 결과를 하나의 수식으로 표현하기도 쉽지 않다(표나 그래프로 나타내는 것이 더 알맞을 가능성이 크다).

이 예는 선형성(linearity)의 개념과 중요성을 잘 말해주고 있다.

선형 시스템은 수학적으로 (책)식 (2.24)의 가산성과 (책)식 (2.25)의 동차성의 두 가지 성질을 만족하는 시스템으로, (책)식 (2.26)의 선형성은 '여러 신호의 합으로 이루어진 입력에 대한 시스템의 출력은 각 신호에 대한 개별적인 시스템 응답의 합 또는 중첩으로 주어진다'는 중첩의 원리의 수학적 등가 표현이라 할 수 있다.

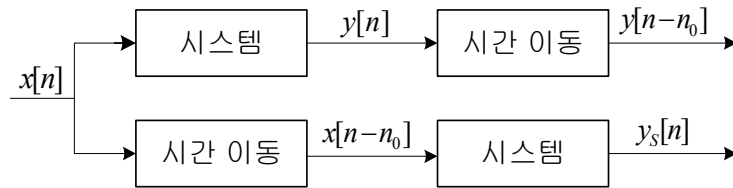
아주 엄격한 기준으로 볼 때 실질적으로 모든 동작 조건 아래서 선형인 물리적 시스템은 찾아보기가 어려우나, 우리가 그 시스템을 사용하는 일반적인 조건 아래서는 선형적인 특성을 보이는 경우가 많기 때문에 대부분 선형 시스템으로 취급해도 무방하다. 또한 선형 시스템은 수학적으로 이론이 잘 정립되어 있어 다루기가 덜 까다로운 반면, 비선형 시스템은 비선형의 양상이 매우 다양하게 나타나기 때문에 모두를 아우를 수 있는 통합적인 수학적 틀도 없을뿐더러 해석이 훨씬 어렵다. 이러한 이유로 선형 시스템을 중심으로 논의가 이루어지는 것이다.

(2) 시불변 시스템과 시변 시스템

다시 사탕 뽑기 기계로 되돌아가서, 100원짜리 동전을 넣는 시간에 상관없이 항상 사탕 2개가 나온다면 별 문제가 없을 텐데, 아침에는 2개, 점심에는 1개, 저녁에는 3개가 나온다면 점심때에는 한산하고 저녁때에는 줄이 길게 늘어서는 진풍경이 벌어질 것이다.

이로부터 우리는 시스템에 있어 또 다른 중요한 성질인 시불변성을 생각할 수 있다.

시스템이 시불변인지 시변인지를 판정하려면, [그림 C2-7]에 보인 것처럼 시스템에 입력 $x[n]$ 을 넣어 얻은 출력 $y[n]$ 을 시간 이동시킨 $y[n-n_0]$ 와 $x[n]$ 을 먼저 시간 이동시킨 $x[n-n_0]$ 을 시스템에 입력으로 넣어 구해진 출력 $y_s[n]$ 을 비교하면 된다. 만약 이들 두 출력 값들이 모든 n_0 값에 대해 동일하다면 시스템은 시불변이고 그렇지 않으면 시변이다.



[그림 C2-7] 시불변성의 판정 방법

장미꽃을 선물했을 때, 어떨 때는 떨 듯이 기뻐하다가도 어떨 때는 신경질을 부리면서 내팽개치는 변덕스런 애인과 잘 지내려면 그렇지 않은 사람에 비해 곱절로 힘이 들듯이, 아무래도 시변 시스템이 시불변 시스템에 비해 특성을 파악하고 다루기가 훨씬 까다로울 것이다.

(3) 인과 시스템과 비인과 시스템

만약 사탕 뽑기 기계가 동전을 넣지 않았음에도 불구하고 곧 동전을 넣을 것이라 지레짐작하고 먼저 사탕을 내놓는다고 생각해 보라.

시스템의 인과성은 이러한 일이 발생하지 않는, 다시 말해 시간적으로 원인이 앞서지 않는 결과의 생성이 불가능한 성질, 즉 미래의 입력이 현재의 출력에는 영향을 주지 못하는 입력에 대한 비예측적^{non-anticipatory} 성질을 말한다. 그러므로 인과 시스템의 출력 $y[n]$ 은 현재 및 과거의 입력 값 $x[n]$, $x[n-1]$, ...에만 의존하고 미래의 입력 값 $x[n+1]$, $x[n+2]$, ...에는 무관하다.

