제2장 신호와 시스템의 분류

[개념 정리]

2.1 신호에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 이산 신호를 발생 순서대로 늘어놓으면 단순한 수열에 지나지 않는다.

㉯ 아날로그 신호와 디지털 신호 신호를 구분하는 기준은 크기(값)에 대한 연속성이다.

㉰ $-4 \le n \le 5$에서 정의되는 이산 신호 $x[n]$의 길이는 10이다.

㉱ 아날로그 신호는 샘플링과 양자화를 거쳐 디지털 신호로 변환 가능하다.

Ans) ㉯

2.2 주기 신호에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 주기 신호는 전 시간 구간 $(-\infty,\ \infty)$에 걸쳐 값을 갖는 양방향 신호이다.

㉯ 서로 다른 주기를 갖는 두 주기 신호의 합으로 주어지는 이산 신호는 주기 신호이다.

㉰ 정수인 주파수 f_1과 f_2를 갖는 두 연속 정현파 신호의 합으로 주어지는 신호의 주기는 두 주파수의 최대공약수의 역수이다.

㉱ $x[n] = \cos(\frac{4\pi}{7}n)$의 주기는 $N = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{7}{2}$이다.

Ans) ㉱

이산 신호의 시간 변수는 항상 정수이므로 주기도 정수이다.

2.3 함수(신호)의 대칭성에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 신호 $x(t) = \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$는 우대칭 신호이다.

㉯ 신호 $x(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$는 우대칭 신호이다.

㉰ 신호 $x(t) = \cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$는 우대칭 신호이다.

㉱ 신호 $x(t) = e^{at}\cos(\omega_0 t)$는 우대칭 성분과 기대칭 성분으로 분해할 수 있다.

Ans) ㉰

우대칭 × 우대칭 = 우대칭

기대칭 × 기대칭 = 우대칭

우대칭 × 기대칭 = 기대칭

2.4 신호에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 어떤 신호는 에너지 신호이면서 동시에 전력 신호도 될 수 있다.

㉯ 확정 신호는 시간에 따른 값의 변화를 정확히 예측할 수 있지만 통계적 성질은 불규칙하다.

㉰ 유한한 신호 값을 갖는 모든 주기 신호가 전력 신호인 것은 아니다.

㉱ $x(t) = 3t^2$은 에너지 신호도 아니고 전력 신호도 아니다.

Ans) ㉱

2.5 선형 시스템에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 입출력 관계가 입-출력 평면에서 직선으로 표현되면 선형 시스템이다.

㉯ 선형 시스템에 정현파 신호를 입력하였을 때 출력은 같은 주파수의 정현파가 된다.

㉰ 선형 시스템에서는 복잡한 입력 신호를 단순한 신호들의 합으로 분해하여 간편하게 출력을 구할 수 있다.

㉱ 저항 회로는 선형 시스템이다.

Ans) ㉮

입-출력 평면에서 원점을 지나는 직선이 되어야 선형 시스템이다.

2.6 시불변 시스템에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 시불변 시스템은 출력이 입력의 형태(값)에만 종속이고 인가 시점과는 무관하다.

㉯ 입출력 관계가 $y(t) = (2t+3)x(t) + 6$인 시스템은 시불변 시스템이다.

㉰ 시간이 흐를수록 생선 비린내를 덜 느끼는 사람의 후각은 시변 시스템이다.

㉱ 커피 1잔에 500원인 커피 자판기는 선형 시불변 시스템이다.

Ans) ㉯

2.7 인과 시스템에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 임펄스 입력 $\delta[n]$에 대한 출력이 $h[n] = 0,\ n < 0$이면 인과 시스템이다.

㉯ '아니 땐 굴뚝에 연기 나랴'라는 속담은 인과 시스템의 성질을 표현한다.

㉰ 월급날 갚을 것을 예상하고 미리 상품을 건네주는 행위는 비인과적이다.

㉱ 입출력 관계가 $y[n] = \sum_{k=-L}^{L} x[n-k]$인 시스템은 인과 시스템이다.

Ans) ㉱

2.8 시스템 안정도에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 줄을 퉁기면 시간이 지남에 따라 소리가 작아지는 기타는 안정 시스템이다.

㉯ 안정 시스템은 입력 신호를 증폭할 수 없다.

㉰ 입출력 관계가 $y(t) = x^2(t)$인 시스템은 안정 시스템이다.

㉱ 입출력 관계가 $y(t) = tx(t)$인 시스템은 불안정 시스템이다.

Ans) ㉯

선형 증폭기 $y(t) = Kx(t)(K > 1)$은 $|x(t)| \le M$이면 $|y(t)| \le KM$으로 BIBO 안정도를 만족한다.

2.9 시스템에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 과거의 거래 실적에 따라 할인율을 다르게 적용하는 백화점은 동적 시스템이다.

㉯ 매일 그날의 작업량에 따라 품삯을 지급하는 공사 현장은 순시적 시스템이다.

㉰ 동적 시스템은 과거 행적의 분석이 필요한 시스템이다.

㉱ 점심, 저녁 피크타임과 주말은 시급이 1.5배인 패스트푸드점 서빙 아르바이트는 동적 시스템이다.

Ans) ㉱

2.10 가역 시스템에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 안정한 시스템의 역 시스템은 항상 안정하다.

㉯ 서로 다른 두 입력 값에 대한 출력이 같은 시스템은 가역 시스템이 아니다.

㉰ 입출력 관계가 $y(t) = x^3(t)$인 시스템은 비선형 가역 시스템이다.

㉱ 미분과 적분은 서로 역 시스템 관계이다.

Ans) ㉮

안정한 시스템에서는 입력이 유한하면 출력도 유한하다. 그러나 출력이 유한하다고 해서 항상 입력이 유한한 관계인 것은 아니다. 실제 경우에도 리미터 같은 시스템은 입력이 무한히 커지더라도 출력은 유한하다.

[기초 문제]

2.11 다음의 신호가 어떠한 성질을 갖는 신호인지 [보기] 중에서 고르고, 그 근거를 밝혀라.

