6장 연습문제 정답

[Section 6.1]

1.

(a) 참

(b) 거짓 / 시작점과 끝점이 달라도 방향과 크기가 같으면 위치와 무관하게 동일한 벡터로 표현한다.

(c) 참

(d) 거짓 / 스칼라는 하나의 값만을 가진다 (1차원).

(e) 참

(f) 거짓 / 합 연산에 대한 항등원은 영벡터이다.

2.

(a) 거짓 / $\overrightarrow{BC} = p$이다.

(b) 참

(c) 참

(d) 참

(e) 거짓 / $FE = -p$이다.

(f) 참

(g) 참

(h) 참

3.

(a) $(-1, 4, 15)$

(b) $(4, 24, 15)$

(c) $(-11, -18, -13)$

(d) $(-20, 3, -13)$

(e) $(56, -18, 64)$

[Section 6.2]

4.

(a) 참

(b) 거짓. 항상 닫혀있어야 한다.

(c) 참

(d) 참

(e) 참

(f) 참

(g) 거짓. 벡터공간의 차원은 벡터공간의 기저에 있는 벡터의 개수다.

(h) 참

(i) 참

5.

벡터공간이 아니다.

6.

벡터공간이 아니다.

7.

벡터공간이 아니다.

8.

$2+3x-x^2 = -2(1)+5(1+x)+(-1)(1+x)^2$

9.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{15}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10.

(a) 가능 (b) 불가능 (c) 가능 (d) 불가능

11.

(a) 가능 (b) 불가능 (c) 가능

12.

$a = 5$

13.

$h = 3$

14.

$h=-2$

15.

(a) $\begin{cases} 3x_1+5x_2=2 \\ -2x_1 \qquad =-3 \\ 8x_1-9x_2=8 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 \ +7x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+3x_2+x_3 \ =0 \end{cases}$

16.

(a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}x_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}x_3=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

17.

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$을 제외한 S의 부분집합 중 크기가 2인 집합은 모두 정답이다.

[Note] 사실 이 경우에는 여러 가지 답이 존재할 수 있다.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$을 다시 정리하면 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$이다. 따라서 $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$도 $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$와 같이 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$의 선형결합으로 표현할 수 있다.

따라서 S의 부분집합 중 크기가 2인 집합은 모두 이 공간의 기저가 될 수 있다.

(단, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$은 제외한다. 이 집합은 선형종속인 것이 자명하다.)

18.

$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$라고 하자. A가 $\mathbb{R}^3$ 공간의 기저임을 보이기 위해서는 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$를 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$의 선형결합으로 표현할 수 있다는 것을 보여야 한다.

세 벡터가 선형독립이면, 다음 동차 연립선형방정식의 해는 자명해 $c_1=0, c_2=0, c_3=0$으로 유일하다.

$$c_1\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=V\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[정리 4-6]에서 다뤘듯이, 이는 행렬 V의 역행렬이 존재함을 의미한다. 따라서, 다음 방정식

$$c_1\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11}&v_{21}&v_{31}\\v_{12}&v_{22}&v_{32}\\v_{13}&v_{23}&v_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=V\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

의 해는 $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=V^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$로 항상 존재한다. 즉 임의의 벡터 $v=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$를 항상 v_1, v_2, v_3의 선형 결합으로 표현할 수 있으므로, $A=\{v_1,v_2,v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$ 공간의 기저이다.

[Section 6.3]

19.

(a) 참
(b) 참
(c) 참
(d) 참
(e) 거짓 / 같은 벡터의 내적 $\langle x,x\rangle$이 항상 0 이상의 값을 갖는다.

20.

(a) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$

21.

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{29}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

22.

(a) -4 (b) 3 (c) 7 (d) 0

23.

(a) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{231}}$ (b) $\cos\theta=\frac{10}{\sqrt{154}}$

24.

(a) $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ (b) $\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ (c) $\frac{4}{23}\begin{bmatrix}1\\-3\\3\\2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

25.

$v=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2)\rightarrow\|v\|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

26.

$x=9$

27.

$x=\pm 3$

28.

$x=-4$

29.

$\cos\theta=-1$

30.

9

31.

$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle$: 0, $\sin(mx)$의 노름: 1, $\cos(nx)$의 노름: 1

32.

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

33.

(a) $\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$이므로 1과 x는 직교한다.

(b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(c) 1

34.

$(a, b, c, d) = k(-1, 0, -1, 1)$. k는 임의의 실수다.

35.

$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=26$을 만족하는 모든 $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$

36.

$x=1, \frac{1}{2}$

37.

$\sqrt{2500+1200\sqrt{3}} \approx 67.67$

38.

힘의 크기: $\sqrt{24400+12000\sqrt{3}} \approx 212.57N$, 힘의 방향: $\tan^{-1}(\frac{50+60\sqrt{3}}{50\sqrt{3}+60}) \approx 46.40^{\circ}$

[Section 6.4]

39.

(a) 참

(b) 참

(d) 거짓 / u와 v가 만드는 평행사변형의 면적과 같다.

(d) 거짓 / 스칼라 삼중적은 $u \cdot (v \times w)$이다.

(e) 참

40.

(a) $(-13, -14, 3)$ (b) $(13, 14, -3)$ (c) $(0, 0, 0)$ (d) $(0, 5, 5)$

41.

$5u \times v$

42.

-6

43.

$\sqrt{30}$

44.

$\sqrt{3}$

45.

38

46.

10

47.

(a) -66 (b) 3 (c) 0 (d) 0

48.

$(-6, 8, -2)$

49.
6

[Section 6.5]
50.
(a) 참
(b) 거짓 / 방향코사인의 제곱의 합이 1이다.
(c) 거짓 / 직선의 방향벡터와 직선과 평행한 벡터는 동일하므로 직교할 수 없다. 즉, 내적이 0일 수 없다.

51.
$1(x-1)+0(y-1)-2(z-3)=x-2z+5=0$

52.
$2(x-1)+3(y-1)-(z-1) = 2x+3y-z-4 = 0$

53.
$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

54.
$2x+y-3z+8=0$

55.
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}$

56.
$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$

57.
$\frac{10}{\sqrt{21}}$

[Section 6.6]

58.

(a) 참

(b) 참

(c) 참

(d) 참

(e) 참

59.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

60.

$$\begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$$

61.

$$\begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$