제8장 연속 시간 푸리에 변환

[개념 문제]

8.1 푸리에 변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 램프 신호 $r(t)=tu(t)$의 푸리에 변환은 존재하지 않는다.

㉯ 푸리에 변환에 의해 얻어진 비주기 신호의 스펙트럼은 연속적이다.

㉰ $X(\omega)=\delta(\omega)$인 신호의 에너지는 유한하다.

㉱ 푸리에 변환은 (복소) 정현파를 변환의 기저 신호로 사용한 푸리에 급수와 바탕 개념이 동일하다.

Ans) ㉰

8.2 푸리에 변환에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 주기 신호를 푸리에 변환한 것과 푸리에 급수 전개한 결과는 동일하다.

㉯ 비주기 신호 $x(t)$의 푸리에 변환과 $x(t)$를 반복해 만든 주기 신호의 푸리에 변환은 아무런 관련이 없다.

㉰ 주기 신호를 푸리에 변환하여 얻은 스펙트럼에는 푸리에 급수 전개하여 얻은 스펙트럼보다 더 많은 주파수 성분이 포함되어 있다.

㉱ 주기 신호의 푸리에 급수 전개에 의한 스펙트럼과 푸리에 변환에 의한 스펙트럼은 모두 이산 함수이다.

Ans) ㉱

주기 신호의 푸리에 급수는 스칼라값의 선스펙트럼이지만, 푸리에 변환하면 스펙트럼이 임펄스 함수로 구성된다.

8.3 신호의 푸리에 변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 전력 신호의 푸리에 변환은 푸리에 변환의 정의식(적분식)으로 직접 계산할 수 있다.

㉯ 임펄스는 모든 주파수 성분을 갖는 신호로서 위상 스펙트럼이 0이다.

㉰ 부호 함수는 전력 신호이지만 스펙트럼에는 임펄스가 나타나지 않는다.

㉱ 임펄스 열의 푸리에 변환 역시 임펄스 열이 된다.

Ans) ㉮

8.4 다음의 신호 중에서 푸리에 변환이 존재하는 것을 모두 골라라.

㉮ $x(t)=|t|$ ㉯ $x(t)=tu(t)$ ㉰ $x(t)=\dfrac{1}{t}$ ㉱ $x(t)=e^{-2|t|}$ ㉲ $x(t)=t^2e^{-2t}u(t)$

Ans) ㉱ ㉲

8.5 다음의 푸리에 변환쌍 중 틀린 것은?

㉮ $2\sin(\pi t)\cos(\pi t) \Leftrightarrow j\pi(\delta(\omega+2\pi)-\delta(\omega-2\pi))$

㉯ $\mathrm{rect}((t-4)/4) \Leftrightarrow 4e^{-j4\omega}\mathrm{sinc}(\dfrac{2\omega}{\pi})$

㉰ $e^{-2t}u(t)*u(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{-\omega^2+j2\omega}$

㉱ $2\pi\,\mathrm{sinc}(t)\cos(\pi t) \Leftrightarrow \mathrm{rect}(\omega/2\pi)*\pi(\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega+\pi))$

※ 교재에 ㉮의 $j2\pi(\delta(\omega+2\pi)-\delta(\omega-2\pi))$는 미스프린트임(2가 빠져야 맞음)

㉣의 $\pi \mathrm{sinc}(t)\cos(\pi t)$는 미스프린트임($2\pi$가 되어야 맞음)

Ans) ㉰

시간 컨벌루션 성질에 의해 $e^{-2t}u(t) * u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega+2}(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))$이다.

㉮는 변조, ㉯는 시간 이동과 시간 척도조절 성질, ㉣는 주파수 컨벌루션 성질을 적용한 결과이다.

8.6 푸리에 변환의 대칭성에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $x(t)=e^{-2t}u(t)$의 푸리에 변환은 $Re\{X(\omega)\}+jIm\{X(\omega)\}=Re\{X(-\omega)\}-jIm\{X(-\omega)\}$을 만족한다.

㉯ 우대칭 실수 신호의 위상 스펙트럼은 0 또는 $\pm\pi$ 값만 나타난다.

㉰ $X(\omega)=\begin{cases} j2\pi\omega, & -0 \le |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$인 신호 $x(t)$는 기대칭 실수 신호이다.

㉣ 실수 신호의 스펙트럼이 ω_0에서 π의 위상을 가지면, $-\omega_0$에서도 위상이 π이다.

Ans) ㉣

실수 신호의 위상 스펙트럼은 기대칭을 만족하므로 $-\omega_0$에서 위상은 $-\pi$이다.

8.7 푸리에 변환의 성질에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ $x(t)$가 대역 제한 신호일 때, $x(2t)$는 $x(t)$보다 더 많은 주파수 성분을 포함한다.

㉯ $x(t)$의 스펙트럼이 $X(\omega)$일 때, $x(t-3)$의 스펙트럼은 $3X(\omega)$이다.

㉰ 음성 녹음테이프를 빨리 돌리면 목소리가 다르게 들리는 것은 스펙트럼 변화와 상관이 없다.

㉣ 위상 스펙트럼이 0인 신호 $x(t)$를 시간 지연한 $x(t-2)$의 위상 스펙트럼이 $\omega=\pi$에서 -2π라면 $\omega=2\pi$에서 -3π가 된다.

Ans) ㉮

8.8 푸리에 변환의 성질에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $x(t)*\delta(t-3)$의 푸리에 변환은 위상 스펙트럼만 바뀐다.

㉯ $x(t)$의 푸리에 변환이 $\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi})$일 때 $\frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}^2(\frac{t}{\pi})$의 푸리에 변환은 $x(-\omega)$이다.

㉰ $x(t)=y(t)$이면 $|X(\omega)|^2=|Y(\omega)|^2$이다.

㉣ $|X(\omega)|^2=|Y(\omega)|^2$이면 두 신호 $x(t)$와 $y(t)$는 같은 신호이다.

Ans) ㉣

㉮는 $x(t)*\delta(t-3)=x(t-3)$이므로 시간 이동 성질에 의해 위상만 바뀐다. ㉯는 시간-주파수 쌍대성에 의한 결과이다.

8.9 주파수 응답에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 시스템의 주파수 응답은 임펄스 응답이 주어져야만 구할 수 있다.

㉯ 주파수 응답은 입력의 푸리에 변환과 출력의 푸리에 변환의 비 $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$로 정의되므로, 입력이 정현파에서 계단 신호로 달라지면 시스템의 주파수 응답도 달라진다.

㉰ 두 시스템을 종속 연결한 순서를 바꾸면 주파수 응답도 달라진다.

㉣ 시스템 $H_1(\omega)$에 시스템 $H_2(\omega)$를 부(-)궤환 연결한 시스템의 전체 주파수 응답은 $\frac{H_1(\omega)}{1+H_1(\omega)H_2(\omega)}$이다.

Ans) ㉣

8.10 주파수 응답에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 같은 시스템을 나타내는 주파수 응답과 미분 방정식의 계수는 밀접한 관련이 있다.