(a) $x[n] = \cos(\pi n) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$

(b) 동전 100번 던지기 결과 (앞면= 1, 뒷면= −1)

(c) $x(t) = e^{-|t|}\sin(120\pi t)$

(d) $x(t) = [t]$ ($[t]$는 t에 가장 가까운 정수를 취하는 연산)

㉮ 아날로그 신호	㉯ 디지털 신호	㉰ 주기 신호	㉱ 기대칭 신호
㉲ 우대칭 신호	㉳ 불규칙 신호	㉴ 전력 신호	㉵ 에너지 신호

Ans) (a) ㉰ ㉲ ㉴ (b) ㉯ ㉳ ㉵ (c) ㉮ ㉱ ㉵ (d) ㉱

2.12 다음 연속 신호가 주기 신호인지 판별하라. 만약 주기 신호라면 그 주기를 구하라.

(a) $x(t) = \cos(\frac{2\pi}{3}t - 1)$

Ans) 주기 $T=3$인 주기 신호

(b) $x(t) = \cos(2t - \frac{1}{\pi})$

Ans) 주기 $T=\pi$인 주기 신호

※ 주기는 위상과 무관하게 구해진다(그러나 위상은 주기에 따라 달라짐을 주의하라).

(c) $x(t) = \cos(6\pi t - \frac{\pi}{4}) + \sin(8\pi t)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3}$ → 유리수 → 주기 신호 & 주기는 $T=1$

(d) $x(t) = \cos(2t) + \sin(4t)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ → 유리수 → 주기 신호 & 주기는 $T=\pi$

(e) $x(t) = 2\cos(3t + \frac{\pi}{6}) + \sin(4t)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$ → 유리수 → 주기 신호 & 주기는 $T=2\pi$

(f) $x(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)+2\cos(3t)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2\pi}$ → 유리수 아님 → 비주기 신호

(g) $x(t)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)+\sin\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{\pi}$ → 유리수 아님 → 비주기 신호

(h) $x(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos(3t-1)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{9}{2\pi}$ → 유리수가 아님 → 비주기 신호

2.13 다음 이산 신호가 주기 신호인지 판별하라. 만약 주기 신호라면 그 주기를 구하라.

(a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}\right)$

Ans) 주기 신호이고 주기는 $N=8$

(b) $x[n]=\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{1}{3})$

Ans) 주기 신호이고 주기는 $N=4$

(c) $x[n] = \sin(3n + \frac{\pi}{2})$

Ans) 주기가 무리수로 정수가 아님 → 비주기 신호

(d) $x[n] = \cos(\pi^2 n)$

Ans) 주기가 무리수로 정수가 아님 → 비주기 신호

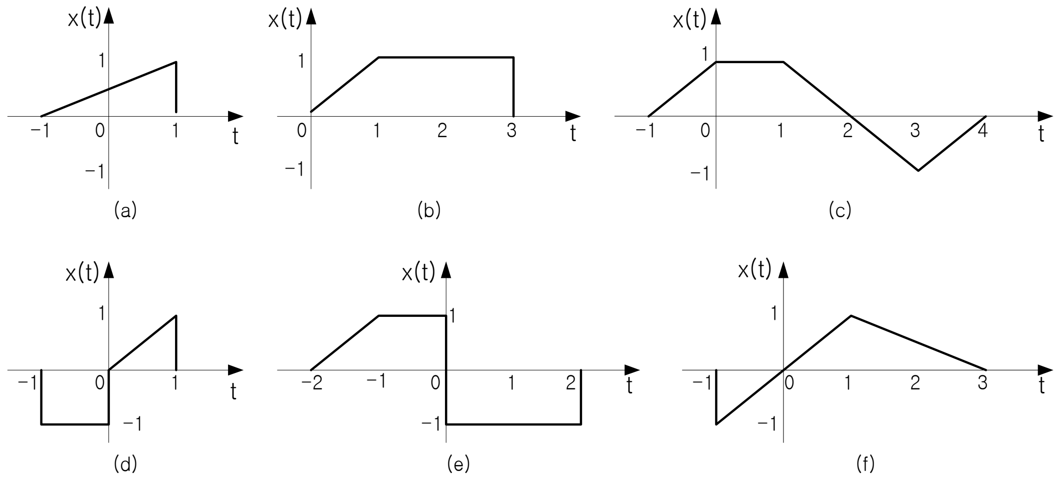
(e) $x[n]=\cos(\frac{1}{2}n)+\sin(\frac{\pi}{3}n)$

