5장 연습문제 해답

01.

주어진 도형의 방정식 $13x^2-10xy+13y^2=72$가 회전한 타원의 방정식임을 보이기 위해서는 회전변환 $(x,y)\to(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$에 의해 변환된 방정식이 $ax^2+by^2=c$꼴임을 보이면 됩니다. 위 회전변환에 의해 이동된 점을 $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$로 두면, $x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$, $y=-x'\sin\theta+y'cos\theta$임을 알 수 있습니다.
이를 $13x^2-10xy+13y^2=72$에 대입하면 다음을 얻습니다.

$$13(x'cos\theta+y'sin\theta)^2-10(x'cos\theta+y'sin\theta)(x'cos\theta-y'sin\theta)+13(-x'sin\theta+y'cos\theta)^2=72$$
$$\Downarrow$$
$$(13\sin^2\theta+10\cos\theta sin\theta+13\cos^2\theta)(x')^2+(10\sin^2\theta-10\cos^2\theta)x'y'+(13\sin^2\theta-10\cos\theta sin\theta+13\cos^2\theta)(y')^2=72$$

변환된 도형의 방정식이 $a(x')^2+b(y')^2=c$꼴이기 위해서는 $10\sin^2\theta-10\cos^2\theta=0$, 즉 $\sin\theta=\pm cos\theta$여야 합니다.

① $\sin\theta=\cos\theta$, **즉** $\theta=\frac{\pi}{4}$**인 경우**

위 식에 $\sin\theta=\cos\theta$를 대입하면,

$$(36\cos^2\theta)(x')^2+(16\cos^2\theta)(y')^2=72$$

이고, $\theta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$이므로 다음과 같습니다.

$$(36\cos^2\theta)(x')^2+(16\cos^2\theta)(y')^2=72 \quad\Rightarrow\quad 18(x')^2+8(y')^2=72$$

② $\sin\theta=\cos\theta$, **즉** $\theta=-\frac{\pi}{4}$**인 경우**

위 식에 $\sin\theta=-\cos\theta$를 대입하면,

$$(16\cos^2\theta)(x')^2+(36\cos^2\theta)(y')^2=72$$

이고, $\theta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$이므로 다음과 같습니다.

$$(16\cos^2\theta)(x')^2+(36\cos^2\theta)(y')^2=72 \quad\Rightarrow\quad 8(x')^2+16(y')^2=72$$

따라서 주어진 방정식은 회전된 타원의 방정식입니다.

02.

(a) 행렬 A는 $m\times n$ 행렬(편의상, $m\geq n$)이라고 가정합시다. 이때, 행렬 A의 열공간을 이루는 기저를 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}$(단, $k\leq n$)라고 하면, 행렬 A의 임의의 열벡터 $\boldsymbol{a}_i$는 어떤 스칼라 $c_{1i},\cdots,c_{ki}$에 대해 $\boldsymbol{a}_i=c_{1i}\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_{ki}\boldsymbol{v}_k$로 쓸 수 있습니다.

한편, i번째 열벡터가 $\boldsymbol{v}_i$인 $m\times k$ 행렬을 B로 정의하고, $k\times n$ 행렬을 $C=(c_{ij})$로 정의하면, 관계식 $\boldsymbol{a}_i=c_{1i}\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_{ki}\boldsymbol{v}_k$에 의해 $A=BC$임을 알 수 있습니다. $A=BC$에서 행렬 A의 i번째 행은 행렬 C의 행의 선형결합으로 표현할 수 있고, 따라서 행렬 A의 행공간의 차원의 최대값은 행렬 C의 행의 개수인 k입니다. 즉,

$$(\text{행렬 } A\text{의 행공간의 차원})\leq(\text{행렬 } C\text{의 행의 개수})=k=(\text{행렬 } A\text{의 열공간의 차원})$$

행렬 A^T에 대해서 비슷한 방법을 적용해보면

$$(\text{행렬 } A\text{의 열공간의 차원})\leq(\text{행렬 } A\text{의 행공간의 차원})$$

을 얻을 수 있습니다. 따라서, 행렬 A의 열공간의 차원은 행렬 A의 행공간의 차원과 같습니다.