㉯ 입력 신호의 위상 스펙트럼이 $\omega=2$일 때 -0.5π이고 시스템의 주파수 응답이 $\frac{1}{2+j\omega}$라면, 출력 신호의 위상 스펙트럼은 $\omega=2$에서 -0.125π이다.

㉰ 입력 신호의 진폭 스펙트럼이 $\omega=1$일 때 $\sqrt{5}$이고 시스템의 주파수 응답이 $\frac{1}{2+j\omega}$라면, 출력 신호의 진폭 스펙트럼은 $\omega=1$에서 1이다.

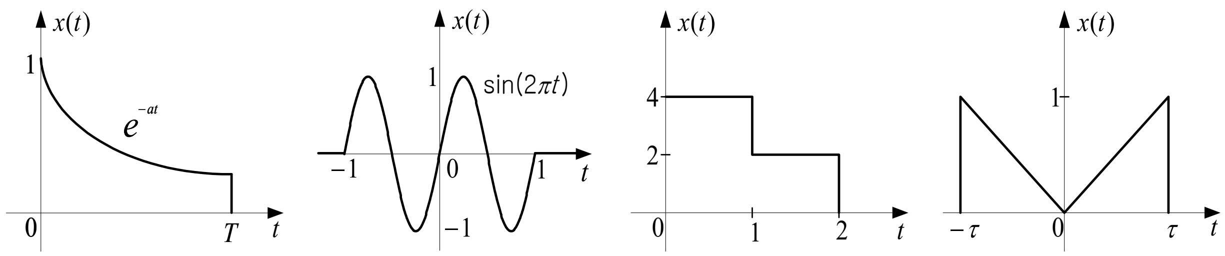
㉱ 주파수 응답과 임펄스 응답의 스펙트럼은 일치한다.

Ans) ㉯

㉯에서 $\omega=2$에서 위상 응답 값은 $-\tan^{-1}\frac{2}{2}=-\frac{\pi}{4}$이므로 출력 신호의 위상 스펙트럼 값은 -0.75π이다.

[기초 문제]

8.11 다음 그림의 신호 $x(t)$의 푸리에 변환을 구하라.



(a) (b) (c) (d)

Ans) 푸리에 변환의 정의식으로부터

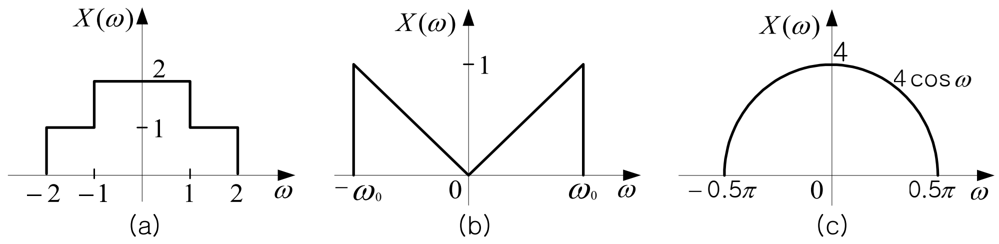
(a) $X(\omega)=\int_0^T e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\dfrac{1-e^{-(a+j\omega)T}}{a+j\omega}$

(b) $X(\omega)=\int_{-1}^{1}\sin(2\pi t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{j2}(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t})e^{-j\omega t}dt=j\sin(\omega)\dfrac{4\pi}{4\pi^2-\omega^2}$

(c) $X(\omega)=4\int_0^1 e^{-j\omega t}dt+2\int_1^2 e^{-j\omega t}dt=\dfrac{4-2(e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})}{j\omega}$

(d) $X(\omega)=\int_{-\tau}^{0}\left(-\dfrac{1}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}dt+\int_0^{\tau}\dfrac{1}{\tau}t\,e^{-j\omega t}dt=\dfrac{1-j\tau\omega}{\tau\omega^2}(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau})$

8.12 다음 그림의 스펙트럼 $X(\omega)$를 푸리에 역변환하여 신호 $x(t)$를 구하라.



Ans)

(a) 푸리에 역변환의 정의식으로부터

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 2e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t}(\sin(2t) + \sin(t))$$

(b) 푸리에 역변환의 정의식으로부터

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{0} (-\frac{1}{\omega_0}\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_0} (\frac{1}{\omega_0}\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi\omega_0 t^2}(\cos(\omega_0 t) + t\sin(\omega_0 t) - 1)$$

(c) 푸리에 역변환의 정의식으로부터

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) e^{j\omega t} d\omega = \left[\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}(t+1)\right) + \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)\right]$$

8.13 다음 신호에 대해 푸리에 변환의 정의를 이용하여 구하고, 부록의 푸리에 변환쌍표와 [표 8-1]의 푸리에 변환의 성질을 이용하여 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = u(t) - u(t-5)$

Ans)

(i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_0^5 e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j5\omega})$$

(ii) 푸리에 변환쌍표와 푸리에 변환의 성질을 이용

푸리에 변환의 선형성과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X(\omega) = U(\omega) - U(\omega)e^{-j5\omega} = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)(1 - e^{-j5\omega}) = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j5\omega})$$

$$\because\ \pi\delta(\omega)(1 - e^{-j5\omega}) = 0$$

(b) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)]$

Ans)

(i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_0^5 e^{-(2+j\omega)t} dt = \frac{1 - e^{-5(2+j\omega)}}{2 + j\omega}$$

(ii) 푸리에 변환쌍 표와 푸리에 변환의 성질을 이용

$v(t) = e^{-2t}u(t)$라 두면 $x(t) = v(t) - e^{-10}v(t-5)$

푸리에 변환의 선형성과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X(\omega) = V(\omega) - e^{-10}V(\omega)e^{-j5\omega} = \frac{1}{j\omega + 2}(1 - e^{-5(j\omega+2)})$$

(c) $x(t)=t[u(t)-u(t-5)]$

Ans)

(i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_0^5 te^{-j\omega t}dt = \frac{1}{\omega^2}(e^{-j5\omega}(1+j5\omega)-1)$$

(ii) 푸리에 변환쌍 표와 푸리에 변환의 성질을 이용

$v(t)=u(t)-u(t-5)$라 두면 푸리에 변환의 주파수 미분 성질에 의해

$$x(t)=t\,v(t) \Leftrightarrow j\frac{d\,V(\omega)}{d\omega}$$

$$\therefore\ X(\omega) = j\frac{d\,V(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2}(e^{-j5\omega}-1)+j\frac{5}{\omega}e^{-j5\omega} = \frac{1}{\omega^2}(e^{-j5\omega}(1+j5\omega)-1)$$

(d) $x(t)=\sin(2\pi t)[u(t+1)-u(t-1)]$

Ans)

(i) 푸리에 변환의 정의를 이용

$$X(\omega) = \int_{-1}^1 \frac{e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}}{2j}e^{-j\omega t}dt = -j\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}-2)+j\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}+2)$$

(ii) 푸리에 변환쌍 표와 푸리에 변환의 성질을 이용

$s(t)=\sin(2\pi t)$, $v(t)=u(t+1)-u(t-1)$라 두면 $x(t)=s(t)v(t)$

푸리에 변환의 주파수 컨벌루션 성질을 이용하여

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}S(\omega) * V(\omega) = \frac{1}{2\pi}(j\pi[\delta(\omega+2\pi)-\delta(\omega-2\pi)]) * \left(\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega}-e^{-j\omega})\right)$$

$$= j\left[\frac{1}{(\omega+2\pi)}\sin(\omega+2\pi)-\frac{1}{(\omega-2\pi)}\sin(\omega-2\pi)\right] = j\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}+2)-j\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}-2)$$

8.14 푸리에 변환의 성질을 이용하여 다음 신호에 대한 푸리에 변환 $X(\omega)$를 구하라.