Ans) 두 주기의 비 $\frac{N_1}{N_2}=\frac{4\pi}{6}$이 무리수 → 비주기 신호

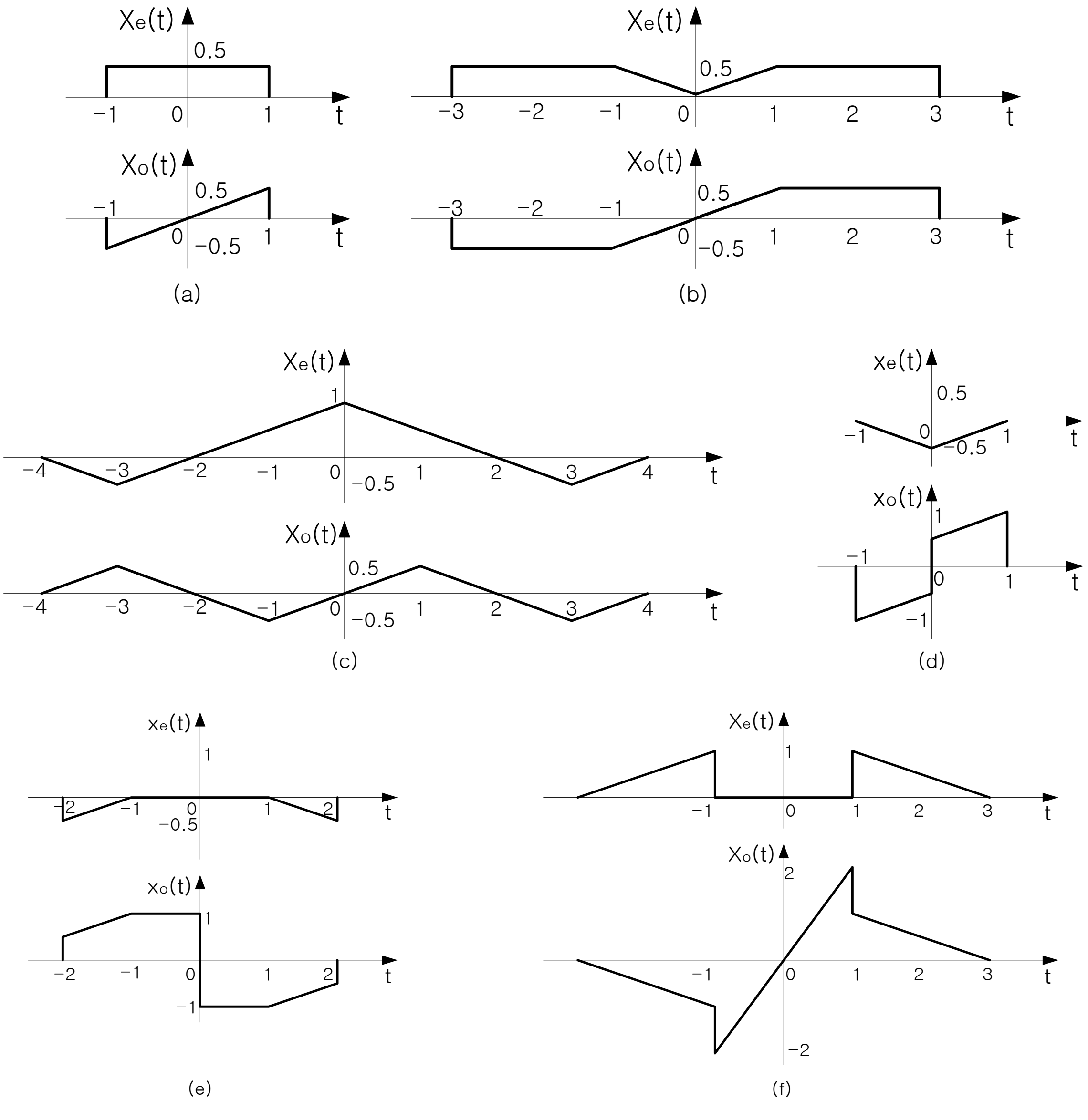
(f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n + \pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10}n - \pi\right)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{N_1}{N_2}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ → 유리수 → 주기 신호 & 주기는 $N=20$

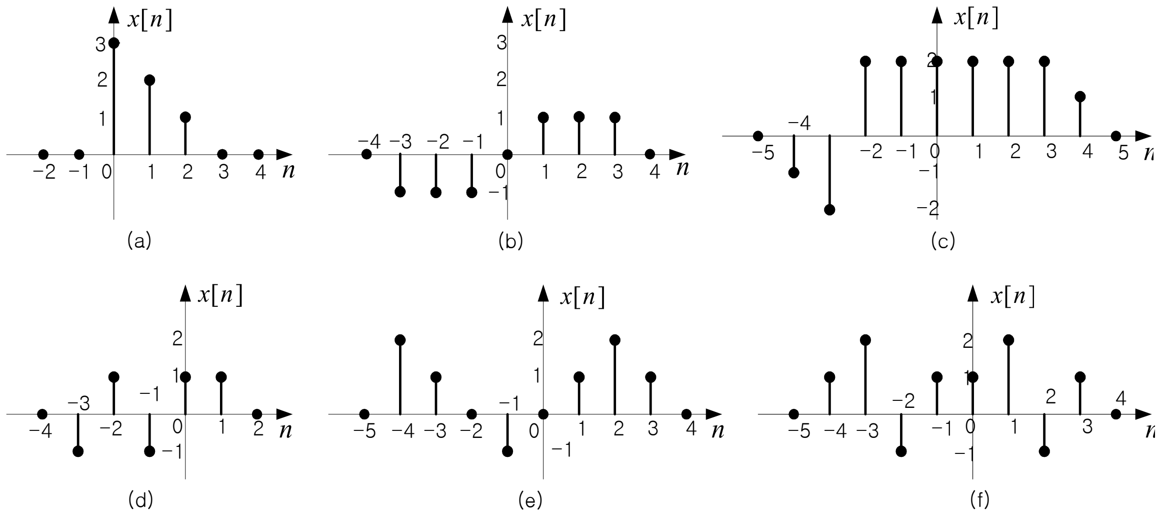
2.14 다음과 같은 연속 신호에 대해 우대칭 성분과 기대칭 성분을 구하라.



