제 6 장

이산시간 푸리에 급수 및 변환

주파수 영역 해석은 필터 설계와 더불어 디지털 신호 처리의 핵심적인 주제이다. 따라서 책에서 이 장의 주제인 이산 시간 푸리에 급수 및 변환에 대해서 필요한 내용들을 상세하게 설명하였으므로 특별히 보충할 내용이 별로 없다. 따라서 간단한 보충 예제를 소개하여 이해를 돕도록 하였다.

책의 '2절 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)' 및 '3절 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)'와 관련하여 간단한 예제들을 몇 개 추가하였으며, '5절 푸리에 표현의 상호 관계'의 내용들이 잘 이해될 수 있도록 네 가지 푸리에 표현에 대한 간단한 요약과 상호 연관성에 대한 부연 설명을 간략히 제시하였다.

6.1 이산 정현파 신호의 주기성

6.2 이산 시간 Fourier 급수(DTFS)

연속계 푸리에 해석에서와 마찬가지로 이산계 푸리에 해석에서도 신호의 표현을 변환하기 위한 기본 신호로 (복소) 정현파 신호를 사용하게 된다. 그런데, 연속계의 시간축 변수 t는 모든 실수 값을 가질 수 있지만 이산계 시간축 변수 n은 오직 정수 값만 가질 수 있다는 사실과 정현파의 2π-주기성이 결합되어 이산 정현파 신호는 연속 정현파와 다른 성질도 띠게 되어, (디지털) 주파수가 유리수여야만 주기 신호가 되며, 주파수에 대해 1:1 대응이 되지 않고 주파수 $\Omega_0(F_0)$와 $\Omega_0+2\pi k(F_0+k)$인 두 개의 이산 정현파는 같은 신호가 되는 것이다.

그 결과 N-주기 이산 신호의 푸리에 급수 전개에는 단지 N개의 주파수 성분만이 존재하게 되며, 주파수 스펙트럼 또한 $2\pi(1)$을 주기로 반복되는 주기 함수가 된다. 또한 시간 영역과 주파수 영역 모두에서 주기 함수가 된다는 사실에 힘입어 분석식과 합성식 모두 총합 계산의 구간을 특정하게 고정하지 않고 임의의 인접한 N개의 성분에 대한 총합을 계산해도 무방하게 되는 것이다.

■ 예제 C6-1 : *이산 시간 푸리에 급수(DTFS)의 계산*
[그림 C6-1(a)]에 나타낸 이산 정현파 $x[n]=\sin(0.1\pi n)$에 대한 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)를 구하고 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.

<풀이>
$\sin(0.1\pi n)$은 $\Omega_0=0.1\pi$이고 $F_0=\Omega_0/2\pi=1/20$이 유리수이므로 주기 시호이며, 그 주기는 $N=20$이다. 따라서, 푸리에 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$x[n]=\sum_{k=0}^{19}X_k e^{j0.1\pi kn}$$

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19}\sin(0.1\pi n)e^{-j0.1\pi kn} \\
&= \frac{1}{40j}\sum_{n=0}^{19}\left(e^{j0.1\pi n}-e^{-j0.1\pi n}\right)e^{-j0.1\pi kn} \\
&= \frac{1}{40j}\left[\sum_{n=0}^{19}e^{j0.1\pi n(1-k)}-\sum_{n=0}^{19}e^{-j0.1\pi n(1+k)}\right]
\end{aligned}$$

위의 푸리에 계수 X_k의 계산식에서 마지막 등식의 첫 번째 합은, 식 (C5-11)의 복소 정현파의 직교성에 의해 $k=1$의 경우를 제외한 모든 k에 대해 0이고, $k=1$일 때 합은 $N=20$