(a) $x(t)=e^{-2|t|}$

Ans) $x(t)$를 다시 쓰면 $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{2t}u(-t)$

시간 반전 성질과 선형성을 이용하면

$$X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{2-j\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

(b) $x(t)=\frac{d}{dt}(e^{-2|t|})$

Ans) $v(t)=e^{-2|t|}$라 두면 $x(t)=\frac{d}{dt}(v(t))$이다. 미분 성질을 이용하면

$$X(\omega) = (j\omega)V(\omega) = (j\omega)\frac{4}{4+\omega^2} = \frac{j4\omega}{4+\omega^2}$$

(c) $x(t)=\frac{d}{dt}(te^{-2t}u(t))$

Ans) $s(t)=e^{-2t}u(t)$, $v(t)=te^{-2t}u(t)$라 두면 $x(t)=\frac{d}{dt}(v(t))$이다.

주파수 미분 성질과 시간 미분 성질을 차례로 적용하면

$$X(\omega) = (j\omega)V(\omega) = (j\omega)j\frac{dS(\omega)}{d\omega} = \frac{j\omega}{(2+j\omega)^2}$$

(d) $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$

Ans) $x(t)$는 $\sin(\omega_0 t)$와 $u(t)$의 곱이므로 주파수 컨벌루션 성질을 적용하면

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}[j\pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0))] * (\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)) = j\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)] - \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

(e) $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$

Ans) $x(t) = \mathrm{sinc}(t) \cdot \mathrm{sinc}(t)$로 쓸 수 있다. 주파수 컨벌루션 성질을 이용하면

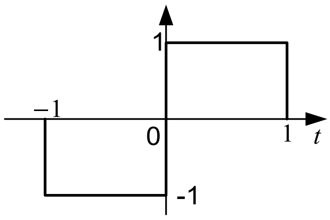
$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}(\omega/2\pi) * \mathrm{rect}(\omega/2\pi) = \mathrm{tri}(\omega/2\pi)$$

(f) $x(t) = \mathrm{sinc}(t) * \mathrm{sinc}(t)$

Ans) 시간 컨벌루션 성질을 이용하면

$$X(\omega) = \mathrm{rect}(\omega/2\pi) \cdot \mathrm{rect}(\omega/2\pi) = \mathrm{rect}(\omega/2\pi)$$

8.15 다음 그림의 신호 $x(t)$의 푸리에 변환을 다음과 같이 구하라.



(a) 푸리에 변환의 정의식을 이용

Ans) 푸리에 변환의 정의식을 이용하여 푸리에 변환을 구하면 다음과 같다.

$$X(\omega)t = \int_{-1}^{0}(-1)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{1}1\,e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{j\omega}(1-\cos(\omega))$$

(b) 시간 이동 성질을 이용한 방법

Ans) $x(t) = -u(t+1) + 2u(t) - u(t-1)$

계단 신호에 대한 푸리에 변환쌍과 시간 이동 성질을 이용하면

$$X(\omega) = -e^{j\omega}\left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\} + 2\left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\} - e^{-j\omega}\left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\}$$

$$= -\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2) = \frac{2}{j\omega}(1-\cos(\omega))$$

(c) 시간 미분과 시간 이동 성질을 이용한 방법

Ans) $x(t)$를 한번 미분하면 $x'(t) = -\delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1)$

임펄스 신호에 대한 푸리에 변환쌍과 시간 미분 및 시간 이동 성질을 이용하면

$$X'(\omega) = -e^{j\omega} + 2 - e^{-j\omega} = 2(1-\cos(\omega))$$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}X'(\omega) = \frac{2}{j\omega}(1-\cos(\omega))$$

(d) 시간 컨벌루션 및 시간 이동 성질을 이용

Ans) $x(t) = \mathrm{rect}(t) * (\delta(t-\frac{1}{2}) - \delta(t+\frac{1}{2}))$

시간 컨벌루션 및 시간 이동 성질을 이용하면

$$X(\omega) = \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})(e^{-j\frac{1}{2}\omega} - e^{j\frac{1}{2}\omega}) = 2\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}(-j2\sin(\frac{\omega}{2})) = \frac{2}{j\omega}(1-\cos(\omega))$$

8.16 신호 $x(t)$의 푸리에 변환이 $X(\omega) = \mathrm{rect}((\omega-1)/2)$일 때, 다음에 대한 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(-t)$

Ans) $y(t) = x(-t)$라 두면, 푸리에 변환의 시간 반전 성질을 이용하면

$$Y(\omega) = X(-\omega) = \mathrm{rect}((-\omega-1)/2) = \mathrm{rect}((\omega+1)/2)$$

(b) $tx(2t)$

Ans) $y(t) = tx(2t)$라 두면, 푸리에 변환의 시간 척도조절 및 주파수 미분 성질을 이용하여

$$Y(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2}X(\frac{\omega}{a})\right) = j\frac{1}{4}(\delta(\omega) - \delta(\omega-4))$$

(c) $(t-1)x(t+1)$

Ans) $v(t) = tx(t)$라 두면 $y(t) = (t-1)x(t+1) = (t+1)x(t+1) - 2x(t+1) = v(t+1) - 2x(t+1)$

푸리에 변환의 주파수 미분 및 시간 이동 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= V(\omega)e^{j\omega} - 2X(\omega)e^{j\omega} = je^{j\omega}\frac{dX(\omega)}{d\omega} - 2X(\omega)e^{j\omega} \\ &= e^{j\omega}[j(\delta(\omega) - \delta(\omega-2)) - 2\mathrm{rect}((\omega-1)/2)] \end{aligned}$$

(d) $x(-2t+4)$

Ans) $y(t) = x(-2t+4) = x(-2(t-2))$라 두면 $y(t)$는 $x(t)$에 대해 시간 반전, 시간 척도조절($a=2$)과 시간 이동($t_0 = 2$)을 한 것이므로 이에 대한 푸리에 변환의 성질을 이용하면

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X\left(\frac{1}{2}(-\omega)\right)e^{-j2\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rect}((\frac{1}{2}(-\omega)-1)/2)e^{-j2\omega} = \frac{1}{2}e^{-j2\omega}\mathrm{rect}((\omega+2)/4)$$

(e) $x^2(t)$

Ans) $y(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$라 두면, 푸리에 변환의 주파수 컨벌루션 성질을 이용하여

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{tri}((\omega-2)/2)$$

(f) $x(t)\cos(2t)$

Ans) $y(t) = x(t)\cos(2t)$라 두면, 푸리에 변환의 변조 성질을 이용하여

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2}[\mathrm{rect}((\omega+1)/2) + \mathrm{rect}((\omega-3)/2)]$$