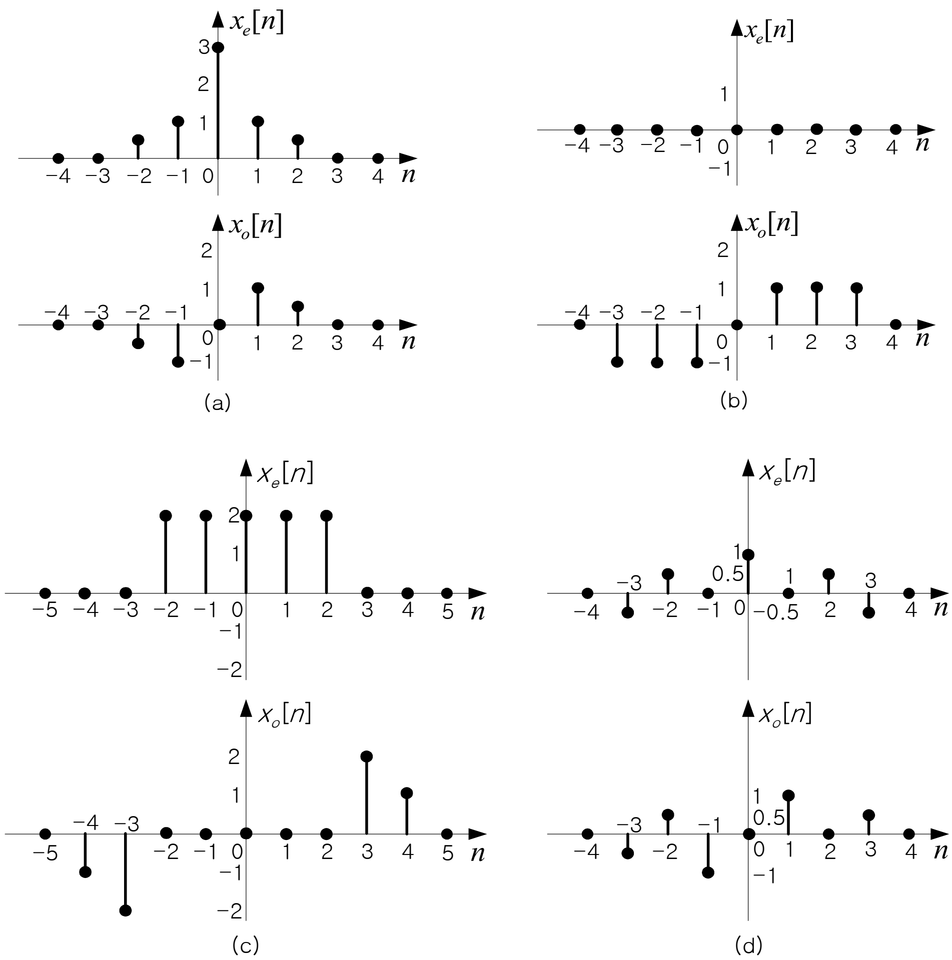
Ans) 주어진 파형에 대해 시간축에 대해 뒤집은 반사(시간 반전) 신호를 구해 원 신호에서 이를 더하면 우대칭 성분, 빼면 기대칭 성분을 얻게 된다.

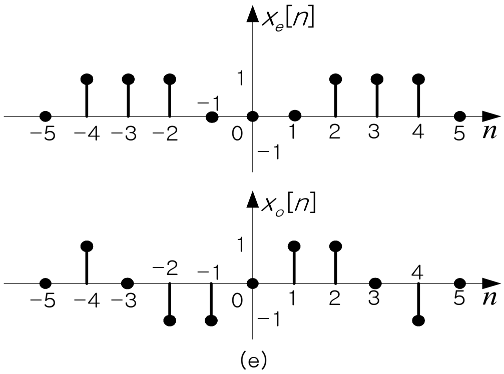


2.15 다음과 같은 이산 신호에 대해 우대칭 성분과 기대칭 성분을 구하라.

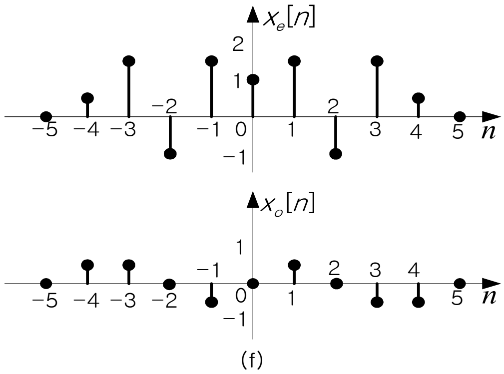


Ans) 주어진 파형에 대해 시간축에 대해 뒤집은 반사(시간 반전) 신호를 구해 원 신호에서 이를 더하면 우대칭 성분, 빼면 기대칭 성분을 얻게 된다.





(e)



(f)

2.16 다음 신호에 대해 에너지 신호 또는 전력 신호인지 판별하고, 맞으면 그 신호의 에너지 또는 전력을 구하라.

(a) $x(t) = r(t) - 2r(t-2) + r(t-4)$

Ans) 에너지 신호, $E = \int_0^2 t^2\,dt + \int_2^4 (-t+4)^2\,dt = \frac{16}{3}$

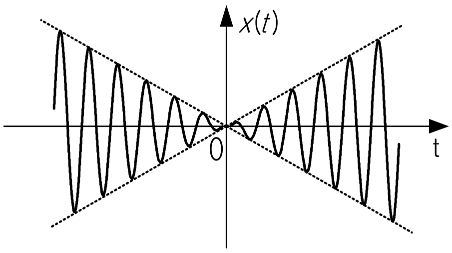
(b) $x(t) = \cos^2(2\pi t)$

Ans) $x(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1}{2}(1+\cos(4\pi t))$

전력 신호, $P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4}(1+\cos(4\pi t))^2\,dt = \frac{3}{8}$

(c) $x(t) = t\sin(\frac{\pi}{4}t)$

Ans) 비에너지 비전력 신호



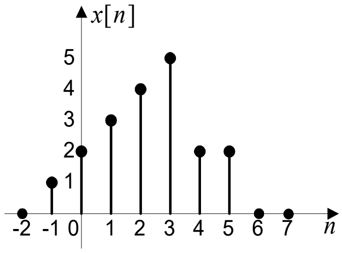
(d) $x(t) = e^{j\frac{\pi}{4}t}$

Ans) 주기 $T=8$인 주기 신호로 전력 신호

$$P = \frac{1}{8}\int_0^8 e^{j\frac{\pi}{4}t} e^{-j\frac{\pi}{4}t}\,dt = 1$$

(e) $x[n] = (n+2)u[n+2] - nu[n-4] - 2u[n-6]$

Ans) 에너지 신호, $E = \sum |x[n]|^2 = 63$



(f) $x[n] = (-0.5)^{|n|}$

Ans) 에너지 신호, $E = \sum_{k=-\infty}^{-1} |-0.5|^{-2k} + \sum_{k=0}^{\infty} |-0.5|^{2k} = \frac{5}{3}$

(g) $x[n] = \begin{cases} (0.5)^n \cos(\pi n), & n \geq 0 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$

Ans) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

에너지 신호, $E = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n} = \frac{4}{3}$

(h) $x[n] = (0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$

Ans) 비에너지 신호 & 비전력 신호

$\because$ $n < 0$일 경우 $(0.9)^n$이 $n \to -\infty$에 따라 무한히 커짐

2.17 다음의 시스템이 어떠한 성질을 만족하는지 [보기] 중에서 고르고, 그 근거를 밝혀라.