실시간 처리를 할 필요가 없는 경우에는 입력 값을 모두 저장하고 있다가 특정 시점의 출력을 구하는 데 이용할 수 있으므로 비인과 시스템을 구현할 수 있을뿐더러 매우 유용한 수단이 되기도 한다.

예를 들어, 영상 처리에서는 담고자 하는 영상을 디지털 캠코더를 이용하여 자기 테이프나 디스크 같은 저장 장치에 일단 녹화한 다음 필터를 이용하여 화질을 개선시키는 작업을 하게 된다. 이때 필터는 재생 시작으로부터 시간 n 이 지났을 때의 영상을 그 순간의 데이터뿐만 아니라 n 을 전후한 시간의 데이터들을 이용해서 더 좋은 화질을 만들어내게 된다. 그렇다면 필터는 n 보다 앞선 시간의 데이터를 사용하여 n 순간의 영상을 출력하였으므로 비인과 시스템인 것이다. 다만 실시간으로 동작하는 시스템이 아닐 뿐이다.

(4) 안정 시스템과 불안정 시스템

사탕 뽑기 기계가 처음에는 100원에 두 개씩 사탕을 내놓으며 잘 동작하다가 어느 순간 속에 든 사탕을 와르르 다 쏟아내며 작동을 멈춰버린다면 아무도 그런 사탕 뽑기 기계를 들여놓지 않을 것이다. 사탕 뽑기 기계의 예에서 알 수 있듯이 안정하지 않은 시스템은 활용할 값어치가 없다. 따라서 시스템을 설계하고 만들 때 무엇보다도 우선적으로 시스템이 안정한가가 고려되어야 한다.

■ 예제 C2-5 : 적분기의 안정도 판별

입력의 적분 값을 출력으로 내는 적분기에 유한한 크기 조건을 만족하는 가장 단순한 신호의 하나인 $x(t) = A$ 를 입력으로 넣어주면, 출력은

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t A d\tau = At$$

가 된다. 시간이 무한대로 접근하면 출력은 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} At = \infty$ 로 무한히 커지게 된다. 이처럼 입력의 크기가 유한하더라도 출력이 무한해질 수 있으므로 적분기는 불안정 시스템이다. ■

(5) 단일 입출력(SISO) 시스템과 다중 입출력(MIMO) 시스템

시스템을 다룰 때 보통은 가장 간단한 시스템, 즉 입력과 출력이 모두 하나뿐인 시스템에서부터 시작하게 된다. 이러한 시스템을 단일 입출력(SISO)^{Single Input Single Output} 시스템이라고 하며, 이와는 달리 여러 개의 입력과 출력을 가지는 복잡한 시스템을 다중 입출력(MIMO)^{Multi Input Multi Output} 시스템이라고 한다.

(책)[그림 1-4(a)]의 RLC 회로는 단일 입출력 시스템의 한 예이고, (책)[그림 1-4(b)]의 자동차는 운전을 할 때 핸들과 가속기를 이용하여 차의 방향과 속도를 조절하므로 핸들 각과 가속기 페달 각이 입력, 방향과 속도가 출력이 되는 다중 입출력 시스템의 좋은 예이다.

단일 입출력이든 다중 입출력이든 그 이론적 토대는 같지만, 구성이 복잡하고 입출력간의 상호 연결로 인해 해석과 취급이 훨씬 까다로운 다중 입출력 시스템보다는 아무래도 단순한 단일 입출력 시스템이 비교적 다루기 간편할 것이다.

(6) 집중 정수 시스템과 분포 정수 시스템

모든 물리적인 신호는 빛 이상의 속도를 가질 수 없기 때문에 전기 신호도 제한된 속도를 가지고 시스템 내를 통해서 전달되는 전자기파이다. 그런데 전기 회로를 해석할 때, 은연중에 어떤 소자를 흐르는 전류가 그 소자 내의 모든 점에서 똑같다는 것을 가정하고 Ohm의 법칙을 적용한다. 즉 신호가 시스템을 통해서 시간 지연 없이 순식간에 전달된다고 가정한 것이다. 실제로는 전류가 일정한 속도를 가지고 소자를 통과하기 때문에 똑같은 소자 내에서도 위치에 따라 값이 달라지겠지만, 소자 내의 위치에 따른 전류의 변화가 시간의 변화

에 따른 전류의 변화에 비해 매우 빨라서 무시해도 무방할 정도이므로 소자 내의 전류를 상수로 보게 된 것이다. 이 가정은 전기 신호의 파장이 소자의 물리적 크기보다 훨씬 커서 소자가 마치 공간의 한 점에 집중된 것처럼 볼 수 있을 때에만 타당하다.