(b) 행 사다리꼴의 정의에 의해 행 사다리꼴의 모든 행은 선형 독립임을 쉽게 알 수 있습니다. 행 사다리꼴의 각 행은 기존의 행렬의 선형 결합을 통해 만들어진 행이므로 행렬 A의 랭크와 행 사다리꼴의 랭크는 같음을 알 수 있습니다.

행렬 A의 랭크는 2입니다.

03.

(a)

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt{10} & 0\\ 0 & \sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

(b)

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt{10} & 0\\ 0 & \sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

04.

(a) (가우스-자이델 방법) $\boldsymbol{x}^{k+1}=(D+L)^{-1}(\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k)$는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{k+1}=(D+L)^{-1}(\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k) \quad &\Leftrightarrow \quad (D+L)\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^{k+1}=D^{-1}(-L\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k)\end{aligned}$$

한편, L, U의 정의에 의해

$$\begin{aligned}(-L\boldsymbol{x}^{k+1}+b-U\boldsymbol{x}^k)_i &=-\sum_{j=1}^{n}L_{ij}x_j^{k+1}+b_i-\sum_{j=1}^{n}U_{ij}x_j^k \\ &=-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}+b_i-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}(D^{-1}(-L\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k))_i &=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{-1}(-L\boldsymbol{x}^{k+1}+\boldsymbol{b}-U\boldsymbol{x}^k)_j \\ &=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}+b_i-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k\right)\end{aligned}$$

입니다. 따라서, 가우스-자이델 방법은 다음과 같은 반복식으로 표현할 수 있습니다.

$$x_i^{k+1}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k\right)$$

(b) (SOR 방법) $\boldsymbol{x}^{k+1}=(D+wL)^{-1}(w\boldsymbol{b}-[wU+(w-1)D]\boldsymbol{x}^k)$는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^{k+1}=(D+wL)^{-1}(w\boldsymbol{b}-[wU+(w-1)D]\boldsymbol{x}^k) \\ &\quad\Leftrightarrow \quad (D+wL)\boldsymbol{x}^{k+1}=w\boldsymbol{b}-[wU+(w-1)D]\boldsymbol{x}^k \\ &\quad\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^{k+1}=D^{-1}(-wL\boldsymbol{x}^{k+1}+wb-[wU+(w-1)D]\boldsymbol{x}^k)\end{aligned}$$

(a)와 마찬가지로 L, U의 정의에 의해

$$\begin{aligned}(-wL\boldsymbol{x}^{k+1}+wb-[wU+(w-1)D]\boldsymbol{x}^k)_i &=-w\sum_{j=1}^{n}L_{ij}x_j^{k+1}+wb_i-\sum_{j=1}^{n}(wU_{ij}+(w-1)D_{ij})x_j^k \\ &=-w\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}+wb_i-w\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k-(w-1)a_{ii}x_i^k\end{aligned}$$

이므로,

$$\left(D^{-1}\left(-wL\boldsymbol{x}^{k+1}+wb-\left[wU+(w-1)D\right]\boldsymbol{x}^{k}\right)\right)_i=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{-1}\left(-wL\boldsymbol{x}^{k+1}+wb-\left[wU+(w-1)D\right]\boldsymbol{x}^{k}\right)_j$$
$$=\frac{1}{a_{ii}}\left(-w\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}+wb_i-w\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k-(w-1)a_{ii}x_i^k\right)$$
$$=(1-w)x_i^k+\frac{w}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k\right)$$

입니다. 따라서 SOR 방법은 다음과 같은 반복식으로 표현할 수 있습니다.

$$x_i^{k+1}=(1-w)x_i^k+\frac{w}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^k\right)$$

05.

[예제 5-3], [예제 5-4], [예제 5-5]에서 행렬 A와 $\boldsymbol{b}$만 바뀐 문제입니다. 직접 해봅시다!

06.

(a) max 함수는 다음 성질을 만족합니다. (쉽게 증명할 수 있습니다. 직접 해보세요!)

① 상수 c에 대해서 $\max_{x\in\mathbb{R}}|cx|=|c|\max_{x\in\mathbb{R}}|x|$

② 임의의 x, y에 대해서 $\max_{x\in\mathbb{R}}(x+y)\le\max_{x\in\mathbb{R}}(x)+\max_{x\in\mathbb{R}}(y)$

이를 바탕으로 주어진 행렬 노름 $\|\cdot\|_{pq}$가 노름의 정의를 만족하는지 확인해봅시다.