이 된다. 같은 방법으로 두 번째 합은 $k=19$를 제외한 모든 k에 대해 0이고 그때의 합은 역시 $N=20$이다. 따라서 X_1과 X_{19}만 값을 가지며 나머지 모든 다른 계수는 0이다. 즉,

$$X_1 = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}$$

$$X_{19} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2}e^{j\pi/2}$$

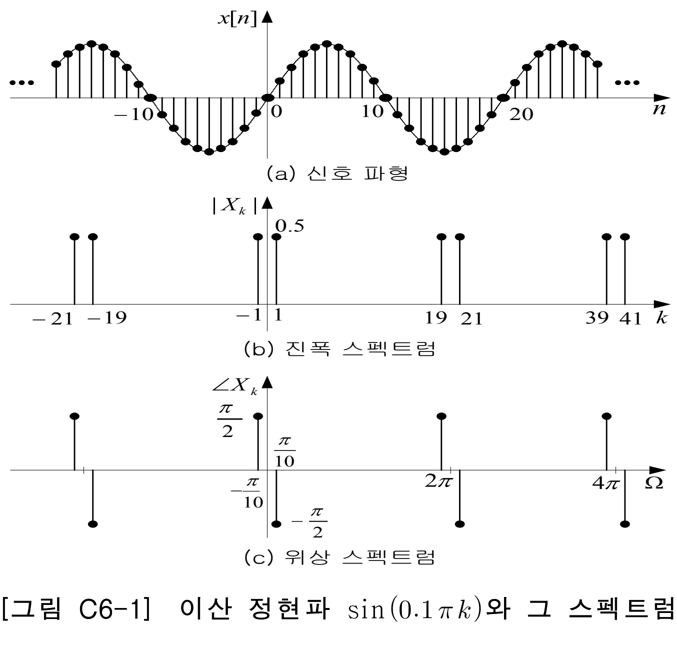
따라서 $x[n]$은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x[n] = \frac{1}{2j}(e^{j0.1\pi n} - e^{j1.9\pi n}) = \frac{1}{2j}(e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n})$$

이 결과는 바로 삼각 함수에 대한 오일러 공식으로서, 지금과 같이 푸리에 계수를 구하는 공식을 이용하지 않고도 훨씬 간단하게 구할 수 있었을 것이다. 이를 달리 해석하면, 푸리에 급수는 주기 신호 $x[n]$을 복소 정현파 $e^{-j\Omega_0 n}$과 그 고조파들의 항으로 표현한 것에 불과하다는 뜻이 된다. 이 경우, $\sin(0.1\pi n)$이 두 복소 정현파 $e^{j0.1\pi n}$와 $e^{-j0.1\pi n}$에 의해 표현될 수 있다는 사실을 푸리에 급수가 말해주고 있는 것이다.

얻어진 푸리에 계수로부터 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼을 구하면 다음과 같으며, 그림 (b)와 (c)에 나타내었다.

$$|X_1| = |X_{19}|(=|X_{-1}|) = \frac{1}{2}$$
$$\angle X_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \angle X_{19} = \angle X_{-1} = \frac{\pi}{2}$$

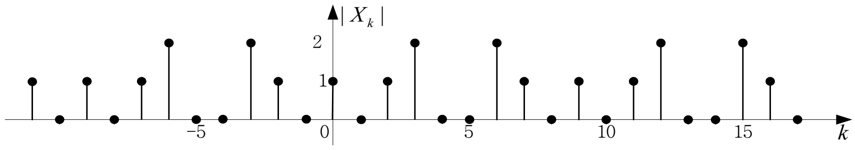


[그림 C6-1] 이산 정현파 $\sin(0.1\pi k)$와 그 스펙트럼

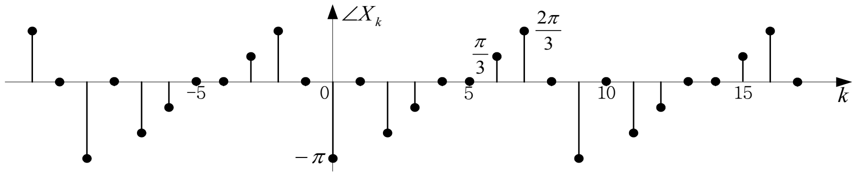
그림 (b)와 (c)를 비교하면, 주파수축에서 고조파 $0 \leqq k < 20$에 대응하는 주파수 구간은 $0 \leqq \Omega < 2\pi$이며, 2π 주기로 스펙트럼이 반복됨을 알 수 있다. ■

■ 예제 C6-2 : *스펙트럼에 의한 신호의 합성*

[그림 C6-2]와 같이 신호의 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 이산 신호를 합성하라.



