제6장 이산 시스템의 시간 영역 해석

[개념 문제]

6.1 이산 LTI 시스템의 차분 방정식 표현에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 이산 LTI 시스템을 나타낸 차분 방정식은 입력 (지연) 항과 출력 (지연)항이 곱해진 항을 포함할 수도 있다.

㉯ 이산 LTI 시스템을 나타낸 차분 방정식의 계수는 시간 함수가 될 수도 있다.

㉰ IIR 시스템을 유한개의 항을 갖는 차분 방정식으로 나타내려면 자기 회귀항이 꼭 필요하다.

㉱ FIR 시스템의 차분 방정식은 항상 입력의 시간 지연항만으로 구성된다.

Ans) ㉰

FIR 시스템은 이동 평균(MA) 항만으로 이루어진 차분 방정식을 자기 회귀(AR) 항을 포함하는 순환 구조로 바꿀 수 있다.

6.2 차분 방정식에 대한 다음의 설명 중에서 틀린 것은?

㉮ 차분 방정식은 컴퓨터를 이용하여 수치 해석적으로 풀기에 매우 적합한 형태이다.

㉯ 차분 방정식의 구현에 필요한 시간 지연기의 최소 개수는 차분 방정식을 구성하는 출력 항과 입력 항의 개수를 더한 것과 같다.

㉰ $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n+1]$은 비인과 선형 시불변 시스템을 나타낸다.

㉱ 이동 평균(MA) 모델 차분 방정식은 출력 항과 관련한 초기 조건이 필요 없다.

Ans) ㉯

6.3 이산 시스템의 직접형 구현에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 제2 직접형과 전치 제2 직접형은 서로 쌍대 관계이다.

㉯ 이동 평균(MA) 시스템의 제1 직접형 구현도와 제2 직접형 구현도는 같은 그림이다.

㉰ ARMA 시스템의 제1 직접형 구현은 제2 직접형에 비해 시간 지연기가 더 많이 필요하다.

㉱ 제1 직접형 구현도의 입력과 출력을 바꾸고 신호의 흐름을 반대로 하면 제2 직접형 구현도가 얻어진다.

Ans) ㉱

이동 평균 시스템은 출력 회귀 항이 없으므로 제1 직접형 구현도와 제2 직접형 구현도가 같아진다.

6.4 차분 방정식의 반복 대입법 풀이에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 이산 LTI 시스템을 표현한 어떤 차분 방정식도 반복 대입법으로 풀 수 있다.

㉯ 반복 대입법으로 해를 구할 때, $y[10]$ 값을 구하지 않고서도 $y[20]$ 값을 구할 수 있다.

㉰ 반복 대입법은 입력이 인가되기 전의 초기 조건으로부터 입력 인가 후의 초기 조건을 구하는 데 유용하게 사용할 수 있다.

㉱ 반복 대입법은 항상 $y[n]=3(0.5)^n+2(-0.8)^n+1$과 같은 꼴로 해를 얻을 수 있다.

Ans) ㉰

반복 대입법은 앞의 값이 구해지지 않으면 뒤의 값을 계산할 수가 없다. 또한 일반적으로 닫힌 꼴의 해를 제공하지 않기 때문에, 출력의 초기 몇몇 값 또는 경향을 파악하거나 하는 간단한 응용에 주로 활용한다.

6.5 차분 방정식의 해법에 대한 다음의 설명 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉮ 완전해에서 초기 조건이 0이면 동차해 성분도 0이 된다.

㉯ 입력 $x[n]=a^n$인 경우 특이해를 항상 $y_p[n]=a^n$으로 둘 수 있는 것은 아니다.

㉰ 입력 인가 전의 초기 조건을 완전해에 대입해 구한 동차해 성분과 같은 초기 조건을 특성 방정식으로부터 구해진 동차해에 바로 대입하여 구한 결과는 같다.

㉱ 강제 응답만 따로 차분 방정식에 대입하면 차분 방정식이 0이 된다. 즉 좌변과 우변이 같아진다.

Ans) ㉯, ㉱

완전해에 초기 조건 0을 대입하게 되면 영상태 응답이 얻어지는데, 영상태 응답에는 시스템 모드 항도 포함되어 있으므로 일반적으로 동차해가 0이 되지 않는다.

