

CHAPTER 06 여러 가지 적분

SECTION 6.1 삼각함수의 적분

유제 6-1

$$-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

유제 6-2

$$\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

유제 6-3

$$-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C$$

유제 6-4

$$\frac{1}{3}\sin x \cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C$$

유제 6-5

$$\frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x \cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + C$$

유제 6-6

$$\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{5}(\tan x)^5 + \frac{1}{7}(\tan x)^7 + C$$

유제 6-7

$$\frac{1}{5}(\sec x)^5 - \frac{1}{3}(\sec x)^3 + C$$

유제 6-8

$$\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

유제 6-9.

$$-\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

6.1 연습문제

01

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

02

$$-\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

03

$$-\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{2}x + C$$

04

$$-\frac{1}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

05

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

06

$$\frac{1}{120}$$

07

$$\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$$

08

$$\ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x| + C \quad (2022-06-13 \text{ updated})$$

09

$$\frac{1}{4}$$

10

$$\frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{2}{7}\sec^7 x + \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

11

$$\frac{1}{6} \sec^5 x \tan x - \frac{7}{24} \sec^3 x \tan x + \frac{1}{16} \sec x \tan x + \frac{1}{16} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

12

$$\frac{1}{6} \sec^6 x - \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$

13

$$\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

14

$$-\frac{1}{7} \sin^7 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

15

$$-\frac{1}{6} \sin^6 x + \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

16

$$\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

17

$$\frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

18

$$\frac{1}{4} \sec^3 x \tan x - \frac{1}{8} \sec x \tan x - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

19

$$\frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C$$

20

$$\frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{1}{3} \tan^6 x + \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

21

$$-\frac{1}{4} \csc^3 x \cot x + \frac{1}{8} \csc x \cot x + \frac{1}{8} \ln |\csc x + \cot x| + C$$

22

$$-\frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{3} \csc^3 x + C$$

23

$$-\frac{1}{6} \cot^6 x - \frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

24

$$-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + C$$

25

$$\frac{1}{5} \sin x \cos^4 x + \frac{4}{15} \sin x \cos^2 x + \frac{8}{15} \sin x + C$$

26

$$\frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C$$

27

$$\frac{1}{6} \sec^5 x \tan x + \frac{5}{24} \sec^3 x \tan x + \frac{5}{16} \sec x \tan x + \frac{5}{16} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

28

$$-\frac{2}{5} \ln |\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} - 1| + \frac{2}{5} \ln (\tan^2 \frac{x}{2} + 1) + \frac{1}{5} x + C$$

29

$$m+n \neq 0 \text{이고 } m-n \neq 0 \text{일 경우 : } -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin \left((m+n) \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{m-n} \sin \left((m-n) \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$n = m \neq 0 \text{일 경우 : } \frac{\pi}{4}$$

$$n = -m \neq 0 \text{일 경우 : } -\frac{\pi}{4}$$

$$n = m = 0 \text{일 경우 : } 0$$

30 풀이 생략

31 풀이 생략

CHAPTER 06 여러 가지 적분

32 풀이 생략

33 풀이 생략

34

$$\frac{11}{25}x + \frac{2}{25} \ln|3\sin x + 4\cos x| + C$$

35

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}x + \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \ln|c\sin x + d\cos x| + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

SECTION 6.2 유리함수의 적분

유제 6-10

$$\frac{11}{4} \ln|x-3| - \frac{3}{4} \ln|x+1| + C$$

유제 6-11

$$2\arctan(x+1) + C$$

유제 6-12

$$\frac{5}{9} \ln|x| + \frac{8}{9} \ln|x-3| - \frac{4}{9} \ln|x+3| + C$$

유제 6-13

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln|x+2| - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2| + C$$

유제 6-14

$$-\frac{3}{32} \ln|x+2| + \frac{11}{32} \ln|x-2| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \frac{9}{16} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

유제 6-15

$$\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

유제 6-16

$$x - 2\arctan\frac{x}{2} + C$$

유제 6-17

$$3\ln|x+2| - 2\ln|x+3| + C$$

유제 6-18

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

유제 6-19

$$\frac{x}{10(x^2+1)^5} + \frac{9}{80} \frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{21}{160} \frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{21}{128} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{63}{256} \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{63}{256} \arctan x + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

