8장 연습문제 정답

[Section 8.1]

1.

(a) 참

(b) 거짓 / $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$와 같이 특성다항식이 $\lambda^2+1=0$인 경우에는 고윳값이 복소수이다.

(c) 거짓 / 행렬 A에 대한 고윳값 λ에 대한 고유벡터가 x라고 할 때, $Ax=\lambda x$가 만족하지만, x에 0이 아닌 스칼라값 c를 곱한 cx도 $A(cx)=\lambda(cx)$를 만족하므로 고유벡터는 하나가 아니다.

(d) 참

(e) 참

(f) 참

(g) 거짓 / $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$는 모든 성분이 실수인 행렬이지만, 고윳값이 $\pm i$이다.

(h) 참

(i) 거짓 / x가 영벡터가 아닌 경우에만 고유벡터이다.

(j) 거짓 / 행렬에 대해 행연산은 고유값을 변화시킨다.

(k) 참

2.

a는 고유벡터이고, b는 고유벡터가 아니다.

3.

a는 고유벡터가 아니고, b는 고유벡터이다.

4.

(a) $\lambda^2-2\lambda+1$　　(b) $\lambda^3-36\lambda^2+68\lambda$

5.

(a) $2+\sqrt{10}$, $2-\sqrt{10}$

(b) 7, -4

(c) 0, 3, -4

(d) 0, 6

6.

(a) $\lambda_1=-1$, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$　$\lambda_2=-2$, $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

(b) $\lambda_1=3$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$　$\lambda_2=2$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_3 = 3$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(e) $\lambda_1 = 4$, $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -2$ (중근) $a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a, b \in R$

(f) $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7.

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$의 형태를 가지는 모든 행렬은 정답이다.

8.

$\begin{bmatrix} a & \dfrac{-2-2a}{3} \\ c & \dfrac{-3-2c}{3} \end{bmatrix}$의 형태를 가지는 모든 행렬은 정답이다.

9.

고윳값 -1의 고유공간: $span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, 고윳값 3의 고유공간: $span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

10.

$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$

11.

AB의 특성다항식은 $\det(\lambda I - AB)$이다. 한편, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$이다. 따라서 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - AB) &= \det(A^{-1})\det(\lambda I - AB)\det(A) \\
&= \det(A^{-1}(\lambda I - AB)A) \\
&= \det(A^{-1}\lambda IA - A^{-1}ABA) \\
&= \det(\lambda I - BA)
\end{aligned}$$

$\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$이므로, AB와 BA는 동일한 특성다항식을 갖는다. 따라서 AB와 BA는 동일한 고윳값을 갖는다.

[Section 8.2]

12.

(a) 참

(b) 거짓 / 행렬식의 값은 고윳값의 곱과 같다. 이 행렬의 행렬식은 $0 \times 2 \times 3 = 0$이므로, 이 행렬은 가역이 아니다.

(c) 참

(d) 거짓 / 예를 들어 2는 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$의 고윳값이고 4는 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$의 고윳값이다. 그러나 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$의 2와 12이다. 즉 $2 \times 4 = 8$은 AB의 고윳값이 아니다.

(e) 거짓 / 예를 들어 2는 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$의 고윳값이고 4는 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$의 고윳값이다. 그러나 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$의 2와 12이다. 즉 $2 + 4 = 6$은 AB의 고윳값이 아니다.

(f) 참

(g) 참

(h) 참

(i) 참

(j) 거짓 / 그 역은 참이다. 고윳값이 서로 다르면, 고유벡터도 서로 다르다.

(k) 참

(l) 거짓 / 고윳값이 0인 고유벡터가 있다면 비가역이다.

13.

(a) 5, 1 (b) 1, 5, 3

14.

(a) 2 (b) 6

15.

(a) 고윳값: -3, 6, 행렬식의 값: -18

(b) 고윳값: -1, 4, 13, 행렬식의 값: -52

16.

(a) 1, 8 (b) 1, 8, 27

17.

(a) 1, $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$

18.

-2, 7

19.
2, 3

20.
-1

21.
-27

22.
4

23.
-16

24.
$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

25.
$\lambda_1 = i,\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix};\quad \lambda_2 = -i,\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$

26.
$\begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix}$

27.
-2, 22, 334

28.
x가 A의 고유벡터이므로, $Ax = \lambda x$를 만족한다. A가 가역이므로, $x = \lambda A^{-1}x$가 된다. 양변을 λ를 나눠주면 $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$가 되어, x는 고윳값 $\frac{1}{\lambda}$에 대한 A^{-1}의 고유벡터가 된다.

29.
행렬식의 값은 고윳값의 곱과 같으므로 고윳값에 0이 포함되면 행렬식의 값도 0이다. 따라서 A는 가역행렬이 아니다.

[Section 8.3]

30.

(a) 참

(b) 참

(c) 참

(d) 거짓 / 강한 연결 상태인 그래프에 대해서만 이와 같이 수렴한다.

(e) 거짓 / 강한 연결 상태인 그래프에 대해서만 이와 같이 수렴한다.

31.

평균벡터 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, 공분산 행렬 : $\begin{bmatrix} 3.6 & -0.8 \\ -0.8 & 4 \end{bmatrix}$

32.

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{17} \\ 4 \end{bmatrix}$$

33.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.31 \\ 0.20 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$