(a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau, \quad y(-\infty) = 0$ (b) $y(t) = t x(t)$

(c) $y(t) = \cos(x(t))$ (d) $y(t) = K x(t+1)$

㉮ 선형 시스템	㉯ 비선형 시스템	㉰ 시불변 시스템	㉱ 시변 시스템
㉲ 인과 시스템	㉳ 안정 시스템	㉴ 동적 시스템	㉵ 가역 시스템

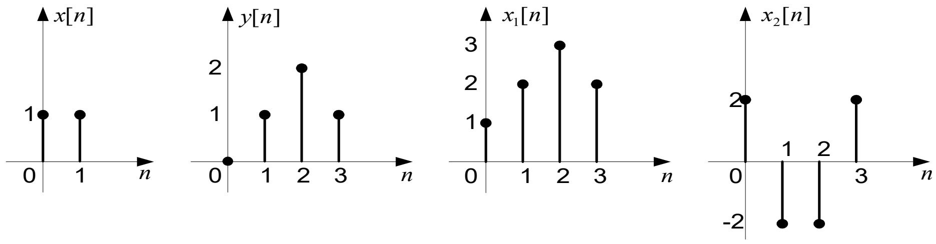
Ans) (a) ㉮ ㉰ ㉲ ㉴ ㉵ (b) ㉮ ㉱ ㉲ (c) ㉯ ㉰ ㉲ ㉳ (d) ㉮ ㉰ ㉳ ㉴ ㉵

(b) 불안정 : $|x(t)| \leq M$이더라도 $t \to \infty$이면 $|y(t)| \to \infty$임

비가역 : $x(t) = \frac{1}{t} y(t)$는 $t = 0$에서 값이 정의 안 됨

(c) 비가역 : $x(t) = a$와 $x(t) = a + 2\pi k$가 같은 출력값으로 사상됨

2.18 다음 그림의 신호 $x[n]$을 입력으로 넣으면 출력으로 신호 $y[n]$이 나오는 이산 LTI 시스템에 $x_1[n]$과 $x_2[n]$의 신호를 각각 입력으로 넣었을 때 출력을 구하라.



Ans) $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$

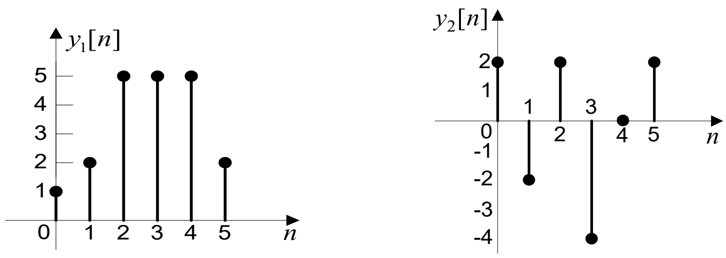
$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$x_1[n] = x[n] + x[n-1] + 2x[n-2]$

$$\therefore\ y_1[n] = y[n] + y[n-1] + 2y[n-2]$$
$$= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

$x_2[n] = 2x[n] - 4x[n-1] + 2x[n-2]$

$$\therefore\ y_2[n] = 2y[n] - 4y[n-1] + 2y[n-2]$$
$$= 2\delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 4\delta[n-3] + 2\delta[n-5]$$



2.19 다음과 같은 입출력 관계를 갖는 연속 시스템에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 기억성, 안정성, 가역성의 각 특성이 만족하는지를 결정하라.

(a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 만족

⑥ 안정성 : 불만족

(b) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

미분은 변화율에 해당하므로 과거의 입력값에 종속되어 결정된다.

⑤ 가역성 : 만족

⑥ 안정성 : 불만족

$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$로 불연속점이 존재하는 입력 신호는 안정도 조건이 만족되지 않는다. (3장 참조)

(c) $y(t) = \ln(x(t))$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x(t) = 0$에 대해서는 $y(t)$의 값이 정의되지 않으므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 불만족

$x(t) = 0$에 대해서는 $y(t)$의 값이 정의되지 않으므로($-\infty$로 접근) 불안정이다.

(d) $y(t) = \tan(x(t))$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x(t) = a + 2\pi k$, k는 정수에 대해서 $y(t)$의 값이 같으므로 일대일 대응이 되지 않아 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 불만족

$x(t) = \pm\frac{\pi}{2}$에 대해서는 $y(t)$의 값이 정의되지 않으므로($-\infty$로 접근) 불안정이다.

(e) $y(t) = x(t)u(t)$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$t < 0$에서는 $x(t)$가 어떤 값을 가지더라도 $y(t) = 0$이므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(f) $y(t) = e^{x(t)} + \cos(x(t)) + (t+1)$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$\cos(x(t))$가 $x(t) = a$와 $x(t) = a + 2\pi k$에 대해 같은 출력 값을 내므로 일대일 대응이 아님

⑥ 안정성 : 불만족

$(t+1)$항에 의해 시간이 무한대로 감에 따라 입력이 유한하더라도 출력이 무한대로 발산하여 불안정

(g) $y(t)=x(t+1)x(t-1)$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

예를 들어 $x(t+1)=-x(t-1)$이면 $x(t+1)=\pm 1$에 대해 $y(t)=-1$이므로 일대일 대응이 되지 않는다. 따라서 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(h) $y(t)=\begin{cases} x(t), & t \geq 0 \\ -x(t), & t < 0 \end{cases}$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

$x(t)=\begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t)$라고 하면

$$y_1(t)=H\{x_1(t)=x(t+t_0)\}=\begin{cases} x_1(t), & t \geq 0 \\ -x_1(t), & t < 0 \end{cases}=\begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & -t_0 \leq t < 0 \\ 0, & t < -t_0 \end{cases}$$

$$\neq y(t+t_0)=\begin{cases} 1, & t \geq -t_0 \\ 0, & t < -t_0 \end{cases}$$

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x(t)=t$일 경우 $y(t)=|t|$로 되어 일대일 대응이 되지 않는다.