6.2 연습문제

01

$$\frac{9}{52} \ln|4x-3| + \frac{1}{13} \ln|2x+5| + C$$

02

$$-\frac{1}{x+2} + C$$

03

$$\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

04

$$5 \ln|x+2| + \frac{10}{x+3} - 4 \ln|x+3| + C$$

05

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 \ln(x^2+4) + \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$$

06

$$-\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + \ln|x| + C$$

07

$$-\frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C$$

08

$$\frac{1}{12} \frac{-8x-14}{x^2+2x+4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\right) + C$$

09

$$-\frac{6}{(x-1)^2} - \frac{13}{x-1} + 3 \ln|x-1| + C$$

10

$$-\frac{1}{2} \ln(1+\sin^2 x) + \ln|\sin x| + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

11

$$-\frac{5}{8(x-1)} + \frac{1}{8(x+3)} - \frac{1}{8} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x+3| + C$$

12

$$\frac{1}{4} \frac{6x+8}{x^2+4x+5} + \frac{3}{2} \arctan(x+2) + C$$

13

$$-\frac{2}{3x} - \frac{10}{9} \ln|x| + \frac{37}{9} \ln|x-3| + C$$

14

$$-\frac{3}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2} \arctan x + C$$

15

$$-\frac{1}{16(x-1)^2} + \frac{1}{16(x+1)^2} - \frac{5}{16(x-1)} - \frac{5}{16(x+1)} + \frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{3}{16} \ln|x+1| + C$$

16

$$-\frac{1}{\sin x} - \frac{3}{2} \arctan(\sin x) - \frac{1}{2} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} + C$$

17

$$\frac{1}{8} \frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{7}{48} \frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{35}{192} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{35}{128} \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{35}{128} \arctan x + C$$

18

증명 생략

CHAPTER 06 여러 가지 적분

SECTION 6.3 무리함수의 적분

유제 6-20

$$\frac{1}{6}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + C$$

유제 6-21

$$\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3}{5}x\right) + C$$

유제 6-22

$$-\sqrt{5+4x-x^2} + 3\arcsin\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + C$$

유제 6-23

$$4 \ln |\tan t + \sec t| + C = 4 \ln |(x-2) + \sqrt{(x-2)^2 + 1}| + C$$

유제 6-24

$$-\frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \frac{3}{x} \right| + \frac{1}{2} \sqrt{9-x^2} + C$$

유제 6-25

$$\sqrt{x^2-4} - 2 \arctan \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C$$

유제 6-26

$$\frac{4}{7}(x+1)^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + C$$

유제 6-27

(풀이 1)

$$2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4-x^2} + C$$

(풀이 2)

$$4\arctan \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - (2-x) \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C$$

유제 6-28

$$x - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln|x|^{\frac{1}{6}} + 1| + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

유제 6-29

$$\ln|\sec t + \tan t| + C = \ln\left|\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\right| + C$$

6.3 연습문제

01

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-3} - \frac{3}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-3}) + C$$

02

$$\frac{9\pi}{4}$$

03

$$\sqrt{4+x^2} + C$$

04

$$\frac{1}{3} \frac{(x-4)(x+4)(x^2+32)}{\sqrt{16-x^2}} + C$$

05

$$-\frac{1}{4} \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} + C$$

06

$$\frac{2}{5}(-4+2x+x^2)\sqrt{1+x} + C$$

07

$$4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln|1+x^{\frac{1}{4}}| + C$$

08

$$2\sqrt{x} - \ln|x-1| + \ln|\sqrt{x}-1| - \ln|\sqrt{x}+1| + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

09

$$\ln \left| \frac{1}{5} (\sqrt{x^2 + 2x + 26} + (x + 1)) \right| + C$$

10

$$-\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

11

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + C$$

12

$$\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{5}x\right) + C$$

13

(풀이 1)

$$\frac{1}{16} \frac{(1+x)}{(3-2x-x^2)^2} + \frac{3}{128} \frac{(1+x)}{(3-2x-x^2)} + \frac{3}{256} \ln\left(\frac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\right) + C$$

(풀이 2) 부분분수 이용 (생략)

14

$$\frac{2}{3} \frac{(x-5)(x+5)(50+x^2)}{\sqrt{25-x^2}}$$

15

$$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + x + C$$

16

$$\frac{x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}} + C$$

17

$$\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

SECTION 6.4 이상적분

유제 6-30

2

유제 6-31

∞

유제 6-32

$+\infty$

유제 6-33

1

유제 6-34

$\frac{\pi}{2}$

유제 6-35

$p > 1$ 일 때 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ 은 수렴하고, $p \leq 1$ 일 때 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 는 발산한다.