(a) 진폭 스펙트럼



(b) 위상 스펙트럼

[그림 C6-2] [예제 C6-2]의 합성할 신호의 스펙트럼

<풀이>

그림에서 보면 스펙트럼이 주기 $N = 9$로 반복되고 있으므로 기본 주파수는 $\Omega_0 = 2\pi/9$이다. 반주기 구간 $0 \leqq \Omega \leqq \pi (0 \leqq k < 5)$ 내에 주파수 0에서 크기 1이고 위상 $-\pi$, Ω_0에서 2, $2\Omega_0$에서 크기 1이고 위상 $-2\pi/3$, $3\Omega_0$에서 크기 2이고 위상 $-\pi/3$인 주파수 성분이 있으므로 합성 신호 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = -1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

(책)식 (6.10)의 DTFS 합성식에서 총합 구간을 $\langle N \rangle = [-4, 4]$으로 하여 구하여도

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-4}^{4} X_k e^{jk\frac{2\pi}{9}n} \\ &= 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{6\pi}{9}n} + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{4\pi}{9}n} - 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{9}n} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{6\pi}{9}n} \\ &= -1 + \left(e^{j(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3})}\right) + \left(e^{j(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3})} + e^{-j(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3})}\right) \\ &= -1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

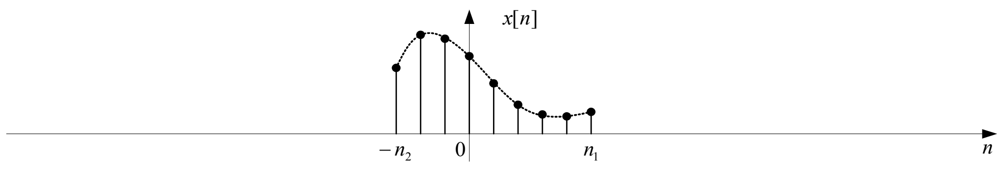
가 되어 같은 결과를 얻는다. 두 계산 과정을 비교해보면, 앞의 방법이 더 간편하다는 것을 알 수 있다. ■

6.3 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)

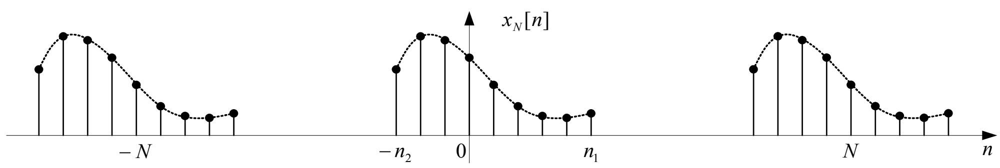
연속계에 대한 푸리에 변환을 유도할 때, 한 주기 동안 비주기 신호 $x(t)$와 일치하는 주기 신호 $x_T(t)$를 만들어서 이를 이용하여 $x(t)$를 표현한 뒤, 주기를 무한대로 접근시키면 $x(t)$와 $x_T(t)$가 점점 일치하게 되어 $x_T(t)$에 대한 푸리에 급수가 $x(t)$에 대한 푸리에 표현 역할을 하게 됨을 이용하였다.

마찬가지로 이산 비주기 신호 $x[n]$을 [그림 C6-3]과 같이 주기 N으로 반복하여 N-주기 신호 $x_N[n]$을 만들면 그것을 이산 푸리에 급수로 표현할 수 있고, 이때 주기 N을 무한대로 접근시키면 주기 신호와 비주기 신호는 점점 같아지게 될 것이다. 따라서, 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수에 $N\to\infty$의 극한을 취하면 비주기 신호 $x[n]$을 주파수 영역에서 표현한 것이 될 것이다.