⑥ 안정성 : 만족

2.20 다음과 같은 입출력 관계를 갖는 이산 시스템에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 기억성, 안정성, 가역성의 각 특성이 만족하는지를 결정하라.

(a) $y[n]=x[1-n]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 만족

$1-n=n'$로 치환하면 $x[n']=y[1-n']$

⑥ 안정성 : 만족

(b) $y[n] = x[2n]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 불만족

특정한 한 순간의 미래 입력이 현재의 출력을 결정하므로 기억(저장) 요소가 필요하지 않다.

⑤ 가역성 : 불만족

$x[n] = y[n/2]$으로 홀수의 n에 대해서는 $x[n]$을 구할 수 없으므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(c) $y[n] = x[n]x[n-3]$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x[n] = \dfrac{y[n]}{x[n-3]}$으로 $y[n]$만으로부터 결정할 수 없다. 특히 $x[n-3] = 0$의 경우에는 값이 정의되지 않는다. 그러므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(d) $y[n] = |x[n]|$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x[n] = \pm a$에 대해 $y[n] = a$이 되어 일대일 대응 관계가 아니다.

⑥ 안정성 : 만족

(e) $y[n] = nx[n-1]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x[n] = \dfrac{1}{n}y[n+1]$로서 $n=0$이면 $x[n]$의 값이 정의되지 않는다. 실제로 $n=0$이면 $x[n]$ 값에 상관없이 항상 $y[n]=0$이므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 불만족

$|x[n]| \le M_x < \infty$이라 하더라도 $|y[n]| = |nx[n-1]|$은 $n \to \infty$로 가면 ∞로 발산한다.

(f) $y[n] = x[n]\cos(\dfrac{\pi n}{2})$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

예를 들어, $x[n]=1$ & $\cos(\frac{\pi n}{2})=1$인 경우와 $x[n]=-1$ & $\cos(\frac{\pi n}{2})=-1$인 경우 모두 $y[n]=1$이 된다. 일대일 대응 관계가 아니므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(g) $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x[n-k]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 만족

$$y[n]-y[n-1]=\frac{1}{2M+1}(x[n+M]-x[n-1-M])$$

$x[n]$과 $y[n]$의 관계가 선형 차분방정식으로 표현되므로 가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

(h) $y[n]=e^{x[n]}$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 불만족

⑤ 가역성 : 불만족

어떠한 $y[n]$으로부터도 $x[n]=0$의 값을 얻을 수가 없으므로 비가역적이다.

⑥ 안정성 : 만족

[응용 문제]

2.21 다음 신호가 주기 신호인지 판별하라. 만약 주기 신호라면 그 주기를 구하라.

(a) $x(t)=\sin(4\pi t)\cos(2\pi t)$

Ans) $x(t)=\frac{1}{2}\sin(6\pi t)-\frac{1}{2}\sin(2\pi t)$

두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$ → 유리수 → 주기 신호 & $T=1$

(b) $x(t)=\cos(t)+3e^{-j2t}$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ → 유리수 → 주기 신호 & $T=2\pi$

(c) $x(t)=e^{j3t}-e^{j4t}$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$ → 유리수 → 주기 신호 & $T = 2\pi$

(d) $x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Ans) $x(t) = \frac{1}{2}(e^{j\frac{5\pi}{6}t} + e^{j\frac{\pi}{6}t})$

두 신호의 주기의 비는 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{12}{5}}{12} = \frac{1}{5}$ → 유리수 → 주기 신호 & $T = 12$

(e) $x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n^2}{2} + \pi\right)$

Ans) $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{3\pi n}{2}}k = \frac{4k}{3n}$이 n의 함수로 주어진다. 따라서 이 신호는 주기 신호가 아니다.

(f) $x[n] = e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{3}n}$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{N_1}{N_2} = \frac{8}{6}$ → 유리수 → 주기 신호 & $N = 24$

(g) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$

Ans) $x[n] = \frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi}{15}n) + \cos(\frac{8\pi}{15}n)]$

$N_1 = 15$ & $N_2 = 15$ → 주기 신호 & 주기 $N = 15$

(h) $x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n} + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

Ans) 두 신호의 주기의 비는 $\frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{8}$ → 유리수 → 주기 신호 & $N = 8$

2.22 $x(t)$는 주기가 T, $x[n]$은 주기가 N인 주기 신호이다. 다음의 신호가 주기 신호인지 판별하고, 주기 신호가 맞으면 그 주기를 구하라.

(a) $y(t) = x(1 - t/2)$

Ans) 주기 신호, 주기 $T' = T/2$

(b) $y(t) = x(t^2)$

Ans) $T' = 2Tt + T^2$가 되어야 하는데, 이 주기는 t의 함수이므로 주기가 될 수 없다.

∴ $y(t)$는 비주기 신호이다.

(c) $y(t)=x(t)-x(-t)$

Ans) $y(t)$는 주기 신호, 주기 $T'=T$

(d) $y(t)=e^{x(t)}$

Ans) $y(t)$는 주기 신호, 주기 $T'=T$

(e) $y[n]=x[2n-1]$

Ans) $y[n+N_1]=y[n]$이 만족되는 정수 N_1이 존재하는지 보면 된다.

$$\therefore\ y(t)\text{는 주기 신호, 주기 } N_1=\begin{cases} N/2, & N=\text{짝수} \\ N, & N=\text{홀수} \end{cases}$$

(f) $y[n]=x[n/N]$

Ans) $y(t)$는 주기 신호, 주기 $N_2=N^2$

(g) $y[n]=x[n]u[n]$

Ans) 주기 신호는 $x[n]=x[n+kN]$이 성립하는 신호이므로 $-\infty\le n\le\infty$에서 값이 존재해야 한다.
그러므로 주어진 신호는 주기 신호가 아니다.