이렇게 **구성 요소의 물리적 특성이 한 점에 집중된 것으로 간주할 수 있는 시스템을 집중 정수^{lumped parameter} 시스템**이라고 한다. 집중 정수 시스템에서 신호는 시간만의 함수이고, 따라서 시스템 방정식도 마찬가지로이다.

반대로 전송선, 도파관, 안테나 등의 경우는 신호의 파장에 비해 시스템의 크기가 작다고 할 수 없으므로 집중 정수 시스템에서의 가정이 무너지게 되어 시스템 방정식은 시간 및 공간의 함수로 표현되게 된다. 즉 **구성 요소의 물리적 특성이 공간에 분포된 것으로 간주하는 시스템을 분포 정수^{distributed parameter} 시스템**이라고 한다.

일례로 우리나라 전력시스템에서 사용되고 있는 60[Hz]의 교류는 파장(=광속/주파수)이 $5 \times 10^6 (= 3 \times 10^8 / 60)$ [m]이므로, 주먹구구 셈으로 시스템 크기가 이의 1/10 이하면 집중 정수 시스템이라 볼 수 있다면, 전력 시스템의 크기가 5×10^5 [m] 이하인 경우에는 집중 정수 시스템으로 취급할 수 있다는 얘기가 된다. 반면에 1[GHz]의 마이크로파의 경우는 파장이 0.3[m]가 되므로 통신 시스템의 크기가 3[cm]보다 작으면 집중 정수 시스템으로 취급할 수 있지만 보통의 경우 이를 만족시킬 수 없으므로 분포 정수 시스템으로 취급하게 되는 것이다.

(7) 가역 시스템과 비가역 시스템

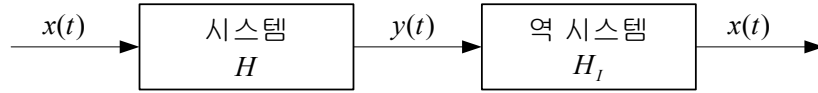
신호를 통신 채널을 통해 전송하고자 할 경우 채널의 물리적 특성으로 인해 왜곡이 발생하여 수신단의 수신 신호는 원래의 송신 신호와는 달라진다. 이러한 왜곡을 보상하여 원래의 신호를 복원해내려면 통신 채널의 작용과 완전히 거꾸로 동작하는 시스템을 수신단에 연결하면 될 것이다.

이처럼 **어떤 시스템에 대해 그 시스템의 출력을 입력으로 인가하여 그 시스템의 입력을 출력으로 얻게 되는 시스템을 그 시스템의 역^{inverse} 시스템**이라고 하며, **역 시스템이 존재하는 시스템을 가역^{invertible} 시스템**이라고 한다. 그렇지 않은 시스템은 비가역^{non-invertible} 시스템이라고 한다.

시스템 H 의 역 시스템을 H_I 라고 하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$y(t) = H\{x(t)\} \rightarrow H_I\{y(t)\} = x(t) \quad (\text{C2-19})$$

따라서, [그림 C2-8]에 나타난 것처럼 시스템과 그 역 시스템을 종속 연결하면 전체 시스템의 입출력 관계는 항등 시스템이 된다. 그림에서 보면, 역 시스템은 원 시스템이 입력 $x(t)$ 에 대하여 행한 일을 거꾸로 돌려놓는 동작을 하게 되어 원 시스템의 영향이 무시된다.



[그림 C2-8] 가역 시스템

가역 시스템은 출력을 관찰해서 입력을 결정할 수 있는 시스템이므로, 상이한 입력에 대해 상이한 출력이 나오게 된다면 그 시스템은 가역적이다. 즉 시스템이 가역적이기 위해서는 입출력 관계가 일대일 대응이어야 하며, 만약 두 개의 다른 입력에 대해 같은 출력을 낸다면, 그 출력에 대해 어느 입력을 역 시스템의 출력으로 내야할지 결정할 수 없으므로 가역적이지 않다.