6.6 다음 중 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 시스템 모드가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

㉮ $(2)^n$ ㉯ $(3)^{-n}$ ㉰ $(2n)^n$ ㉱ $(-0.5+j0.8)^n$

㉲ $0.8^n e^{j\pi n}$ ㉳ $n^2(2)^n$ ㉴ e^{2n} ㉵ $(\frac{1}{n+1})^n$

Ans) ㉰, ㉵

시스템 모드는 γ^n 꼴이 기본이며, 특성근이 다중근이면 시스템 모드가 $n^m\gamma^n$, $n^{m-1}\gamma^n$, $n\gamma^n$, γ^n로 된다.

6.7 차분 방정식의 고전적 해법에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 동차해보다 특이해를 먼저 구해도 아무런 문제가 없다.

㉯ 입력의 꼴에 따라 동차해의 꼴도 달라진다.

㉰ 초기 조건에 따라 특이해도 달라진다.

㉱ 완전해에 대입할 초기 조건은 반드시 $n=0$ 이후 값을 써야 한다.

Ans) ㉱

입력이 시스템 모드와 같은 꼴이라면 특이해를 그 시스템 모드의 다중근 형태로 생각하고 꼴을 선정해야 하므로 일단 동차해를 먼저 구하는 것이 맞다.

6.8 다음 중 $y[n]+4y[n-1]+5y[n-2]+2y[n-3]=x[n-1]$, $x[n]=(0.5)^n$의 해에 포함되지 않는 항을 모두 골라라.

㉮ $(-1)^n$ ㉯ $n(-1)^n$ ㉰ $n^2(-1)^n$ ㉱ $(-2)^n$

㉲ $n(-2)^n$ ㉳ $n^2(-2)^n$ ㉴ $(0.5)^n$ ㉵ $n(0.5)^n$

Ans) ㉰, ㉲, ㉳, ㉵

특성방정식이 $(\gamma+1)^2(\gamma+2)=0$이므로, 시스템 모드는 $(-1)^n$, $n(-1)^n$, $(-2)^n$이다. 또한 특이해는 $(0.5)^n$ 꼴이 된다.

6.9 다음 중에서 임펄스 응답이 $h[n]=(n+1)(u[n+1]-u[n-5])$인 이산 시스템이 만족하지 않는 성질을 모두 골라라.

㉮ 인과 시스템 ㉯ 불안정 시스템 ㉰ 동적 시스템 ㉱ IIR 시스템

Ans) ㉯, ㉱

6.10 이산 LTI 시스템의 차분 방정식 표현에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 임펄스 응답과 고유 응답은 그 형태가 같다.

㉯ 특성근이 $\gamma=-2\pm j1$인 시스템은 안정한 시스템이다.

㉰ 초기 조건이 달라지면 고유 응답과 강제 응답이 모두 달라진다.

㉣ 시스템 모드가 $(-0.8)^n$, $n(-0.8)^n$, $n^2(-0.8)^n$인 시스템은 불안정하다.

Ans) ㉮

시스템 모드가 $(-0.8)^n$, $n(-0.8)^n$, $n^2(-0.8)^n$인 시스템은 3중 특성근 $\gamma=-0.8$을 가지므로 안정하다.

[기초 문제]

6.11 임펄스 응답이 $h[n]=(-0.5)^n u[n]+(0.5)^n u[n]$으로 주어지는 2차 이산 LTI 시스템의 차분 방정식 표현을 구하라.

Ans) 특성 방정식을 구하면

$$(\gamma+0.5)(\gamma-0.5)=\gamma^2-0.25$$

따라서 차분 방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$y[n]-0.25y[n-2]=ax[n]+bx[n-1]+cx[n-2]$$

$$\therefore\ h[n]=0.25h[n-2]+a\delta[n]+b\delta[n-1]+c\delta[n-2]$$

문제에 주어진 임펄스 응답으로부터 $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$를 구해 위의 차분 방정식에 대입하여 정리하면

$$\therefore\ y[n]-0.25y[n-2]=2x[n]$$

6.12 $x[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots]$와 같은 이산 신호를 피보나치[Fibonacci] 수열이라고 한다. 피보나치 수열 $x[n]$이 다음의 차분 방정식으로 표현될 수 있음을 보이고, a_0와 a_1을 구하라.