(g) $y[n]=x[n]+x[-n]$

Ans) $y(t)$는 주기 신호, 주기 $N_4=N$

2.23 다음 신호의 우대칭 성분과 기대칭 성분을 구하라.

(a) $x(t)=at^2+bt+c$

Ans) $x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]=at^2+c$

$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]=bt$

(b) $x(t)=e^{at}u(t)$

Ans) $x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]=\frac{1}{2}(e^{a|t|}+\delta[t])$

$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]=\frac{1}{2}[e^{at}u(t)-e^{-at}u(-t)]$

(c) $x(t)=2\cos(\pi t-\frac{\pi}{4})$

Ans) $x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]=\cos(\pi t-\frac{\pi}{4})+\cos(\pi t+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\pi t)$

$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]=\cos(\pi t-\frac{\pi}{4})-\cos(\pi t+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\pi t)$

(d) $x(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Ans) $x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = 0$$

(e) $x[n] = u[n]$

Ans) $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\frac{1}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

(f) $x[n] = a^n u[n]$

Ans) $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) = \frac{1}{2}a^{|n|} + \frac{1}{2}\delta[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = \frac{1}{2}a^{|n|}\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\frac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

(g) $x[n] = e^{j\Omega n}$

Ans) $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) = \cos(\Omega n)$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = j\sin(\Omega n) = e^{j\frac{\pi}{2}}\sin(\Omega n)$$

(h) $x[n] = n^2(u[n] - u[n-5])$

Ans) $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) = \frac{1}{2}n^2(u[n+4] - u[n-5])$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = -\frac{1}{2}n^2(u[n+4] - u[n-1]) + \frac{1}{2}n^2(u[n] - u[n-5])$$

2.24 다음 신호가 어떤 대칭성을 만족하는지 판별하라.

(a) $x(t) = \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$

Ans) $x(t) = \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) = \frac{1}{2}[\cos((\omega_1 - \omega_2)t) - \cos((\omega_1 + \omega_2)t)]$

$x(t)$는 우대칭인 코사인 항들만 이루어져 있으므로 우대칭이다.

(b) $x(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$

Ans) $x(t)=\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)=\frac{1}{2}[\cos((\omega_1-\omega_2)t)+\cos((\omega_1+\omega_2)t)]$

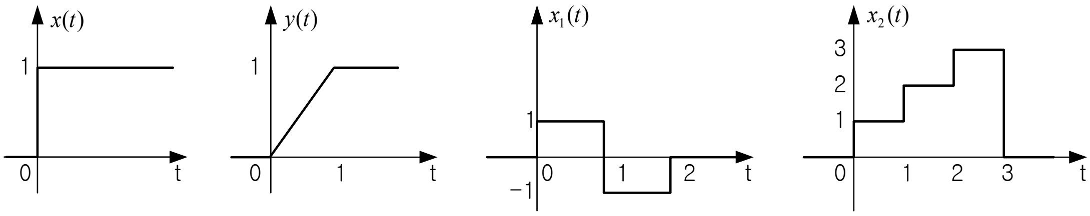
$x(t)$는 우대칭인 코사인 항들만 이루어져 있으므로 우대칭이다.

(c) $x(t)=\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$

Ans) $x(t)=\cos(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)=\frac{1}{2}[-\sin((\omega_1-\omega_2)t)+\sin((\omega_1+\omega_2)t)]$

$x(t)$는 기대칭인 사인 항들만 이루어져 있으므로 기대칭이다.

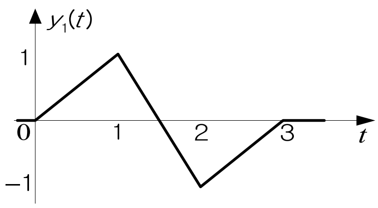
2.25 다음 그림의 신호 $x(t)$를 입력으로 넣으면 출력으로 신호 $y(t)$가 나오는 연속 LTI 시스템에 $x_1(t)$과 $x_2(t)$의 신호를 각각 입력으로 넣었을 때 출력을 구하라.



Ans) $y(t)=t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$

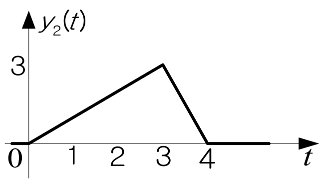
$x_1(t)=x(t)-2x(t-1)+x(t-2)$

$\therefore\ y_1(t)=y(t)-2y(t-1)+y(t-2)=tu(t)-3(t-1)u(t-1)+3(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)$

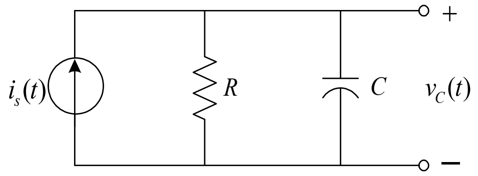


$x_2(t)=x(t)+x(t-1)+x(t-2)-3x(t-3)$

$\therefore\ y_2(t)=y(t)+y(t-1)+y(t-2)-3y(t-3)=tu(t)-4(t-3)u(t-3)+3(t-4)u(t-4)$



2.26 다음 그림의 전기회로의 입력은 전류원 $i_s(t)$, 출력은 커패시터 양단 전압 $v_C(t)$이다. 회로가 선형성, 시불변성, 인과성, 기억성, 가역성의 특성을 만족하는지 판별하라.



Ans) RC 병렬회로의 회로 방정식은

$$\frac{1}{R}v_C(t)+C\frac{dv_C(t)}{dt}=i_s(t) \quad \rightarrow \quad C\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{R}y(t)=x(t)$$

① 선형성 : 만족
② 시불변성 : 만족
③ 인과성 : 만족
④ 기억성 : 만족
⑤ 가역성 : 만족
주어진 식을 역으로 입력이 $y(t)$, 출력이 $x(t)$인 시스템으로 해석할 수 있다.
이 경우 역 시스템은 미분기와 승산기(증폭기)의 병렬 연결 시스템이다.