예를 들어, $y[n] = 2x[n]$ 은 가역 시스템이다. 이의 역 시스템은 $x[n] = y[n]/2$ 로 $y[n]$ 으로부터 되돌아갈 수 있는 $x[n]$ 의 값이 오직 하나뿐이므로 가역적이다. 반면에 $y[n] = x^2[n]$ 은 두 개의 입력 $x[n] = \pm 1$ 로부터 출력 $y[n] = 1$ 이 얻어지므로, $y[n] = 1$ 로부터 거꾸로 돌아갈 수 있는 $x[n]$ 값을 유일하게 결정할 수 없기 때문에 역 시스템이 존재하지 않는다. 즉 $y[n] = x^2[n]$ 는 비가역 시스템이다.

■ 예제 C2-6 : 진폭 변조 시스템의 시스템 특성 판별

주어진 신호에 다음과 같이 주파수 ω_0 인 정현파(반송파)를 곱하여 신호의 크기를 바꾸는 시스템을 진폭 변조 시스템이라고 하며, AM 방송이나 통신 등에서 널리 사용된다.

$$y(t) = H\{x(t)\} = x(t)\cos(\omega_0 t) \quad (C2-20)$$

진폭 변조 시스템에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 안정성, 기억성, 가역성을 판별하라.

<풀이>

① **선형성** : $H\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha H\{x_1(t)\} + \beta H\{x_2(t)\}$ 가 되는지 확인한다.

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))\cos(\omega_0 t) \\ &= \alpha H\{x_1(t)\} + \beta H\{x_2(t)\} = \alpha x_1(t)\cos(\omega_0 t) + \beta x_2(t)\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

그러므로 진폭 변조 시스템은 선형성을 만족하는 선형 시스템이다.

② **시불변성** : $y(t-t_0) = H\{x(t-t_0)\}$ 의 성립 여부를 확인한다.

$$\begin{aligned} y(t-t_0) &= x(t-t_0)\cos(\omega_0(t-t_0)) = x(t-t_0)\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0) \\ &\neq H\{x(t-t_0)\} = x(t-t_0)\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

따라서 진폭 변조 시스템은 시불변성을 충족시키지 않는 시변 시스템이다.

③ **인과성** : 미래의 입력이 현재의 출력에 영향을 끼치는지를 확인한다.

식 (C2-20)으로부터 출력이 현재의 입력에만 의존하는 것을 볼 수 있다. 미래의 입력이 현재의 출력에 영향을 못 미치므로 인과 시스템이다.

④ **안정성** : 유한한 입력에 대해 유한한 출력이 나오는지를 확인한다.

만약 입력이 유한하다면, 즉 $|x(t)| \leq M_x$ 라면, 식 (C2-20)으로부터

$$|y(t)| = |x(t)\cos(\omega_0 t)| \leq |x(t)| |\cos(\omega_0 t)| \leq |x(t)| \leq M_x < \infty$$

가 되어, 유한한 입력에 대해 유한한 출력이 나오므로 안정 시스템이다.

⑤ **기역성** : 시스템 표현식이 대수 방정식인지 미분 방정식인지를 확인한다.

진폭 변조 시스템의 입출력 관계식 (C2-20)은 대수 방정식으로서 출력이 현재의 입력에만 의존한다. 따라서 순시적 시스템이다.

⑥ **가역성** : 입출력 관계가 일대일 대응인지를 확인한다.

$x(t)$ 가 다르더라도 $\cos(\omega_0 t)$ 를 곱한 값은 같아질 수가 있으므로 일대일 대응 관계가 성립하지 않는다. 간단히 예를 들면, $x(t)=1$ 이고 $\cos(\omega_0 t)=1$ 인 경우 $y(t)=1$ 이 된다. 그런데, $x(t)=-1$ 이고 $\cos(\omega_0 t)=-1$ 인 경우에도 $y(t)=1$ 이다. 역으로 $x(t)$ 의 값이 같더라도 $y(t)$ 의 값이 다를 수 있다. 모든 시간에서 입력이 상수일 때, 즉 $x(t)=A$ 라면 출력은 $y(t)=A\cos(\omega_0 t)$ 가 되어 하나의 입력 값에 대해 출력은 $[-A, A]$ 구간의 모든 값들이 대응된다. 그러므로 역 시스템이 존재할 수 없는 것은 명확하다. 따라서 비가역 시스템이다. ■