(g) $x(t) * \delta(t-2)$

Ans) $y(t) = x(t) * \delta(t-2)$라 두면, 푸리에 변환의 시간 컨벌루션 및 시간 이동 성질을 이용하여

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j2\omega} = e^{-j2\omega}\mathrm{rect}((\omega-1)/2)$$

(h) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

Ans) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$라 두면, 푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하여

$$Y(\omega)=(j\omega)X(\omega)=(j\omega)\mathrm{rect}((\omega-1)/2)$$

(i) $t\dfrac{dx(t)}{dt}$

Ans) $v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$라 두면 $y(t)=t\dfrac{dx(t)}{dt}$이므로, 푸리에 변환의 시간 미분 및 주파수 미분 성질을 이용하여

$$\begin{aligned}Y(\omega)&=j\frac{dV(\omega)}{d\omega}=j\frac{d(j\omega)X(\omega)}{d\omega}=-X(\omega)-\omega\frac{dX(\omega)}{d\omega}\\&=-\mathrm{rect}((\omega-1)/2)-\omega(\delta(\omega)-\delta(\omega-2))=-\mathrm{rect}((\omega-1)/2)+2\delta(\omega-2))\end{aligned}$$

(j) $x(2t-1)e^{-j2t}$

Ans) $v(t)=x(2t-1)=x(2(t-\frac{1}{2}))$, $y(t)=v(t)e^{-j2t}$라 두면, 푸리에 변환의 시간 척도조절과 시간 이동 및 주파수 이동 성질을 이용하여

$$V(\omega)=\frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2})e^{-j\frac{\omega}{2}}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}\mathrm{rect}((\omega-2)/4)$$

$$Y(\omega)=V(\omega+2)=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega+2}{2}}\mathrm{rect}(\omega/4)$$

8.17 푸리에 변환이 다음과 같을 때, 각 경우에 해당하는 신호 $x(t)$를 구하라.

(a) $X(\omega)=2(\cos(2\omega))\left(\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right)\right)$

Ans) $\cos(2\omega)=\dfrac{e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}}{2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}[\delta(t+2)+\delta(t-2)]$

$\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{t}{2})$

푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질을 이용하면

$$x(t)=[\delta(t+2)+\delta(t-2)]*\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{t}{2})=\frac{1}{2}[\mathrm{rect}(\frac{t+2}{2})+\mathrm{rect}(\frac{t-2}{2})]$$

(b) $X(\omega)=e^{-a|\omega|}$, $a>0$

Ans) $e^{-a|t|}$, $a>0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

푸리에 변환의 시간-주파수 쌍대성으로부터

$$X(\omega)=e^{-a|-\omega|},\ a>0\ \Leftrightarrow\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{2a}{a^2+t^2}=\frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$$

(c) $X(\omega)=\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega-2\pi}{\pi}\right)+\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega+2\pi}{\pi}\right)$

Ans) 푸리에 변환쌍표와 주파수 이동 성질로부터

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{t}{2})(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) = \mathrm{rect}(\frac{t}{2})\cos(2\pi t)$$

(d) $X(\omega) = j[u(-\omega) - u(\omega)]$

Ans) $X(\omega) = j[u(-\omega) - u(\omega)] = j\,\mathrm{sgn}(-\omega)$

푸리에 변환쌍표와 시간-주파수 쌍대성으로부터

$$\frac{2}{jt} \Leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\therefore\ x(t) = j\frac{1}{2\pi}\frac{2}{jt} = \frac{1}{\pi t}$$

(e) $X(\omega) = j\omega[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$

Ans) $X(\omega) = (j\omega)\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2})$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하여

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi})\right) = \frac{2}{\pi}\frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} = \frac{2}{\pi t}(\cos(t) - \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}))$$

(f) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + e^{-j\omega}\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi})$

Ans) $2\pi\delta(\omega) \Leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$

$\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle\left(\frac{1}{2}t\right)$

푸리에 변환의 시간 이동 성질에 의해

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\triangle\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)$$

(g) $X(\omega) = \begin{cases} 2\cos(\omega), & |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$

Ans) $X(\omega) = 2\cos(\omega)\mathrm{rect}(\omega/2\pi)$

$2\cos(\omega) = e^{j\omega} + e^{-j\omega} \Leftrightarrow \delta(t+1) + \delta(t-1)$

푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$x(t) = (\delta(t+1) + \delta(t-1)) * \mathrm{sinc}(t)$$

$$\therefore\ x(t) = \mathrm{sinc}(t+1) + \mathrm{sinc}(t-1) = \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$$

(h) $X(\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$

Ans) $X(\omega) = (j\omega)\mathrm{rect}(\omega/2)$

$V(\omega) = \mathrm{rect}(\omega/2)$라고 하면, 푸리에 변환의 시간 미분 성질에 의해

$$v(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t}$$

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow (j\omega)V(\omega) = X(\omega)$$

$$\therefore\ x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{\pi t}\cos(t) - \frac{1}{\pi t^2}\sin(t)$$

8.18 파스발의 정리를 이용하여 다음과 같은 신호 $x(t)$의 에너지를 구하라.

(a) $x(t)=e^{-at}u(t)$

Ans) $X(\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{1}{a\pi}\tan^{-1}(\frac{\omega}{a})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

(b) $x(t)=\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)$

Ans) $X(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}(\dfrac{t}{\pi})\right\}*\mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}(\dfrac{t}{\pi})\right\}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{rect}(\dfrac{\omega}{2})*\mathrm{rect}(\dfrac{\omega}{2})=\pi\,\mathrm{tri}(\dfrac{\omega}{2})$

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi^2\mathrm{tri}^2(\frac{\omega}{2})d\omega=\frac{2\pi}{3}$$

(c) $x(t)=2\,\mathrm{tri}(t/2)$

Ans) $x(t)=2\,\mathrm{tri}(t/2)=\mathrm{rect}(t/2)*\mathrm{rect}(t/2)$이므로

$$X(\omega)=\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t/2)*\mathrm{rect}(t/2)\}=\left(2\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\right)^2=4\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi})$$

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}16\mathrm{sinc}^4(\frac{\omega}{\pi})d\omega \quad \cdots \quad ①$$

그런데 (b)에서 구한 $x(t)=Sa^2(t)=\mathrm{sinc}^2(\dfrac{t}{\pi})$의 에너지를 다시 쓰면

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^4(\frac{t}{\pi})dt=\frac{2\pi}{3}$$

이 적분 결과를 에너지 계산식 ①에 대입하면

$$E=\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^4(\frac{\omega}{\pi})d\omega=\frac{8}{\pi}\frac{2\pi}{3}=\frac{16}{3}$$

(d) $x(t)=\dfrac{2a}{a^2+t^2}$

Ans) $x(t)$의 푸리에 변환은 시간-주파수 쌍대성을 이용하여 구할 수 있다. $x(t)$에 $t\rightarrow-\omega$를 대입하면

$$x(-\omega)=\frac{1}{a^2+\omega^2}=\left(\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

시간-주파수 쌍대성에 의해 $2\pi x(-\omega)\Leftrightarrow X(t)$이므로 $2\pi x(-\omega)$를 역변환하여 다음을 얻는다.

