1장 연습문제 해답

01.

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -1 & -16 & -18 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}[4\ 5\ 6] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$

02.

행렬 $A=(a_{ij})\in \mathbb{R}^{n\times n}$과 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^n$의 곱 $A\boldsymbol{x}$는 n차원 벡터입니다. 행렬 곱의 정의에 의해, 행렬 곱 $A\boldsymbol{x}$의 i번째 성분은 다음과 같습니다.

$$(A\boldsymbol{x})_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$$

따라서 다음이 성립합니다.

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} (A\boldsymbol{x})_1 \\ (A\boldsymbol{x})_2 \\ \vdots \\ (A\boldsymbol{x})_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$$

03.

(a) 거짓

(b) 참

04.

(a) $U^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=U$

(b) $H^{-1}=2160\begin{bmatrix} \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{60} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$

05.

영벡터 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$은 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$으로 표현할 수 있으므로, 선형변환의 정의에 의해

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$$

이므로, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$입니다.

06.

(a) 선형변환의 정의에 의해 다음과 같습니다.

$$T(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = T(a\boldsymbol{u}) + T(b\boldsymbol{v}) = a\,T(\boldsymbol{u}) + b\,T(\boldsymbol{v})$$

(b) $T(1,1) = \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 1, -4 \cdot 1 + 3 \cdot 1\right) = \left(\frac{4}{3}, -1\right)$

07.

① ($\Rightarrow$)

$S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$이 벡터공간 V의 기저라고 합시다. 만약, V의 임의의 원소 $\boldsymbol{v}$가 $a_1, a_2, \cdots, a_n$과 $b_1, b_2, \cdots, b_n$에 대해

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n \\ &= b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n \end{aligned}$$

으로 표현된다고 하면, 우변의 두가지 선형결합을 정리하면 다음을 얻습니다.

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{u}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{u}_n$$

S가 기저이므로 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$는 선형독립이고, 선형독립의 정의에 의해

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$$

이어야 합니다. 즉, S의 원소들의 선형결합으로 $\boldsymbol{v}$를 표현할 수 있는 방법은 유일합니다.

② ($\Leftarrow$)

임의의 $\boldsymbol{v} \in V$가 S의 원소들의 유일한 선형결합으로 표현된다고 합시다. 그러면, 어떤 스칼라 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해 $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$으로 표현되므로 S는 V의 생성집합임을 알 수 있습니다. 한편,

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{u}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n$$

이 성립하고, S의 원소들로 $\mathbf{0} \in V$을 표현하는 선형결합은 유일하므로, 선형독립의 정의에 의해 S는 선형독립집합입니다. 따라서 S는 V의 기저입니다.

08.

(a)

① **고윳값**

$\lambda_1 = \cos\theta - (\sin\theta)i$, $\lambda_2 = \cos\theta + (\sin\theta)i$

② **고유벡터**

❶ $\lambda_1 = \cos\theta - (\sin\theta)i$

$\lambda_1 = \cos\theta - (\sin\theta)i$에 상응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$입니다.

❷ $\lambda_2 = \cos\theta + (\sin\theta)i$

$\lambda_2 = \cos\theta + (\sin\theta)i$에 상응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$입니다.

(b)

① **고윳값**

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \dfrac{3a+c}{n}$, $\lambda_3 = 1 - \dfrac{a+b+c}{n}$

② **고유벡터**

❶ $\lambda_1 = 1$

$\lambda_1 = 1$에 상응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$입니다.

❷ $\lambda_2 = 1 - \dfrac{3a+c}{n}$

$\lambda_2 = 1 - \dfrac{3a+c}{n}$에 상응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{c+2a}{a} \\ 1 \end{bmatrix}$입니다.

❸ $\lambda_3 = 1 - \dfrac{a+b+c}{n}$

$\lambda_3 = 1 - \dfrac{a+b+c}{n}$에 상응하는 고유벡터는 $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-c^2+ab-ac}{a^2-b^2+ab+ac} \\ \dfrac{-a^2-ac+bc}{a^2-b^2+ab+ac} \end{bmatrix}$입니다.

09.

(a) 행렬 A^TA의 고윳값을 λ, 고유벡터는 $\boldsymbol{x}$라고 하면 $A^TA\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$가 성립합니다. 한편,

$$(\lambda\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\left(A^TA\boldsymbol{x}\right)^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x})^TA\boldsymbol{x}\geq 0$$

이고, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\geq 0$이므로 $\lambda\geq 0$입니다. 따라서, 행렬 A^TA의 고윳값은 음이 아닌 실수입니다.

(b) 실수에서 정의된 대칭행렬 A의 고윳값을 $\lambda\in\mathbb{C}$ [1], 모든 성분이 0이 아닌 고유벡터를 $\boldsymbol{x}$라고 하면 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$가 성립합니다. 한편, $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$의 양변에 켤레를 취하면, $A=\overline{A}$에 의해

$$\overline{A\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda\boldsymbol{x}}\quad\Rightarrow\quad\overline{A}\,\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}\quad\Rightarrow\quad A\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}$$

를 얻습니다. 따라서

$$\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}^T(\lambda\boldsymbol{x})=\overline{\boldsymbol{x}}^T(A\boldsymbol{x})=\overline{\boldsymbol{x}}^TA\boldsymbol{x}=\left(\overline{\boldsymbol{x}}^TA\right)\boldsymbol{x}=\left(A^T\overline{\boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{x}=\left(A\overline{\boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{x}=\left(\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

이므로, $\lambda=\overline{\lambda}$가 성립합니다. 따라서, λ는 실수입니다.