❶ $c\in\mathbb{R}$과 행렬 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\|cA\|_{pq}=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|cA\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{|c|\,\|A\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}=|c|\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}=|c|\,\|A\|_{pq}$$

❷ $\|A\|_{pq}=0$이기 위해서는 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$인 임의의 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$에 대해 $\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$의 최댓값이 0이어야 합니다. 이를 만족하는 A는 $A=O$인 경우 밖에 없습니다.

❸ 행렬 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\|A+B\|_{pq}=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|(A+B)\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$$
$$\le max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}+\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}}\frac{\|B\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$$
$$=\|A\|_{pq}+\|B\|_{pq}$$

따라서 ❶, ❷, ❸에 의해 행렬 노름은 노름의 정의를 만족합니다.

(b) $x = Rx + c$를 만족하는 x에 대해, $e^k = x^k - x$로 정의합시다. 그러면

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x = Rx^k + c - (Rx + c) = R(x^k - x) = Re^k$$

이 성립함을 알 수 있습니다. 이를 계속 적용하면,

$$e^{k+1} = Re^k = R^2 e^{k-1} = \cdots = R^{k+1} e^0$$

이므로, 임의의 노름에 대해 $\| e^{k+1} \| = \| R^{k+1} e^0 \| \le \| R^{k+1} \| \| e^0 \| \le \| R \|^{k+1} \| e^0 \|$임을 알 수 있습니다. 따라서, $\| R \| < 1$이면 $k \to \infty$일 때 $\| e^{k+1} \| \to 0$이므로 반복법이 수렴함을 확인할 수 있습니다.

07.

(책의 힌트를 아래 분홍색으로 수정합니다.)

실수 $r > 0$에 대해, 집합 D_1, R, D_2를 다음과 같이 정의합시다.

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le r^2\}$$
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max |x|, |y| \le r\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 2r^2\}$$

집합 D_1은 반지름이 r인 원의 내부, 집합 R은 한변의 길이가 $2r$인 정사각형의 내부, 집합 D_2는 반지름이 $\sqrt{2}r$인 원의 내부이므로 $D_1 \subset R \subset D_2$가 성립합니다. 따라서, 각 영역에서 $e^{-x^2-y^2}$의 적분을 생각해보면, 다음의 관계식이 성립합니다.

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dA \le \iint_R e^{-x^2-y^2} dA \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dA$$

① $\underline{\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dA}$

$x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$로 두면, 다변수 치환적분법에 의해 $\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dA$은 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-t^2} t\,dt\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} e^u \right]_{-r^2}^0 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-r^2}\right) d\theta = \pi\left(1 - e^{-r^2}\right)$$

② $\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dA$

$x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$로 두면, 다변수 치환적분법에 의해 $\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dA$은 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}r} e^{-t^2}tdtd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^u\right]_{-2r^2}^{0}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2r^2}\right)d\theta = \pi\left(1-e^{-2r^2}\right)$$

③ $\iint_{R} e^{-x^2-y^2}dA$

R은 좌표축과 평행한 사각형이므로 적분 $\iint_{R} e^{-x^2-y^2}dA$은 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\iint_{R} e^{-x^2-y^2}dA = \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\right)^2$$

①, ②, ③에 의해, 부등식 $\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dA \le \iint_{R} e^{-x^2-y^2}dA \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dA$는

$$\pi\left(1-e^{-r^2}\right) \le \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \pi\left(1-e^{-2r^2}\right)$$

임을 알 수 있고, 부등식의 양변에 $\lim_{r\to\infty}$를 취하면 $\lim_{r\to\infty}\pi\left(1-e^{-r^2}\right) = \lim_{r\to\infty}\pi\left(1-e^{-2r^2}\right) = \pi$이고 $e^{-x^2} > 0$이므로 $\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$임을 알 수 있습니다.

08.