이런 원리에 입각하여 책에서 설명한 것과 같이 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)를 유도해낼 때, (책)식 (6.13)에 $N\to\infty$의 극한을 취하면, Ω_0가 매우 작아져서 모든 주파수 성분들이 점점 가까이 모여들어 궁극적으로는 이산 스펙트럼이 연속적인 스펙트럼으로 변하게 되겠지만, 푸리에 계수 X_k의 크기가 $1/N$의 곱셈 때문에 점점 작아져서 0으로 되어버리는 문제가 대두된다. 따라서, 이를 피하기 위해 $N\to\infty$의 극한을 취하기 전에 먼저 스펙트럼이 연속적으로 되는 성질을 반영한 NX_k의 포락선 함수 $X(\Omega)$를 정의한 것이다.



(a) 비주기 신호 $x[n]$



(b) $x[n]$의 반복에 의한 주기 신호 $x_N[n]$

[그림 C6-3] 신호 $x[n]$의 주기적 확장에 의한 주기 신호 $x_N[n]$

■ 예제 C6-3 : *주기 신호의 DTFT*

다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=\pm 1\\ 0, & n=0\end{cases}, \quad N=3$$

<풀이>

$x[n]$의 한 주기 신호 $x'[n]$의 DTFT는 정의식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$X'(\Omega) = \sum_{n=-1}^{1} x[n] e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} = 2\cos\Omega$$

따라서 $x[n]$의 DTFT는 (책)식 (6.310에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(k\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{3} cos\left(\frac{4\pi}{3}k\right)\delta\left(\Omega - \frac{4\pi}{3}k\right) \end{aligned}$$

■

6.4 DTFT에 의한 이산 시스템의 해석

6.5 푸리에 표현의 상호 관계

5장과 6장에서 소개된 푸리에 해석 기법은 실제로 발생하게 되는 다양한 신호들에 대해 주파수 영역에서 분석하고 필요한 정보를 이끌어 낼 수 있게 해준다. 하지만 신호의 형태에 따라 완전히 서로 다른 푸리에 표현이 존재한다고 받아들여서 푸리에 표현이 너무 많아 혼란스러울 뿐만 아니라 어렵고 힘들기까지 하다고 느낄 수도 있다. 이것은 어느 정도 사실일 수도 있지만, 실제로는 생각하는 것만큼 그런 것은 아니다.

5장과 6장에서 지금까지 살펴본 네 가지의 푸리에 표현 FS, FT, DTFS, DTFT은 정의들이 외형적으로 다르고 용어에 드러나 있지 않은 미묘한 차이를 이해하는 것이 중요하기는 하지만, 푸리에 표현의 기본 구조는 모두 똑같다. 신호는 주파수와 일대일 대응 관계에 있는(복소) 정현파 신호의 가중합으로 표현된다. 즉, 신호는 주파수 변수를 가진 복소 정현파 신호에 의하여 곱해진 다음, 시간 변수가 이산인지 연속인지에 따라 더해지거나 적분된다. 그렇기 때문에 서로 다른 푸리에 표현들의 기본적인 성질은 매우 비슷할 수밖에 없다. 예를 들면, 시간 영역의 컨벌루션은 항상 주파수 영역에서 곱셈을 의미하고, 시간 영역에서 시간 지연은 항상 주파수 영역에서 위상 스펙트럼의 변화를 가져오게 된다.

6.5.1 푸리에 표현의 요약

(1) 연속 시간 푸리에 급수(FS)

FS는 연속 주기 신호에 적용된다. 기본 주파수의 정수 배인 무한개의 연속 복소 정현파 신호들의 가중합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 비주기 함수가 된다.