$$X(t)=2\pi(e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t))=2\pi e^{-a|t|}$$

$X(t)$에 $t\rightarrow\omega$를 대입하면

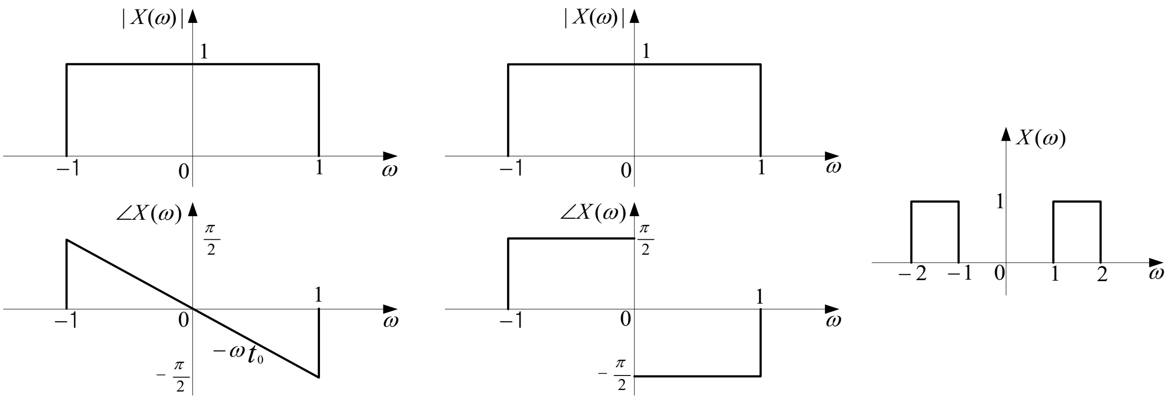
$$\therefore\ X(\omega)=2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$\therefore\ E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega=2\pi\int_0^{\infty}e^{-2a\omega}d\omega=\frac{2\pi}{a}$$

8.19 다음 그림과 같은 스펙트럼 $X(\omega)$에 대한 푸리에 역변환을 다음의 두 방법으로 구하라.

(1) 정의식을 이용하라.

(2) 푸리에 변환의 성질을 이용하라.



(a) (b) (c)

Ans)

(a) (1) 정의식을 이용

$$X(\omega)=\begin{cases}1e^{-j\omega t_0}, & -1\le\omega\le 1\\ 0, & \text{그 외}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{\pi(t-\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}-\frac{1}{2})$$

(2) 푸리에 변환의 성질을 이용

$$X(\omega)=\text{rect}(\omega/2)e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$$

푸리에 변환쌍 $\text{rect}(\omega/2)\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi})$과 시간 이동 성질을 이용하여

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\text{sinc}(\frac{t-\pi/2}{\pi})=\frac{1}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}-\frac{1}{2})$$

(b) (1) 정의식을 이용

$$X(\omega)=\begin{cases}1e^{j\frac{\pi}{2}}, & -1\le\omega\le 0\\ 1e^{-j\frac{\pi}{2}}, & 0\le\omega\le 1\\ 0, & \text{그 외}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0}je^{j\omega t}d\omega+\int_{0}^{1}-je^{j\omega t}d\omega\right]=\frac{1}{2\pi t}(2-e^{jt}-e^{-jt})=\frac{1-\cos(t)}{\pi t}$$

(2) 푸리에 변환의 성질을 이용

$$X(\omega)=\text{rect}(\omega+\frac{1}{2})e^{j\frac{\pi}{2}}+\text{rect}(\omega-\frac{1}{2})e^{-j\frac{\pi}{2}}=j(\text{rect}(\omega+\frac{1}{2})-\text{rect}(\omega-\frac{1}{2}))$$

푸리에 변환쌍 $\pi\text{rect}(\frac{\omega}{2\tau})\Leftrightarrow\tau\text{sinc}(\frac{\tau t}{\pi})$과 주파수 이동 성질을 이용하여

$$x(t)=j\frac{1}{2\pi}\left(\text{sinc}(\frac{t}{2\pi})e^{-j\frac{t}{2}}-\text{sinc}(\frac{t}{2\pi})e^{j\frac{t}{2}}\right)=j\frac{1}{\pi t}\sin(\frac{t}{2})(e^{-j\frac{t}{2}}-e^{j\frac{t}{2}})=\frac{1}{\pi t}(1-\cos(t))$$

(c) (1) 정의식을 이용

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1}e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi t}(\sin(2t)-\sin(t))$$

(2) 푸리에 변환의 성질을 이용

$$X(\omega) = \mathrm{rect}(\omega + \frac{3}{2}) + \mathrm{rect}(\omega - \frac{3}{2})$$

푸리에 변환쌍 $\mathrm{rect}(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})$과 주파수 이동 성질을 이용하여

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})e^{-j\frac{3}{2}t} + \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})e^{j\frac{3}{2}t}\right) = \frac{1}{\pi t}\sin(\frac{1}{2}t)(e^{j\frac{3}{2}t} + e^{-j\frac{3}{2}t}) = \frac{1}{\pi t}(\sin(2t) - \sin(t))$$

8.20 LTI 시스템의 입력 $x(t)$와 출력 $y(t)$가 다음과 같을 때, 시스템의 주파수 응답과 임펄스 응답, 그리고 시스템 표현 미분 방정식을 구하라.

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(t) = e^{-t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$\therefore \; H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\frac{1}{1+j\omega}}{\frac{1}{2+j\omega}} = \frac{2+j\omega}{1+j\omega}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega} = 1 + \frac{1}{1+j\omega}$$

$$\therefore \; h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

주파수 응답으로부터

$$(1 + j\omega)Y(\omega) = (2 + j\omega)X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

(b) $x(t) = 3e^{-2t}u(t), \quad y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega) = \frac{3}{2 + j\omega}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{3+j\omega} = \frac{1}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$\therefore \; H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{3(3+j\omega)} = \frac{1}{9 + 3(j\omega)}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

주파수 응답으로부터

$$(9+3(j\omega))Y(\omega)=X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$3\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=x(t)$$

(c) $x(t)=e^{-2t}u(t),\quad y(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{2}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}=\frac{3+j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\therefore\ H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{3+j\omega}{1+j\omega}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(\omega)=\frac{3+j\omega}{1+j\omega}=1+\frac{2}{1+j\omega}$$

$$\therefore\ h(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

주파수 응답으로부터

$$(1+j\omega)Y(\omega)=(3+j\omega)X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

(d) $x(t)=6e^{-t}u(t),\quad y(t)=(e^{-t}+3e^{-3t}-4e^{-4t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega)=\frac{6}{1+j\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{3}{3+j\omega}-\frac{4}{4+j\omega}=\frac{6(2+j\omega)}{(1+j\omega)(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

$$\therefore\ H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{j\omega+2}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(\omega)=\frac{j\omega+2}{(3+j\omega)(4+j\omega)}=\frac{2}{4+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

$$\therefore\ h(t)=(2e^{-4t}-e^{-3t})u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+7(j\omega)+12}$$

$$((j\omega)^2+7(j\omega)+12)Y(\omega)=(j\omega+2)X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