$$x[n+2]+a_1x[n+1]+a_0x[n]=\delta[n+2],\quad x[-2]=x[-1]=0$$

Ans) $x[n]+a_1x[n-1]+a_0x[n-2]=\delta[n]$

좌변에 $x[n]$만 남기고 정리하면

$$x[n]=-a_1x[n-1]-a_0x[n-2]+\delta[n]$$

$n=0$부터 1씩 증가하여 Fibonacci 수열의 값들을 대입하면,

$$\begin{aligned}
n=0\ &:\ x[0]=-a_1x[-1]-a_0x[-2]+\delta[0]=0+0+1=1\\
n=1\ &:\ x[1]=-a_1x[0]-a_0x[-1]+\delta[1]=-a_1+0+0=1\\
n=2\ &:\ x[2]=-a_1x[1]-a_0x[0]+\delta[2]=-a_1-a_0+0=2\\
n=3\ &:\ x[3]=-a_1x[2]-a_0x[1]+\delta[3]=-2a_1-a_0+0=3\\
n=4\ &:\ x[4]=-a_1x[3]-a_0x[2]+\delta[4]=-3a_1-2a_0+0=5\\
n=5\ &:\ x[5]=-a_1x[4]-a_0x[3]+\delta[5]=-5a_1-3a_0+0=8\\
n=6\ &:\ x[6]=-a_1x[5]-a_0x[4]+\delta[6]=-8a_1-5a_0+0=13\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$n\ge 2$인 경우에 얻어진 방정식들은 바로 앞에서 얻어진 두 방정식을 더한 결과이다. 따라서 일차 독립인 방정식은 단 2개뿐이며, 미지수가 2개에 일차 독립인 방정식이 2개이므로 유일한 해를 구할 수 있다.

$$\begin{cases}-a_1=1\\ -a_1-a_0=2\end{cases}\ \rightarrow\ \therefore\ \begin{cases}a_0=-1\\ a_1=-1\end{cases}$$

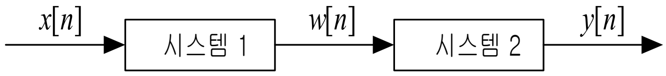
따라서 Fibonacci 수열은 다음의 차분 방정식으로 표현된다.

$$x[n+2]-x[n+1]-x[n]=\delta[n+2]\ \text{또는}\ x[n]-x[n-1]-x[n-2]=\delta[n],\quad \text{단}\ x[-2]=x[-1]=0$$

6.13. 다음에 주어진 두 개의 이산 시스템이 그림과 같이 종속 연결되어 있다.

시스템 1 : $w[n+1]=x[n]$

시스템 2 : $y[n+1]+2y[n]=w[n]$



(a) 전체 시스템에 대한 입출력 차분 방정식을 구하여라.

Ans) $w[n]=x[n-1]$이 되고, 이를 시스템 2의 차분 방정식에 대입하면

$$y[n+1]+2y[n]=x[n-1] \qquad \rightarrow \qquad y[n]+2y[n-1]=x[n-2]$$

(b) 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $h[n]=c(-2)^n$

$$h[n]+2h[n-1]=\delta[n-2]=\begin{cases}0, & n=0\\ 0, & n=1\\ 1, & n=2\\ 0, & n>2\end{cases}$$

$$\therefore\ h[n]=\frac{1}{4}(-2)^n$$

(c) $y[0]=1$, $y[1]=-2$, $x[n]=6,\ n\geq 0$일 때, 출력 $y[n]$을 구하라.

Ans) $y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c(-2)^n+2,\quad n\geq 2$

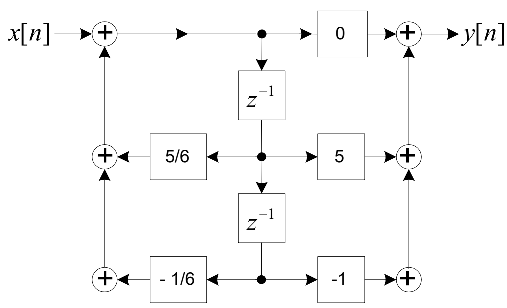
$$\therefore\ y[n]=2(-2)^n+2,\quad n\geq 2$$

6.14 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템에 대해 (ⅰ)제 2직접형 및 전치 제2 직접형 구현도를 그리고 (ⅱ) 시스템의 안정도를 판정하라.

