2장 연습문제 해답

01.

(a) 함수 f의 극한은 존재하지 않습니다.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$입니다.

02.

(a) 함수 f는 $(0,0)$에서 연속이 아닙니다.

(b) 함수 f는 $\mathbb{R}^n$에서 연속입니다.

03.

(a) $f_x(x,y)=3e^{4y}$, $f_y(x,y)=12xe^{4y}$

(b) $f_x(x,y)=-2xy\sin x^2 y$, $f_y(x,y)=-x^2\sin x^2 y$

(c) $f_x(x,y)=2yx^{2y-1}$, $f_y(x,y)=2x^{2y}\log x$

(d) $f_x(x,y)=\dfrac{2\sqrt{y}}{1+4x^2y}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x}{(1+4x^2y)\sqrt{y}}$

04.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{(x+y)y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{1}{x+y}-z\right)\dfrac{1}{y}$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2+2yz\sin(2xyz)}{1-2xy\sin(2xyz)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3+2xz\sin(2xyz)}{1-2xy\sin(2xyz)}$

05.

(a) $D_{\boldsymbol{u}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot \boldsymbol{v}=\left(\dfrac{4x}{y},-\dfrac{2x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)$

(b) $$D_{\boldsymbol{u}}f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot \boldsymbol{v}=\left((2x+x^2yz)e^{xyz},x^3ze^{xyz},x^3ye^{xyz}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{11}}e^{xyz}(x^2yz+2x-x^3z+3x^3y)$$

06.

(a) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=(2x-3y)(-\sin t)+\dfrac{4y-3x}{t}$

$$=(3\log t-2\cos t)\sin t+\frac{4\log t-3\cos t}{t}$$

(b) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)(-e^{-t})+\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)e^t=\dfrac{e^{2t}+(1+e^t)e^t}{1+e^{2t}(1+e^t)^2}$

07.

(a) $\dfrac{\partial w}{\partial s}=\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial s}+\dfrac{\partial w}{\partial \phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial s}=(2\cos 2\theta cos3\phi)2t+(-3\sin 2\theta sin3\phi)6st$

$$=4t\cos 4st\cos 9s^2t-18st\sin 4st\sin 9s^2t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}=(2\cos 2\theta cos3\phi)2s+(-3\sin 2\theta sin3\phi)3s^2$$

$$=4s\cos 4st\cos 9s^2t-9s^2\sin 4st\sin 9s^2t$$

(b) $\dfrac{\partial w}{\partial s}=\dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial s}+\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial s}=(3\sin\theta)2t+\left(3e^{r}\cos\theta\right)\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}$

$$=6t\sin\sqrt{s^2+t^2}+\frac{3se^{2st}}{\sqrt{s^2+t^2}}\cos\sqrt{s^2+t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}=(3\sin\theta)2s+\left(3e^{r}\cos\theta\right)\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$=6s\sin\sqrt{s^2+t^2}+\frac{3te^{2st}}{\sqrt{s^2+t^2}}\cos\sqrt{s^2+t^2}$$

08.

(a) 점 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$에서 가장 빨리 감소하는 방향은 기울기 벡터 $\nabla f(\boldsymbol{x})$의 반대방향인 $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ 방향입니다.

(b) 점 $(2,3)$에서 함수 f가 가장 빨리 감소하는 방향은 다음과 같습니다.

$$-\nabla f(2,3)=-(54,-60)=(-54,60)$$

09.

(a) 최솟값은 e^{-4}, 최댓값은 e^4입니다.

(b) 최솟값은 $-\dfrac{29}{\sqrt{29}}-3$, 최댓값은 $\dfrac{29}{\sqrt{29}}-3$입니다.

10.

$x^2+y^2 \le 4$에서 주어진 함수 f의 최댓값은 12이고 최솟값은 $-\dfrac{13}{3}$입니다.

11.

(a) 삼변수 함수 $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$에 대해 등위곡면 $g(x,y,z)=0$위의 한 곡선 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$는

$$g(r(t))=g(x(t),y(t),z(t))=0$$

을 만족하고, 연쇄법칙을 이용하면

$$\frac{d}{dt}g(r(t))=\nabla g(r(t))\cdot\frac{dr}{dt}=\nabla g(x,y,z)\cdot r'(t)=0$$

임을 알 수 있습니다. 따라서, 함수 g의 기울기벡터 ∇g와 곡선 r의 접벡터 $r'(t)$는 항상 수직입니다.