(e) $x(t)=e^{-2t}u(t),\ y(t)=2te^{-2t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{2}{(2+j\omega)^2}$$

$$\therefore\ H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{2}{2+j\omega}$$

(2) 임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}=2e^{-2t}u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

주파수 응답으로부터

$$(2+j\omega)Y(\omega)=2X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$$

(f) $x(t)=e^{-2t}u(t),\ y(t)=(e^{-t}-e^{-2t}+2te^{-2t})u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}+\frac{2}{(2+j\omega)^2}=\frac{4+3(j\omega)}{(1+j\omega)(2+j\omega)^2}$$

$$\therefore\ H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{4+3(j\omega)}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(\omega)=\frac{4+3(j\omega)}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{2}{2+j\omega}$$

$$\therefore\ h(t)=(e^{-t}+2e^{-2t})u(t)$$

(3) 시스템 미분 방정식

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{4+3(j\omega)}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}$$

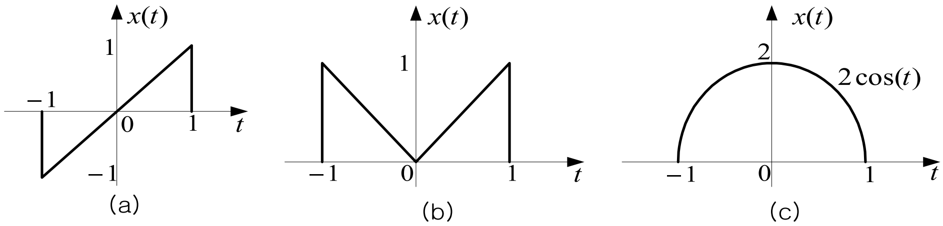
$$((j\omega)^2+3(j\omega)+2)Y(\omega)=(3(j\omega)+4)X(\omega)$$

푸리에 변환의 시간 미분 성질을 이용하면

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

[응용 문제]

8.21 다음 그림의 신호 $x(t)$의 푸리에 변환을 푸리에 변환의 성질을 이용하여 구하라.



(a)

Ans) $x(t) = t \cdot \mathrm{rect}(t/2)$

주파수 미분 성질을 이용하여

$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(2\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\right) = j2\frac{\omega\cos(\omega) - \sin(\omega)}{\omega^2}$$

(b)

Ans) $\dfrac{dx(t)}{dt} = [\delta(t+1) - \delta(t-1)] + [-\mathrm{rect}(t+\frac{1}{2}) + \mathrm{rect}(t-\frac{1}{2})] = x_1(t) + x_2(t)$

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = -\delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1)$

선형성과 시간 미분 성질을 이용하면

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}X_1(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^2}X_2(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega) + \frac{2}{\omega^2}(\cos(\omega) - 1)$$

(c)

Ans) $x(t) = 2\cos(t) \cdot \mathrm{rect}(t/2)$

변조 성질을 이용하면

$$X(\omega) = 2(\mathrm{sinc}(\frac{\omega+1}{\pi}) + \mathrm{sinc}(\frac{\omega-1}{\pi}))$$

8.22 푸리에 변환의 시간-주파수 쌍대성 성질을 이용하여 다음 신호 $x(t)$의 푸리에 변환을 구하라.

(a) $x(t) = \delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)$

Ans) $x(-\omega) = \delta(-\omega+t_0) + \delta(-\omega-t_0) = \delta(\omega+t_0) + \delta(\omega-t_0)$

시간-주파수 쌍대성에 의해 $2\pi x(-\omega) \Leftrightarrow X(t)$이므로 $2\pi x(-\omega)$를 역변환하여 다음을 얻는다.

$$X(t) = 2\cos(t_0 t)$$

$X(t)$에 $t \to \omega$를 대입하면

$$X(\omega) = 2\cos(t_0\omega)$$

(b) $x(t) = \dfrac{1}{1+jt}$

Ans) $x(-\omega) = \dfrac{1}{1-j\omega}$

시간-주파수 쌍대성에 의해 $2\pi x(-\omega) \Leftrightarrow X(t)$이므로 $2\pi x(-\omega)$를 역변환하여 다음을 얻는다.

$$X(t) = 2\pi e^t u(-t)$$

$X(t)$에 $t \to \omega$를 대입하면

$$X(\omega) = 2\pi e^{\omega} u(-\omega)$$

(c) $x(t) = \dfrac{2a}{a+t^2}$

Ans) $x(-\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-j\omega} + \dfrac{1}{1+j\omega}\right)$

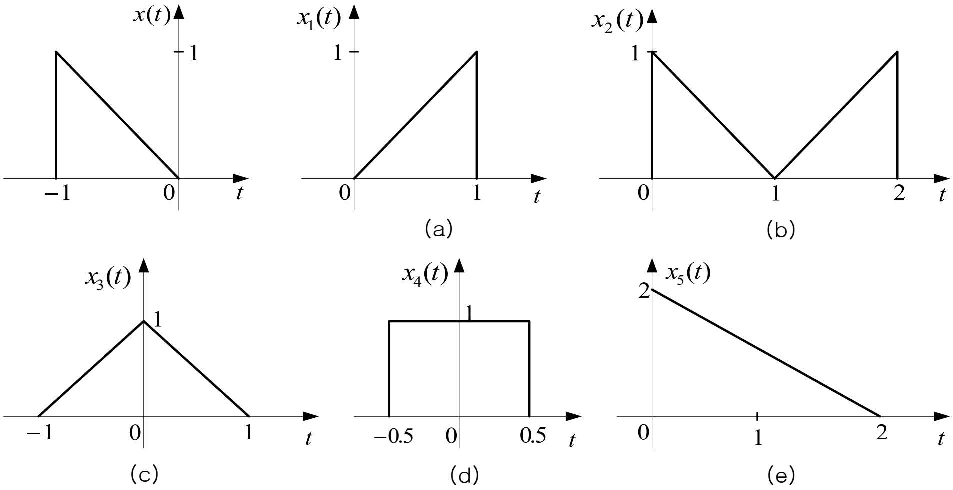
시간-주파수 쌍대성에 의해 $2\pi x(-\omega) \Leftrightarrow X(t)$이므로 $2\pi x(-\omega)$를 역변환하여 다음을 얻는다.

$$X(t) = \pi(e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)) = \pi e^{-|t|}$$

$X(t)$에 $t \to \omega$를 대입하면

$$X(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

8.23 다음 그림의 $x(t)$의 푸리에 변환이 $X(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1)$로 주어졌다. 푸리에 변환의 성질을 이용하여 나머지 신호의 푸리에 변환을 구하라.



