10장 연습문제 정답

[Section 10.1]

1.

(a) 참
(b) 참
(c) 참
(d) 거짓
(e) 참
(f) 참
(g) 거짓 / n개의 선형독립인 고유벡터를 갖는다.
(h) 거짓 / 열 개수 만큼의 고유벡터가 있으면 대각화할 수 있다.
(i) 참
(j) 참

2.

(a) 닮음행렬이다.
(b) 닮음행렬이 아니다.

3.

(a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

4.

(a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ 13 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ -\frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \end{bmatrix}$

5.

$A^{100} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2+5^{100} & -1+5^{100} \\ -2+2 \cdot 5^{100} & 1+2 \cdot 5^{100} \end{bmatrix}$

6.

$A^4 = \begin{bmatrix} 1241 & 1160 & 0 \\ 1160 & 1241 & 0 \\ 1510 & 635 & 256 \end{bmatrix}$

7.

5

8.

A와 B가 닮음행렬이면 $A = SBS^{-1}$을 만족하는 가역행렬 S가 존재한다.
A의 전치행렬을 구하면, $A^T = (SBS^{-1})^T = (S^{-1})^T B^T S^T = (S^T)^{-1} B^T S^T$이다. $\det(S^T)$는 $\det(S)$와 같으므로 S^T는 가역행렬이다. 따라서 A^T와 B^T 또한 닮음행렬이다.

9.

A가 대각화 가능 행렬이면 $\Lambda = S^{-1}AS \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1}$을 만족하는 가역행렬 S가 존재한다. A의 전치행렬을 구하면, $A^T = (S\Lambda S^{-1})^T = (S^{-1})^T \Lambda^T S^T = (S^T)^{-1} \Lambda S^T$이다 ($\Lambda$는 대각행렬이므로 $\Lambda = \Lambda^T$이다). $\det(S^T)$는 $\det(S)$와 같으므로 S^T는 가역행렬이다. 따라서 A^T 또한 대각화 가능 행렬이다.

[Section 10.2]

10.

(a) 참

(b) 참

(c) 거짓 / 다른 고윳값에 대응하는 고유벡터는 서로 직교한다.

(d) 참

(e) 거짓 / 대칭행렬의 역행렬은 항상 대칭행렬이다.

(f) 참

11.

(a) 직교대각화 가능 행렬이다.

(b) 직교대각화 가능 행렬이 아니다.

12.

직교대각화 가능 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

13.

(a) $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

14.

$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{11}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

15.

12 $(a=1, b=1, c=5, d=5)$

[Section 10.3]

16.

(a) 참

(b) 거짓 / $x^{\top}Ax > 0$이다.

(c) 참

(d) 참

(e) 참

(f) 참

(g) 거짓 / 양의 정부호 행렬이다.

(h) 참

17.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad 2y_1^2 + 4y_2^2$$

19.

2

20.

(a) 부정부호 행렬 (b) 양의 정부호 행렬

21.

$Q(x) = (Ax) \cdot (Ax) = (Ax)^{\top}(Ax) = x^{\top}A^{\top}Ax$이다. $A^{\top}A$는 대칭행렬이므로, $Q(x)$는 이차형식이다. 한편, $Q(x) = x^{\top}(A^{\top}A)x = \|Ax\|^2 \geq 0$ 이므로, $A^{\top}A$는 양의 준정부호이다.

22.

360

23.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

24.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[Section 10.4]

25.

(a) 참

(b) 참

(c) 참

(d) 거짓 / 부류 간의 분산은 크고 부류 내의 분산은 작은 정사영벡터를 이용한다.

(e) 참

(f) 참