10.

(a)

① <u>고윳값</u>

$\lambda_1=3n+\sqrt{9n^2-1}$, $\lambda_2=3n-\sqrt{9n^2-1}$

② <u>대각합</u>

$\operatorname{tr}(A_n)=\sum_{k=1}^{2}(A_n)_{kk}=3n+3n=6n$

③ <u>행렬식</u>

$\det(A_n)=3n\cdot 3n-\left(9n^2-1\right)\cdot 1=1$

행렬 A_n의 고윳값의 합은 $6n$, 곱은 1이고 이는 각각 행렬의 대각합 $\operatorname{tr}(A_n)$와 행렬식 $\det(A_n)$과 같습니다.

(b) 행렬 $A=(a_{ij})$의 특성다항식을 $p(\lambda)$라고 하면, 어떤 실수 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$

---

1) 여기서 $\mathbb{C}$는 복소수 집합을 의미합니다.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

입니다[2]. 이 특성다항식에 대해, 일반적인 방정식의 이론에 의해 $p(\lambda) = 0$을 만족하는 근인 고윳값의 합은 $-c_{n-1}$이고 곱은 $(-1)^n c_0$입니다.

ⓐ **고윳값의 합** $-c_{n-1}$

주어진 특성 다항식의 행렬식을 첫 번째 행에 대해 계산해보면 λ의 $n-1$ 제곱과 관련된 항은

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

에서만 등장합니다. 따라서 λ^{n-1}의 계수인 c_{n-1}는 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\operatorname{tr}(A)$이므로 구하고자 하는 고윳값의 합은 $-c_{n-1} = \operatorname{tr}(A)$입니다.

ⓑ **고윳값의 곱** $(-1)^n c_0$

c_0는 특성다항식에서 상수항이므로, $p(0) = \det(-A) = c_0$입니다. 행렬식의 성질에 의해, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$이므로 다음과 같습니다.

$$p(0) = \det(-A) = c_0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (-1)^n c_0$$

따라서 고윳값의 곱은 행렬식 $\det(A)$입니다.

11.

(a) 닮음관계의 정의에 의해, 주어진 행렬 A, B에 대해 $PA = BP$를 만족하는 P를 찾으면 됩니다. $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$로 두고, $PA = BP$를 만족하는 P를 찾아보면

$$PA = BP \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = c$$

임을 알 수 있습니다. 따라서 $a = 0$, $b = c$를 만족하는 P에 대해 $PA = BP$가 성립하므로 행렬 A, B는 닮음관계입니다.

(확인) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$로 두면, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이므로,

---

2) 고윳값은 특성다항식의 근이므로 특성다항식을 $\det(A - \lambda I_n)$ 대신 $\det(\lambda I_n - A)$로 봐도 무방합니다.

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

(b) 임의의 행렬 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$에 대해, 대각합의 정의를 이용하면

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=0}^{n} a_{kt} b_{tk} = \sum_{t=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{tk} a_{kt} = \sum_{t=0}^{n} (BA)_{tt} = \mathrm{tr}(BA)$$

임을 알 수 있습니다. 따라서, 닮음관계인 행렬 A, B는 $P^{-1}BP = A$를 만족하므로 다음이 성립합니다.

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BP^{-1}P) = \mathrm{tr}(BI_n) = \mathrm{tr}(B)$$

12.

(a) 행렬 A는 대각화가 가능한 행렬입니다.

$P = [\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$로 두면, 주어진 행렬은 $A = PDP^{-1}$로 대각화 가능합니다.

(b) 행렬 B는 대각화가 가능한 행렬입니다.

$P = [\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2\, \boldsymbol{v}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$로 두면, 주어진 행렬은 $B = PDP^{-1}$로 대각화 가능합니다.

13.

직교행렬 $P = (p_{ij})$의 각 열벡터를 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$이라고 할 때, 행렬 곱의 정의에 의해

$$(P^T P)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P^T)_{ik} (P)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} = p_{1i} p_{1j} + p_{2i} p_{2j} + \cdots + p_{ni} p_{nj} = \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j$$

가 성립합니다. 따라서 직교행렬의 정의에 의해 $P^T P = I_n$, 즉

$$(P^T P)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

이므로, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{ij}$가 성립합니다.

14.

① <u>직교행렬</u>

주어진 행렬을 P라고 하면, P가 직교행렬임을 보이기 위해서는 $P^{-1} = P^T$임을 보여야 합니다. 이를 위해, 주어진 행렬 P의 역행렬 P^{-1}를 구해봅시다.

행렬 P의 세 번째 행을 기준으로 행렬식을 구해보면, $\det P = -(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1$

이고, 행렬 P의 각 여인자는 다음과 같습니다.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0, \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

따라서 주어진 행렬 P의 역행렬 P^{-1}는

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = P^T$$

이므로 행렬 P는 직교행렬입니다.

② **<u>행렬 P의 고윳값과 고유벡터</u>**

고윳값은 $\lambda_1 =-1$, $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5-2\sqrt{2}}\,i}{2\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5-2\sqrt{2}}\,i}{2\sqrt{2}}$ 입니다.

각 λ_i에 상응하는 고유벡터는 $v_i = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\lambda_i} \\ -\lambda_i \\ 1 \end{bmatrix}$입니다.

15.

(a) 정부호 행렬이 아닙니다.

(b) 정부호 행렬이 아닙니다.