(a) (b) (c) (d) (e)

Ans)

(a) $x_1(t) = x(-t)$이므로 시간 반전 성질을 이용하여

$$X_1(\omega) = X(-\omega) = \frac{1}{\omega^2}[e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1]$$

(b) $x_2(t) = x(t-1) + x_1(t-1)$이므로 시간 반전과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X_2(\omega) = [X(\omega) + X(-\omega)]e^{-j\omega} = \left[\frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1) + \frac{1}{\omega^2}(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1)\right]e^{-j\omega}$$

$$= \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2}[\cos(\omega) + \omega\sin(\omega) - 1]$$

(c) $x_3(t) = x(t-1) + x_1(t+1)$이므로 시간 반전과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X_3(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega} + X(-\omega)e^{j\omega} = \frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1)e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}(e^{-j\omega} + j\omega e^{-j\omega} - 1)e^{j\omega}$$

$$= \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

(d) $x_4(t)=x(t-\frac{1}{2})+x_1(t+\frac{1}{2})$이므로 시간 반전과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X_3(\omega)=X(\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}}+X(-\omega)e^{j\frac{\omega}{2}}=\frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega}-j\omega e^{j\omega}-1)e^{-j\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{\omega^2}(e^{-j\omega}+j\omega e^{-j\omega}-1)e^{j\frac{\omega}{2}}$$
$$=\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$$

(e) $x_5(t)=x(\frac{1}{2}(t-2))$이므로 시간 척도조절과 시간 이동 성질을 이용하여

$$X_5(\omega)=2X(2\omega)e^{-j2\omega}=2\frac{e^{-j2\omega}}{4\omega^2}(e^{j2\omega}-j2\omega e^{j2\omega}-1)=\frac{1}{2\omega^2}(1-j2\omega-e^{-j2\omega})$$

8.24 다음 물음에 답하라.

(a) $X(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$에 대해 푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질을 이용하여 역변환 $x(t)$를 구하라.

Ans) $X(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}=\frac{1}{(a+j\omega)}\frac{1}{(a+j\omega)}$

푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질을 이용하여

$$x(t)=e^{-at}u(t)*e^{-at}u(t)=e^{-at}\int_0^t d\tau=te^{-at}u(t)$$

(b) 푸리에 변환의 주파수 미분 성질을 이용하여 $X(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^N}$의 역변환을 구하는 일반식을 구하라.

Ans) $V(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)}$라 두고 $V(\omega)$에 대해 반복적으로 미분해 가면

$$\frac{dV(\omega)}{d\omega}=(-1)(j)(a+j\omega)^{-2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{N-1}V(\omega)}{d\omega^{N-1}}=(-1)(-2)\cdots(-(N-1))(j)^{N-1}(a+j\omega)^{-N}=(N-1)!(-j)^{N-1}(a+j\omega)^{-N}$$

$$\therefore\ X(\omega)=\frac{1}{(N-1)!(-j)^{N-1}}\frac{d^{N-1}V(\omega)}{d\omega^{N-1}}$$

따라서 주파수 미분 성질에 의해

$$x(t)=\frac{1}{(N-1)!(-j)^{N-1}}(-j)^{N-1}t^{N-1}v(t)=\frac{1}{(N-1)!}t^{N-1}e^{-at}u(t)$$

8.25 다음은 푸리에 변환 $X(\omega)$가 가질 수 있는 속성들을 나열한 것이다.

(1) $X(\omega)$는 실수　　(2) $X(\omega)$는 허수　　(3) $X(\omega)$는 주기 함수

(4) $X(0)=0$　　(5) $\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega=0$　　(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\omega)d\omega=0$

(7) $-\infty<\omega<\infty$ 구간에서 $X(\omega)$ 제곱 적분 가능

(8) $\tau\neq 0$ 인 실수에 대하여 $e^{j\omega\tau}X(\omega)$는 허수 함수

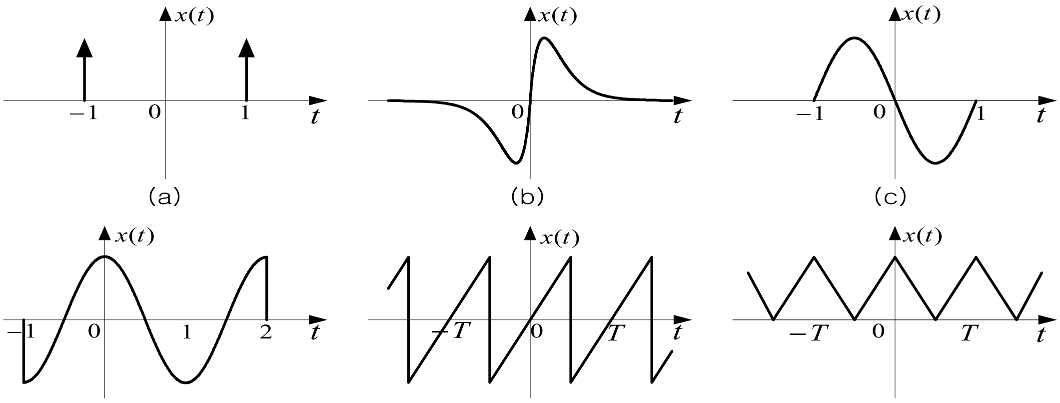
위의 주파수 영역에서의 각 속성들에 대해 시간 영역에서의 등가 속성들이 무엇인지 결정하고, 다음 신호 중에서 어느 것이 그 속성에 해당하는가를 밝혀라.

(a) $x(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1)$ (b) $x(t) = te^{-a|t|},\ a > 0$

(c) $x(t) = [\sin(\pi t)][u(t+1) - u(t-1)]$ (d) $x(t) = [\cos(\pi t)][u(t+1) - u(t-2)]$

(e) 주기 T의 톱니파(기함수) (f) 주기 T의 삼각파(우함수)

Ans) 성질을 만족하는지 쉽게 확인하기 위하여 먼저 주어진 신호들의 파형을 그리면 다음과 같다.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

(1) $X(\omega)$는 실수 $\Leftrightarrow$ $x(t)$는 실수 우함수 (푸리에 변환의 대칭성)

→ (a), (f)

(2) $X(\omega)$는 허수 $\Leftrightarrow$ $x(t)$는 실수 기함수 (푸리에 변환의 대칭성)

→ (b), (c), (e)

(3) $X(\omega)$는 주기 함수 $\Leftrightarrow$ $x(t)$는 이산 함수

→ 해당 사항 없음

(4) $X(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$ ($\because\ X(0) = X(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$)

→ (b), (c), (d), (e)

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 0 \Leftrightarrow x(0) = 0$ ($\because\ x(0) = x(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$)

→ (a), (b), (c), (e)

(6) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega = 0 \Leftrightarrow \dot{x}(0) = 0$ ($\because\ \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Big|_{t=0} = j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\omega)d\omega$)

→ (a), (d)

(7) $-\infty < \omega < \infty$ 구간에서 $X(\omega)$는 제곱 적분 가능 $\Leftrightarrow$ $x(t)$는 에너지 신호 (파스발 정리)

→ (b), (c), (d)

(8) $\tau \neq 0$인 실수에 대하여 $e^{j\omega\tau}X(\omega)$는 허수 함수 $\Leftrightarrow$ $x(t+\tau)$가 실수 기함수 (푸리에 변환의 대칭성)

($e^{j\omega\tau}X(\omega) \Leftrightarrow x(t+\tau)$)

→ (d)($\tau = 0.5$) , (e)($\tau = T$), (f)($\tau = 0.5T$)

8.26 임펄스 응답 $h(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{2t}{\pi})$인 시스템에 입력 $x(t)=e^{-at}u(t)$를 인가할 때 출력의 에너지가 입력의 에너지의 반이 되는 a 값을 구하라.