(a) 대칭행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$의 고윳값을 $\lambda \in \mathbb{C}$, 고유벡터를 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$라고 하면, 고윳값과 고유벡터의 정의에 의해 $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$이고, 양변에 켤레복소수를 각각 취해보면

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} \quad\Leftrightarrow\quad A\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$$

임을 알 수 있습니다. $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$와 $A\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$에 각각 $\overline{\boldsymbol{v}}^T$와 $\boldsymbol{v}^T$를 연산해보면,

$$\overline{\boldsymbol{v}}^T A\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}}^T(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\overline{\boldsymbol{v}}^T\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{v}^T A\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^T\left(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}\right) = \overline{\lambda}\boldsymbol{v}^T\overline{\boldsymbol{v}}$$

입니다. 한편, A는 대칭행렬이므로

$$\overline{v}^T A v = (Av)^T \overline{v} = (A^T v)^T \overline{v} = v^T A \overline{v}$$

가 성립하므로, $\overline{v}^T v = v^T \overline{v}$와 위 결과를 이용하면,

$$\overline{v}^T A v = v^T A \overline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \overline{v}^T v = \overline{\lambda}\overline{v}^T v \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - \overline{\lambda})\overline{v}^T v = 0$$

를 얻습니다. 여기서, $\overline{v}^T v \neq 0$이므로 $\lambda = \overline{\lambda}$이어야 하고, 따라서, 대칭행렬 A의 고윳값은 실수여야 합니다.

(b) 1장의 [정리 1-19]에 의해, 대칭행렬 A은 대각화 가능한 행렬입니다. 즉, 행렬 A의 고윳값을 λ_i, 고유벡터를 $\boldsymbol{u}_i$라고 하고, i번째 열벡터가 $\boldsymbol{u}_i$인 행렬을 P, 대각성분이 λ_i인 대각행렬을 D라고 하면, 행렬 A는 $A = PDP^T$로 나타낼 수 있습니다. 행렬 A의 (i,j)번째 성분을 a_{ij}라고 하면,

$$\begin{aligned} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(DP^T)_{kj} &= \sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\sum_{t=1}^{n} D_{kt}(P^T)_{tj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(D_{kk}(P^T)_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_{ik}D_{kk}P_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\boldsymbol{u}_i)_k (\boldsymbol{u}_j)_k \end{aligned}$$

이고, 따라서, $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$입니다.

09.

행렬 U의 각 열벡터를 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$이라고 하면, 선형독립이고 정규직교벡터라는 가정에 의해

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

입니다. 한편, 행렬 $U^T U$의 (i,j) 성분을 계산해보면,

$$(U^T U)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (U^T)_{ik} U_{kj} = \sum_{k=1}^{n} U_{ki} U_{kj} = \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$$

임을 알 수 있습니다. 따라서 $U^T U = I_n$입니다.

10. (별도의 코드를 참고해주세요.)

샘플 코드는 다음과 같습니다.

```
import numpy as np

X = np.array([[63,320,99],
              [65,350,97],
              [62,330,95],
              [68,300,98]])

N = len(X)
mu = np.mean(X,axis=0)

Xtilde = X-mu
Sigma = np.dot(Xtilde.T,Xtilde)/N
Sigmainv = np.linalg.inv(Sigma)

dist = []
for i in range(N):
    dist_i=np.sqrt(Xtilde[0]@Sigmainv@Xtilde[0].T)
    dist.append(dist_i)

print(dist)
```

11.

임의의 벡터 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$에 대해

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$$

가 성립합니다. 따라서, $[\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}]^2 = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$가 성립합니다.

12.

행렬 $\widetilde{X}$의 특잇값 분해를 $\widetilde{X} = U\Sigma V^T$라고 하면, 주어진 데이터의 공분산행렬 C는 다음과 같습니다.

$$C = \frac{1}{N}\widetilde{X}\widetilde{X}^T = \frac{1}{N}U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = \frac{1}{N}U\Sigma\Sigma^T U^T = U\left(\frac{1}{N}\Sigma\Sigma^T\right)U^T$$

따라서

$$C = Q\Lambda Q^T = U\left(\frac{1}{N}\Sigma\Sigma^T\right)U^T$$

이고, 고윳값 분해의 유일성에 의해 Q를 찾는 문제인 주성분 분석은 왼쪽 특이벡터들로 구성된 행렬인 U를 찾는 것과 같습니다.

13.

[예제 5-8]에서 본인의 사진을 불러오는 부분을 제외하고는 유사합니다. 직접 해봅시다!