2.27 시스템 L_1의 뒤에 시스템 L_2가 종속으로 연결되어 있다. 각 시스템의 입출력 관계가 다음과 같을 때, 물음에 답하라.

L_1 : $y_1[n] = x_1[n] + 2x_1[n-2]$
L_2 : $y_2[n] = x_2[n-1] - 2x_2[n-3]$

(a) 전체 시스템의 입출력 관계를 구하라.
Ans) $x_2[n]=y_1[n]$이다. 따라서

$$y_2[n] = x_2[n-1] - 2x_2[n-3] = y_1[n-1]-2y_1[n-3] = x_1[n-1]-4x_1[n-5]$$

(b) 두 시스템의 연결 순서를 바꾸었을 때의 입출력 관계를 구하라. 입출력 관계는 변하였는가?
Ans) $x_1[n]=y_2[n]$이다. 따라서

$$y_1[n] = x_1[n] + 2x_1[n-2] = y_2[n]+2y_2[n-2] = x_2[n-1]-4x_2[n-5]$$

이 문제의 경우는 시스템의 연결 순서를 바꾸어도 전체 시스템의 입출력 관계는 같다.
($\because$ 시스템 L_1과 시스템 L_2가 모두 선형 시불변 시스템이기 때문이다.)

(c) (a), (b)의 시스템에 대한 선형성, 시불변성, 인과성을 판별하라.
Ans) (a)와 (b)의 시스템은 같은 시스템으로 입출력 관계가 다음과 같이 주어진다.

$$y[n]=x[n-1]-4x[n-5]$$

① 선형성 : 만족
② 시불변성 : 만족
③ 인과성 : 만족

2.28 입출력 관계가 다음과 같은 방정식으로 표현되는 연속 시스템에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 기억성, 가역성의 특성을 만족하는지 결정하라.

(a) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 만족

(b) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x^2(t)$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

예를 들어, $x(t)=tu(t)$와 $x(t)=-tu(t)$의 경우 모두 미분 방정식의 우변은 $x^2(t)=t^2u(t)$가 되어 같은 미분 방정식이 된다. 따라서 $y(t)$와 $x(t)$의 관계가 일대일 대응이 아니므로 비가역적이다.

(c) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=tx(t)$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$t=0$이면 $x(0)$의 값에 상관없이 항상 우변이 0이 된다. 즉 다대일 대응이 되므로 비가역적이다.

(d) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y^2(t)=x(t)$

Ans) ① 선형성 : 불만족

② 시불변성 : 만족

주어진 미분 방정식에 $t \rightarrow t-T$로 치환하면

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

2.29 입출력 관계가 다음과 같은 방정식으로 표현되는 이산 시스템에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 기억성, 가역성의 특성이 만족하는지 결정하라.

(a) $y[n] = x[n] + 3x[n-1] + 2x[n-2]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$y[n]=a$를 만족시킬 수 있는 $x[n],\ x[n-1],\ x[n-2]$의 조합은 많다. 따라서 일대일 대응 관계가 아니므로 비가역적이다.

(b) $y[n]+2y[n-1]=x[n]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 만족

③ 인과성 : 만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 만족

(c) $y[n]+y[n-1]=nx[n]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x[0]\neq 0$ & $x[n]=\dfrac{1}{n},\ n\geq 1$의 경우 $y[0]=0$ & $y[n]+y[n-1]=1$이 된다. 따라서 $y[1]=1,$ $y[2]=0,\ y[3]=1,\ y[4]=0,\ \cdots$가 되어 서로 다른 $x[n]$ 값이 0 또는 1에 다대일로 사상된다. 따라서 비가역적이다.

(d) $y[n]-2^n y[n-1]=x[n+1]$

Ans) ① 선형성 : 만족

② 시불변성 : 불만족

③ 인과성 : 불만족

④ 기억성 : 만족

⑤ 가역성 : 불만족

$x[n]=0,\ n\leq 0,\ x[1]=1,\ x[2]=-1,\ x[3]=-3,\ x[4]=-7$이면 $y[0]=1,\ y[1]=1,\ y[2]=1,\ y[3]=1$이 되어 입력 신호의 서로 다른 값들이 하나의 출력 값 1에 대응되어 일대일 대응 관계가 아니므로 비가역적이다.

2.30 2개의 시스템을 다음과 같이 연결하여 전체 시스템을 구성하였다. 다음 설명이 사실인지 아닌지를 판별하고 그 근거를 제시하라.

(a) 종속 연결

Ans)

① 한 시스템이 선형이고 다른 한 시스템이 비선형이면 전체 시스템은 선형이다.

∴ 거짓

② 한 시스템이 시불변이고 다른 한 시스템이 시변이면 전체 시스템은 시변이다.

∴ 참

③ 한 시스템이 인과적이고 다른 한 시스템이 비인과적이면 전체 시스템은 비인과적이다.

∴ 참

④ 한 시스템이 동적이고 다른 한 시스템이 순시적이면 전체 시스템은 순시적이다.
∴ 거짓

⑤ 한 시스템이 안정이고 다른 한 시스템이 불안정이면 전체 시스템은 안정이다.
∴ 거짓

(b) 병렬 연결

Ans)

① 한 시스템이 선형이고 다른 한 시스템이 비선형이면 전체 시스템은 선형이다.
∴ 거짓

② 한 시스템이 시불변이고 다른 한 시스템이 시변이면 전체 시스템은 시변이다.
∴ 참

③ 한 시스템이 인과적이고 다른 한 시스템이 비인과적이면 전체 시스템은 비인과적이다.
∴ 참

④ 한 시스템이 동적이고 다른 한 시스템이 순시적이면 전체 시스템은 순시적이다.
∴ 거짓

⑤ 한 시스템이 안정이고 다른 한 시스템이 불안정이면 전체 시스템은 안정이다.
∴ 거짓