(2) 연속 시간 푸리에 변환(FT)

FT는 연속 비주기 신호에 적용된다. 주파수가 $-\infty$에서 ∞까지 연속적으로 변하는 연속 복소 정현파 신호들의 가중 적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 비주기 함수가 된다.

(3) 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)

DTFS는 이산 주기 신호(주기 N)에 적용된다. 기본 주파수의 정수 배인 N개의 이산 복소 정현파 신호들의 가중 합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 주기 함수(주기 N)이다.

(4) 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)

DTFT는 이산 비주기 신호에 적용된다. 주파수가 2π 범위(한 주기 구간)내에서 연속적으로 변하는 이산 복소 정현파 함수들의 가중적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 주기 함수(주기 2π)이다.

6.5.2 푸리에 표현들의 관계

(1) FS와 FT

FT를 소개하면서, 비주기 신호 $x(t)$는 주기 신호 $x_T(t)$의 주기 T가 무한대인 경우로, 또는 주기 신호 $x_T(t)$는 비주기 신호 $x(t)$를 주기 T로 반복시킨 것으로 취급하여 논의를 전개하였다. 전자의 접근은 주기 신호의 이산 스펙트럼으로부터 비주기 신호의 스펙트럼이 연속 함수가 된다는 것을, 후자의 접근은 비주기 신호의 연속 스펙트럼의 샘플링 효과에 의해 주기 신호의 스펙트럼이 이산 함수가 된다는 결과를 끌어낼 수 있게 하였다.

결론적으로, 주기 신호의 스펙트럼 X_k는 비주기 신호의 푸리에 변환 $X(\omega)$을 기본 주파수의 간격으로 샘플링하여 그 크기를 주기로 나눈 것과 같다.

$$X_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) \tag{C6-1}$$

(2) DTFS와 DTFT

비주기 신호 $x[n]$에 대한 DTFT를 유도하면서 주기 신호 $x_N[n]$의 DTFS의 주기를 무한대로 접근시키는 형태로 확장하여 결과를 얻었다. 이를 다시 쓰면,

$$X_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \tag{C6-2}$$

$X(\Omega)$의 샘플값을 취하여 크기를 주기로 나눈 것과 같다. 이는 바로 앞에서 살펴본 FS와

FT의 관계와 동일하다. 이로부터 연속 시간이든 이산 시간이든 상관없이 *주기 신호는 이산 스펙트럼을 가지고 비주기 신호는 연속 스펙트럼을 가지며, 주기 신호의 스펙트럼은 비주기 신호의 스펙트럼의 샘플 값에 대응된다*는 결론을 얻을 수 있다.

(3) FS와 DTFS, FT와 DTFT

이산 신호는 연속 신호를 샘플링한 것으로 생각할 수 있다. 이미 4장에서 연속 신호를 샘플링하여 이산 신호로 만들면 이 신호의 스펙트럼은 샘플링 주파수 간격마다 연속 신호의 스펙트럼을 반복하게 된다는 사실을 알았다. 따라서 주기 신호이든 비주기 신호이든 상관없이 *연속 신호의 스펙트럼은 비주기적이고 이산 신호의 스펙트럼은 주기 함수가 된다.*

(4) 시간 주파수 쌍대성

푸리에 표현은 기본적으로 시간과 주파수의 역할을 맞바꾸어도 상호 관계가 여전히 성립되는 시간-주파수 쌍대성을 만족한다. 이러한 쌍대성이 성립하기 위해서는 변환(분석식)과 역변환(합성식)의 수식 표현이 동일한 형태라야만 한다.

(책)[표 6-3]을 보면, *FT와 DTFS는 분석식과 합성식의 수식 형태가 같으므로 자체적으로 쌍대성이 성립*하지만 FS와 DTFT는 그렇지 못하다. 그러나 FS의 합성식과 DTFT의 분석식, 그리고 FS의 분석식과 DTFT의 합성식끼리는 수식 형태가 같으므로 쌍대성이 성립하게 된다. 다시 말해 *FS와 DTFT 간에 쌍대성이 성립*한다.