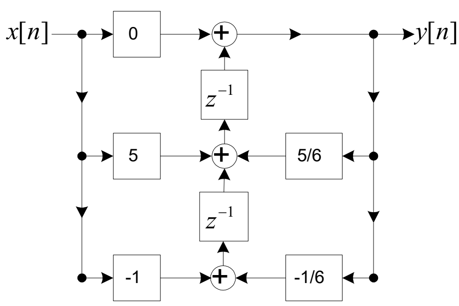
(a) $y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=5x[n-1]-x[n-2]$

Ans) $\gamma^2-\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{6}=(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma-\frac{1}{3})=0 \quad\rightarrow\quad \therefore\ \gamma=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

2개의 특성근이 모두 단위원 안에 존재하므로 안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형

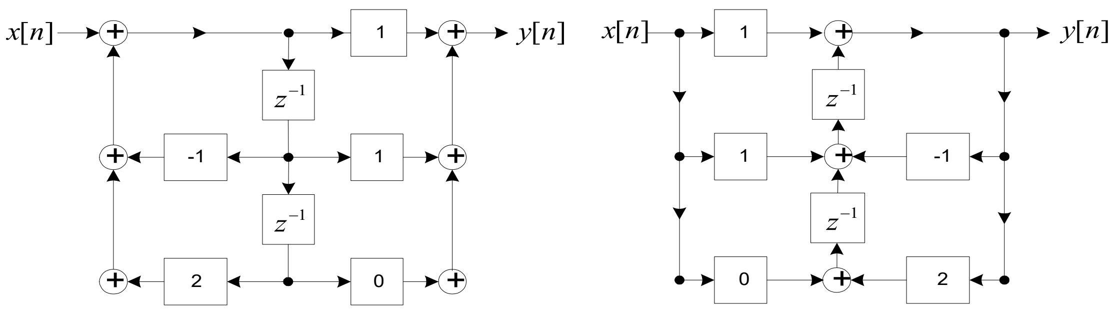


(b) 전치 제2 직접형

(b) $y[n]+y[n-1]-2y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

Ans) $\gamma^2+\gamma-2=(\gamma-1)(\gamma+2)=0 \quad\rightarrow\quad \therefore\ \gamma=1,\ \gamma=-2$

특성근이 단위원 밖에 존재하므로 이 시스템은 불안정하다.

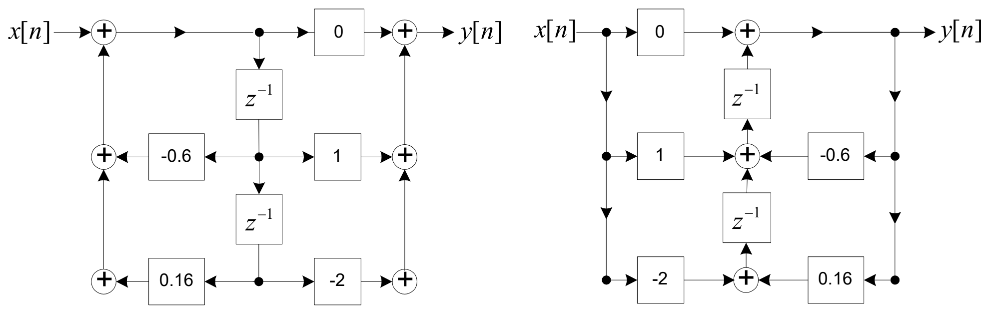


(a) 2 (b) 2

(c) $y[n]+0.6y[n-1]-0.16y[n-2]=x[n-1]-2x[n-2]$

Ans) $(\gamma^2+0.6\gamma-0.16)=(\gamma+0.8)(\gamma-0.2)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=-0.8,\ 0.2$

2개의 특성근이 모두 단위원 안에 존재하므로 안정의 경우이다.