Ans) 입력 신호의 에너지는

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_0^{\infty}e^{-2at}dt=-\frac{1}{2a}e^{-2at}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

$$H(\omega)=\mathrm{rect}(\omega/4)=u(\omega+2)-u(\omega-2)$$

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{1}{j\omega+a}\mathrm{rect}(\omega/4)$$

$$E_y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{1}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\tan^{-1}(\frac{2}{a})}\frac{1}{a^2\sec^2(v)}a\sec^2(v)dv=\frac{1}{\pi}\frac{1}{a}v\Big|_0^{\tan^{-1}(\frac{2}{a})}=\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}(\frac{2}{a})$$

출력의 에너지가 입력 에너지의 반이 되어야 하므로

$$\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}(\frac{2}{a})=\frac{1}{4a}\quad\rightarrow\quad\frac{2}{a}=\tan(\frac{\pi}{4})=1$$

$\therefore\ a=2$

8.27 시스템의 주파수 응답과 입력의 스펙트럼이 다음과 같을 때, 입력 신호 에너지의 75%가 시스템 출력으로 나오도록 $\frac{T_1}{T}$비를 구하라.

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T},\quad X(\omega)=\frac{1}{1+j\omega T_1}$$

Ans) $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)\quad\rightarrow\quad|Y(\omega)|=|H(\omega)||X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T_1^2}}$

에너지 계산을 위한 적분에는 다음의 관계를 이용하면 된다.

$$\int\frac{a}{1+(ax)^2}dx=\tan^{-1}(ax)$$

입력 신호의 에너지는 파스발 정리에 의해

$$E_x=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2T_1^2}d\omega=\frac{1}{\pi T_1}\int_0^{\infty}\frac{T_1}{1+(T_1\omega)^2}d\omega=\frac{1}{2T_1}$$

출력 신호의 에너지의 계산을 위한 적분을 수행하려면 $|Y(\omega)|^2$을 합의 꼴로 바꾸어야 한다.

$$|Y(\omega)|^2=\frac{a}{1+(T\omega)^2}+\frac{b}{1+(T_1\omega)^2}=\frac{a(1+(T_1\omega)^2)+b(1+(T\omega)^2}{(1+(T\omega)^2)(1+(T_1\omega)^2)}$$

$$\therefore\begin{cases}T_1^2a+T^2b=0\\a+b=1\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}a=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{T_1}{T}\right)^2}\\[2ex]b=\dfrac{-\left(\dfrac{T_1}{T}\right)^2}{1-\left(\dfrac{T_1}{T}\right)^2}\end{cases}$$

출력 신호의 에너지는 파스발 정리로부터 다음과 같이 계산된다.

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{a}{T}\frac{T}{1+(T\omega)^2}+\frac{b}{T_1}\frac{T_1}{1+(T_1\omega)^2}\right)d\omega = \frac{a}{2T}+\frac{b}{2T_1} = \frac{1}{2(T+T_1)}$$

그런데 출력 신호의 에너지가 입력 신호 에너지의 75%가 되어야 하므로

$$\frac{1}{2(T+T_1)} = \frac{3}{4}\frac{1}{2T_1} \quad \rightarrow \quad \therefore \ \frac{T_1}{T}=3$$

8.28 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$와 입력 $x(t)$가 다음과 같을 때, 시스템의 주파수 응답과 출력을 구하라.

(a) $h(t)=e^{-2t}u(t),\quad x(t)=e^{-3t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\frac{1}{2+j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$X(\omega)=\frac{1}{3+j\omega}$$

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\frac{1}{3+j\omega}=\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

$\therefore \ y(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$

(b) $h(t)=2e^{-2t}u(t),\quad x(t)=3e^{-t}u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\frac{2}{2+j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$X(\omega)=\frac{3}{1+j\omega}$$

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{2}{2+j\omega}\frac{3}{1+j\omega}=\frac{6}{1+j\omega}-\frac{6}{2+j\omega}$$

$\therefore \ y(t)=6(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

(c) $h(t)=2\mathrm{sinc}(2t),\quad x(t)=\mathrm{sinc}(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathrm{rect}(\omega/4\pi)$$

(2) 시스템 출력

$$X(\omega)=\mathrm{rect}(\omega/2\pi)$$

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\mathrm{rect}(\omega/4\pi)\mathrm{rect}(\omega/2\pi)=\mathrm{rect}(\omega/2\pi)$$

$\therefore \ y(t)=\mathrm{sinc}(t)$

(d) $h(t)=e^{-at}u(t),\ a>0,\quad x(t)=u(t)$

Ans) (1) 주파수 응답

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\frac{1}{a+j\omega}$$

(2) 시스템 출력

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a+j\omega} + \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)\right]$$

$$\therefore\ y(t) = \frac{1}{a}(-e^{-at}u(t) + u(t)) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

8.29 다음의 미분 방정식으로 표현되는 인과 LTI 시스템에 대해 물음에 답하라.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

(a) 시스템의 주파수 응답 $H(\omega)$를 구하라.

Ans) 주어진 미분 방정식을 푸리에 변환하여 정리하면

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2]\,Y(\omega) = [(j\omega) - 1]X(\omega)$$

$$\therefore\ H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{(j\omega)-1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

(b) 임펄스 응답 $h(t)$를 구하라.

Ans) $H(\omega) = \dfrac{3}{j\omega+2} - \dfrac{2}{j\omega+1}$

$$\therefore\ h(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$$

(c) 시스템의 계단 응답 $y(t)$를 구하라.

Ans) $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \dfrac{(j\omega)-1}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}\left(\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \dfrac{2}{j\omega+1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{j\omega+2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$

$$\therefore\ y(t) = (2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2})u(t)$$

8.30 $x(t)\cos(\omega_0 t)$로부터 신호 $x(t)$를 복구하는 과정을 복조라고 한다. 신호 $x(t)\cos(\omega_0 t)$에 $2\cos(\omega_0 t)$를 곱하고 대역폭이 W인 저역 통과 필터를 통과시켜 복조될 수 있음을 보여라. 이때 $W < \omega_0$로 가정한다.

Ans) $x_1(t) = 2x(t)(\cos(\omega_0 t))(\cos(\omega_0 t)) = 2x(t)\cos^2(\omega_0 t) = x(t)(1+\cos(2\omega_0 t)) = x(t) + x(t)\cos(2\omega_0 t)$

$x_1(t)$의 푸리에 스펙트럼을 구하면

$$X_1(\omega) = X(\omega) + X(\omega) * (\pi[\delta(\omega+2\omega_0) + \delta(\omega-2\omega_0)] = X(\omega) + \pi X(\omega+2\omega_0) + \pi X(\omega+2\omega_0)$$

대역폭이 W인 저역 통과 필터에 $x_1(t)$를 통과시키면 $X_1(\omega)$에서 $X(\omega \pm 2\omega_0)$ 성분은 필터의 통과 대역 바깥에 위치하므로 제거되고, $X(\omega)$만 남게 된다.

따라서 $x(t)$를 필터의 출력으로 얻게 되어 신호 $x(t)$를 복조할 수 있다.