3장 연습문제 정답

[Section 3.1]

1.

(a) 참

(b) 거짓 / 정방행렬이어야 할 필요는 없다.

(c) 참

(d) 거짓 / 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 서로 같아야지 곱 AB를 계산할 수 있다.

(e) 참

2.

(a) 3×4

(b) 5

© $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $[3\,3\,4\,5]$

3.

$A=3\times 2,\ B=3\times 2,\ C=2\times 2,\ D=2\times 2,\ E=2\times 3,\ F=3\times 1,\ G=3\times 3,\ H=3\times 3$

4.

계산이 불가능한 것: ①, ④, ⑥, ⑦

5.

(a) $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $A-2B=\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 0 & -7 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$

(c) $4C=\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $C^2=\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 13 \end{bmatrix}$

6.

(a) $AC = \begin{bmatrix} -18 & 6 \\ 0 & 7 \\ -32 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $BE = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 28 \\ 12 & 6 & 21 \\ 16 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

(c) $EF = \begin{bmatrix} 7 \\ 26 \end{bmatrix}$

(d) $GF = \begin{bmatrix} 25 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix}$

7.

(a) $CD = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$

(b) $DC = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $HF = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

(d) $AE = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -12 \\ 10 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -26 \end{bmatrix}$

8.

(a) $(A+B)C = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 14 & 14 \\ -30 & 17 \end{bmatrix}$

(b) $(AC)D = \begin{bmatrix} 0 & -102 \\ 21 & -14 \\ -14 & -172 \end{bmatrix}$

(c) $2(G+H) = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 0 \\ 16 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $E(3F) = \begin{bmatrix} 21 \\ 78 \end{bmatrix}$

9. 여러 가지 답이 존재할 수 있다. 예시로 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이 있다.

[Section 3.2]

10.

(a) 참

(b) 거짓 / 행렬의 곱에서는 교환법칙이 항상 성립하지 않는다.

(c) 거짓 / 단순한 예로 A가 영행렬일 때, $B \neq C$이여도 $AB = AC = 0$이다.

(d) 참

11.

(a) $3I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $(3I_2)A = \begin{bmatrix} 6 & -15 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

12.

(a) $A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $(5I_3)A = \begin{bmatrix} 25 & -5 & 15 \\ -20 & 15 & -30 \\ -15 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

13.

$k = 1$

14.

$AB = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$, $AC = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$로 $AB = AC$임을 보일 수 있다.

15.

$B = \begin{bmatrix} 2k & 6k \\ k & 3k \end{bmatrix}$ 형태의 행렬은 모두 정답이다.

[Section 3.3]

16.

(a) 참

(b) 참

(c) 참

(d) 거짓 / 가역행렬에 대한 역행렬은 유일하다.

(e) 거짓 / $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$이다.

17. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

18.

(a) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

19.

(a) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

20.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & 28 \\ 3 & -11 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -18 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$

21.

$A\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix}$

22.

$k \neq \frac{15}{2}$

[Section 3.4]

23.

(a) 참

(b) 거짓 / 반대칭행렬은 $A = -A^T$를 만족한다.

(c) 참

(d) 참

(e) 참

24.

④

25.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 12 \\ 4 & 12 & 32 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & 24 \\ 1 & 6 & 32 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

26.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 20 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 42 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 20 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 18 & 4 & 33 \\ 0 & -6 & 56 \\ 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 84 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 100 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

27.

$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

28.

$\begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix}$

29.

$A = \frac{1}{2}(A + A^{\top}) + \frac{1}{2}(A - A^{\top}) = \begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 4.5 \\ 2.5 & 5 & 2.5 \\ 4.5 & 2.5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 0 & -0.5 \\ 1.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

30.

(a) $(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = I.$

즉, 역행렬의 정의에 의해,$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 이다.

(b) $(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(c) 행렬의 곱의 역행렬은 각 행렬의 역행렬을 역순으로 곱하여 구할 수 있다.

31.

(a) $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$ (b) $A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$

32.

대각행렬

33.

(a) [정리 3-10]에 의해, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 이다. A는 반대칭행렬이므로, $A^T = -A$ 이다.

즉, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$이므로, A^{-1}도 반대칭행렬이다.

(b) A와 B는 반대칭행렬이므로, $A^T = -A, B^T = -B$이다. 이를 이용하면,

$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$

$(A-B)^T = A^T - B^T = -A + B = -(A-B)$

$(A^T)^T = A = -A^T = -(A^T)$

$(kA)^T = kA^T = -kA = -(kA)$

즉, $A+B, A-B, A^T, kA$는 모두 반대칭행렬이다.

34.

(a) 대칭

(b) 대칭

(c) 비대칭

(d) 대칭

35.

(a) $\begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \\ B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} CB_{11} & CB_{12} \\ CB_{21} & CB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} DB_{11}+B_{21} & DB_{12}+B_{22} \\ B_{11}+EB_{21} & B_{12}+EB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$