5장 연습문제 정답

[Section 5.1]

1.

(a) 참

(b) 거짓 / $\det(A) = ad - bc$이다.

(c) 참

(d) 거짓 / $a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$이다.

(e) 참

2.

(a) 6 (b) 25

3.

(a) 24 (b) -20

4.

$$\begin{aligned}\det(A) = &\ a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14} \\ = &\ a_{11}\{a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - a_{23}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) + a_{24}(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})\} - \\ &\ a_{12}\{a_{21}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - a_{23}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{24}(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})\} + \\ &\ a_{13}\{a_{21}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) - a_{22}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{24}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})\} - \\ &\ a_{14}\{a_{21}(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42}) - a_{22}(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}) + a_{23}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})\}\end{aligned}$$

5.

(a) $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6$ (b) $A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 11$ (c) $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4$ (d) $A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4$

6.

(a) $[3, 1, 4, 2] \to [1, 3, 4, 2] \to [1, 2, 4, 3] \to [1, 2, 3, 4]$ / 3회

(b) $[2, 1, 4, 3] \to [1, 2, 4, 3] \to [1, 2, 3, 4]$ / 2회

(c) $[3, 4, 2, 1] \to [1, 4, 2, 3] \to [1, 2, 4, 3] \to [1, 2, 3, 4]$ / 3회

(d) $[5, 2, 1, 4, 3] \to [5, 2, 3, 4, 1] \to [1, 2, 3, 4, 5]$ / 2회

7.

(a) 3 (b) -18

8.

(a) 0 (b) 0

9.

-4

10.

(a) 행렬식: -3 / 가역 (b) 행렬식: 15 / 가역 (c) 행렬식: 168 / 가역

11.

(a) s는 $\pm\sqrt{3}$이 아닌 모든 실수이다. (b) s는 모든 실수이다.

12.

(a) s는 $0, -1$이 아닌 모든 실수이다. (b) s는 $0, \frac{1}{4}$가 아닌 모든 실수이다.

[Section 5.2]

13.

(a) 참

(b) 참

(c) 참

(d) 거짓 / 행렬식의 값은 바뀌지 않는다.

(e) 거짓 / 행렬식의 부호는 동일하다.

(f) 거짓 / 두 행을 교환하는 기본행렬의 행렬식은 -1, 어떤 행을 0이 아닌 k배 하는 기본행렬의 행렬식은 k이다.

(g) 참

(h) 거짓 / 삼각행렬의 행렬식은 주대각성분의 곱이다.

(i) 참

(j) 거짓 / $-A$의 행렬식은 $(-1)^n(-1)=(-1)^{n+1}$이다. 즉, $-A$의 행렬식은 n이 홀수이면 1, 짝수이면 –1이다.

(k) 거짓 / 예로 $\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$은 모든 행이 서로 다르지만 행렬식은 0이다.

14.

(a) 18 (b) -6 (c) 12

15.

(a) 27 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $2^n\times 3$ (d) 1 (e) $-\frac{3}{2}$

16.

-8

17.

32

18.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P^{-1}BP)\\ &= \det(P^{-1})\det(B)\det(P)\\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(P)\det(B) = \det(B)\end{aligned}$$

[Section 5.3]

19.

(a) 12 (b) 0 (c) 187 (d) -112 (e) 36

20.

12

[Section 5.4]

21.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

22.

$$\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}\right| = 9$$

기존 입체의 부피는 1, 변환 후 입체의 부피는 9이다. 즉, 부피가 9배 증가한다.

23.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

24.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[Section 5.5]

25.

(a) $\begin{bmatrix} -2 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -6 & -8 \\ 10 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 16 \end{bmatrix}$

26.

(a) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{5}{6},\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{6}$

(b) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{5}{3},\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = -\dfrac{2}{3}$

(c) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}} = 4,\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}} = \dfrac{5}{2}$

(d) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = -\dfrac{3}{2},\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{2}$

(e) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{4},\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{16}{4} = 4,\ x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\dfrac{14}{4}$

(f) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\dfrac{16}{4} = -4,\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{52}{4} = 13,$

$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\dfrac{4}{4} = -1$

27.

(a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

28.

6차 정방행렬

29.

$\begin{bmatrix} -48 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{bmatrix}$

30.

$\det(adjA) = \det(|A|A^{-1}) = |A|^n \frac{1}{|A|} = |A|^{n-1}$이다.

A가 가역행렬이면 $|A| \neq 0$이므로 $|A|^{n-1} \neq 0$이다. 즉, $adjA$는 가역행렬이다.

$adjA \cdot (adjA)^{-1} = I$를 만족한다. $adjA = |A|A^{-1}$임을 이용하면,

$|A|A^{-1} \cdot (adjA)^{-1} = I \rightarrow (adjA)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \det(A^{-1})A = \det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = adj(A^{-1})$

을 보일 수 있다.

31.

$adj(adjA) = adj(|A|A^{-1}) = adj(A^{-1}) = \det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A = A$