유제 6-36

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

6.4 연습문제

01

∞

02

$-\infty$

03

2

04

∞

CHAPTER 06 여러 가지 적분

05

$$-\frac{1}{4}$$

06

$$-\frac{1}{9}$$

07

$$-\infty$$

08

$$-\infty$$

09

$$-4$$

10

$$2\ln 2$$

11

$$2$$

12

적분 값이 존재하지 않는다.

13

수렴하지 않는다.

14

수렴하지 않는다.

15

수렴하지 않는다.

16

1로 수렴한다.

17

수렴하지 않는다.

CHAPTER 06 여러 가지 적분

18

수렴하지 않는다.

19

수렴하지 않는다.

20

$\frac{3}{e}$ 으로 수렴한다.

21

$\frac{3}{e-2}$ 으로 수렴한다.

22

2로 수렴한다.

23

$p > -1$ 일 때 $\int_0^1 x^p \ln x dx = -\frac{1}{p^2 + 2p + 1}$ 은 수렴하고, $p \leq -1$ 일 때 $\int_0^1 x^p \ln x dx$ 는 발산한다.

24

$p \geq -1$ 일 때 $\int_1^\infty x^p \ln x dx$ 는 발산하고, $p < -1$ 일 때 $\int_0^1 x^p \ln x dx = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$ 은 수렴한다.

CHAPTER 06 여러 가지 적분

SECTION 6.5 정적분의 수치적 접근

유제 6-37

$$M_4 = \frac{1}{2}$$

유제 6-38

$$M_4 = \frac{496}{315} = 1.57 \dots$$

유제 6-39

$$T_4 = \frac{1}{2}$$

유제 6-40

$$T_4 = \frac{101}{60} = 1.68 \dots$$

유제 6-41

$$T_4 = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{2}) = 1.89 \dots$$

유제 6-42

$$S_4 = \frac{1}{2}$$

유제 6-43

$$S_4 = \frac{73}{45}$$

유제 6-44

$$\ln 2 = 0.6931471806$$

6.5 연습문제

01

$$M_6 = \frac{1}{6}\pi(1 + 2\sin(\frac{1}{12}\pi)^2 + 2\sin(\frac{5}{12}\pi)^2) = 1.570796327,$$

$$T_6 = \frac{\pi}{2} = 1.570796327, \quad S_6 = \frac{\pi}{2} = 1.570796327$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

02

$$M_4 = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.6532814824$$

$$T_4 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.6035533905$$

$$S_4 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.6380711873$$

$$\int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} = 0.6366197722$$

03

32

04

30

05

30

06

30

07

29.5

08

$$\frac{89}{3} = 29.66666667$$

09

$$4M_6 = 3.143907427$$

$$4M_{10} = 3.142425985$$

$$4T_6 = 3.136963066$$

$$4T_{10} = 3.139925989$$

$$4S_6 = 3.141591781$$

$$4S_{10} = 3.141592614$$

CHAPTER 06 여러 가지 적분

10

$$M_6 = 1.094581236, \quad T_6 = 1.106746032, \quad S_6 = 1.098941799$$

$$\ln 3 = 1.09861228 \dots$$

11

$$M_6 = 1.107885997, \quad T_6 = 1.105671192, \quad S_6 = 1.107048768$$

12

증명 생략

13

$$f(x) = (|x| - 1)^2, \quad [-1, 1],$$

n 이 홀수인 자연수일 때, T_n 이 M_n 보다 오차가 작다.

14

증명 생략

15

증명 생략

16

증명 생략

17

증명 생략

18

n 을 7로 잡으면 된다.