(b) 2×2 대칭행렬 $A=(a_{ij})$를 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$이라고 하면, 대칭행렬의 정의에 의해 $a_{12}=a_{21}$입니다. 따라서, 편의상 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$로 둡시다. $\boldsymbol{x}=(x,y)\neq(0,0)$인 임의의 2차원 벡터에 대해, $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$를 구해보면 다음과 같습니다.

$$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

한편, $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$를 완전제곱식으로 바꿔서 써보면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=ax^2+2bxy+cy^2 &= a\left(x^2+\frac{2b}{a}yx\right)+cy^2\\ &= a\left(x^2+\frac{2b}{a}yx+\left(\frac{b}{a}y\right)^2-\left(\frac{b}{a}y\right)^2\right)+cy^2\\ &= a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2\end{aligned}$$

주어진 행렬 A가 $\det A=ac-b^2>0$를 만족하므로 $a>0$이면 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}>0$, $a<0$이면 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}<0$임을 알 수 있습니다. 따라서, 정부호행렬의 정의에 의해 $a_{11}>0$이면 A는 대칭인 양의 정부호 행렬, $a_{11}<0$이면 A는 대칭인 음의 정부호행렬입니다.

12.

여기서는 직관적인 증명만 제시합니다. $\boldsymbol{x}_0$가 함수 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$의 임계점, 즉 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$이라고 합시다. 그러면, $\|\boldsymbol{h}\|_2$가 충분히 작은 $\boldsymbol{h}$에 대한 테일러 정리를 이용하면,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T[H(f)](\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+O(\|\boldsymbol{h}\|^3) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T[H(f)](\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+O(\|\boldsymbol{h}\|^3) \end{aligned}$$

임을 알 수 있습니다. $\|\boldsymbol{h}\|_2$가 충분히 작으므로 우변에서 $\boldsymbol{h}$와 관련된 항은 $\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T[H(f)](\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$만 살펴보면 됩니다. $[H(f)](\boldsymbol{x}_0)$이 대칭인 양의 정부호행렬이면 임의의 $\boldsymbol{h}$에 대해 $\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T[H(f)](\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\geq 0$이므로 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})\geq f(\boldsymbol{x}_0)$, 즉, $f(\boldsymbol{x}_0)$는 극솟값입니다. 마찬가지로 $[H(f)](\boldsymbol{x}_0)$가 대칭인 음의 정부호행렬이면 임의의 $\boldsymbol{h}$에 대하여 $\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T[H(f)](\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\leq 0$이므로 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})\leq f(\boldsymbol{x}_0)$, 즉 $f(\boldsymbol{x}_0)$는 극댓값입니다. 만약 $\det([H(f)](\boldsymbol{x}_0))<0$이면, $\boldsymbol{h}$의 선택에 따라서 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})\geq f(\boldsymbol{x}_0)$일 수도 있고 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})\leq f(\boldsymbol{x}_0)$일 수도 있으므로, $f(\boldsymbol{x}_0)$는 안장점입니다.

13.

(a)

$$[H(f)](1,2)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -48 \end{bmatrix}$$

(b)

$$[H(g)](1,-2,3)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(1,-2,3) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}(1,-2,3) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}(1,-2,3) & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1,-2,3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e\sin(-2) & e\cos(-2) & 0 \\ e\cos(-2) & -e\sin(-2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

14.

(a) 함수 f는 극솟점 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$를 가집니다.

(b)

❶ $(x,y)=(0,0)$인 경우

극솟점 : $(0,0)$

❷ $(x,y)=(0,4)$인 경우

극댓점 : $(0,4)$

❸ $(x,y)=(2,2)$인 경우

안장점 : $(2,2)$

❹ $(x,y)=(-2,2)$인 경우

안장점 : $(-2,2)$

그러므로 함수 g는 극솟점 $(0,0)$, 극댓점 $(0,4)$, 안장점 $(2,2)$, $(-2,2)$를 가집니다.

15.

(a) $[J(x,y)](u,v)=\begin{bmatrix}\nabla x(u,v)\\ \nabla y(u,v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{v}{(u+v)^2} & \dfrac{-u}{(u+v)^2}\\ \dfrac{-v}{(u-v)^2} & \dfrac{u}{(u-v)^2}\end{bmatrix}$

(b) $[J(x,y)](u,v)=\begin{bmatrix}\nabla x(u,v)\\ \nabla y(u,v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{bmatrix}$