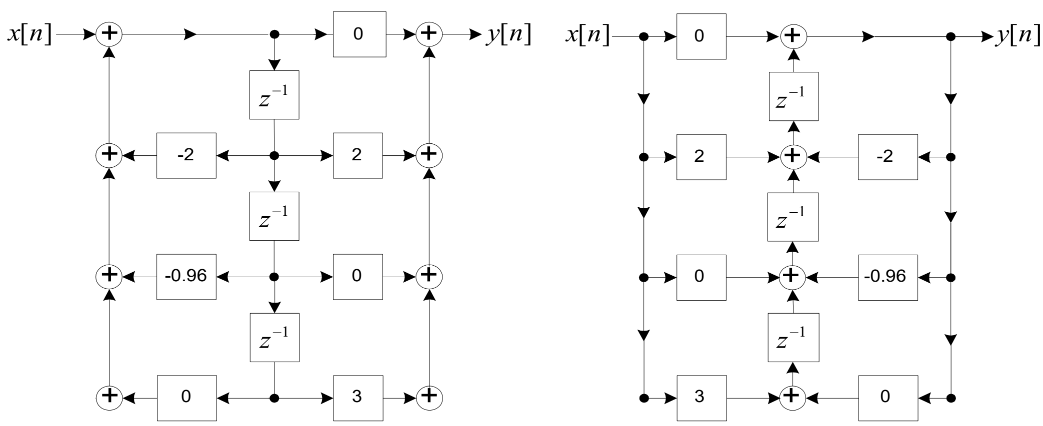


(a) 제2 직접형 (b) 전치 제2 직접형

(d) $y[n]+2y[n-1]+0.96y[n-2]=2x[n-1]+3x[n-3]$

Ans) $(\gamma^2+2\gamma+0.96)=(\gamma+0.8)(\gamma+1.2)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=-0.8,\ -1.2$

1개의 특성근$(\gamma=-1.2)$이 단위원 밖에 존재하므로 불안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형 (b) 전치 제2 직접형

6.15 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 임펄스 응답을 (ⅰ)반복 대입법과 (ⅱ)고전적 해법으로 각각 구하라.

(a) $y[n]+2y[n-1]=x[n]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$\begin{aligned} h[0] &= -2h[-1] + \delta[0] = 1 \\ h[1] &= -2h[0] + \delta[1] = -2(1) = -2 \\ h[2] &= -2h[1] + \delta[2] = -2(-2) = 4 \\ h[3] &= -2h[2] + \delta[3] = -2(4) = -8 \\ &\vdots \\ h[k] &= -2h[k-1] + \delta[k] = (-2)^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\therefore\ h[n] = (-2)^n u[n]$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma + 2 = 0 \quad \rightarrow \ \therefore\ \gamma = -2$$

$$h[n] = c(-2)^n$$

$$\therefore\ h[n] = (-2)^n u[n]$$

(b) $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + x[n-1]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\begin{aligned} h[0] &= -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = 1 \\ h[1] &= -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2(1) + 1 = -1 = 2(-2)^{-1} \\ h[2] &= -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2 = 2(-2)^0 \\ h[3] &= -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -4 = 2(-2)^1 \\ h[4] &= -2h[3] + \delta[4] + \delta[3] = -2(-4) = 8 = 2(-2)^2 \\ h[5] &= -2h[4] + \delta[5] + \delta[4] = -2(8) = -16 = 2(-2)^3 \\ &\vdots \\ h[k] &= -2h[k-1] + \delta[k] + \delta[k-1] = 2(-2)^{k-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\therefore\ h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2(-2)^{n-2} = \dfrac{1}{2}(-2)^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

(ii) 고전적 해법

$$h[n] = c(-2)^n$$

$$\therefore\ h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{2}(-2)^n, & n \geq 1' \end{cases}$$

(c) $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n-1]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n]=-3h[n-1]-2h[n-2]+\delta[n-1]$$
$$h[0]=-3h[-1]-2h[-2]+\delta[-1]=0$$
$$h[1]=-3h[0]-2h[-1]+\delta[0]=1=(-1)^1-(-2)^1$$
$$h[2]=-3h[1]-2h[0]+\delta[1]=-3=(-1)^2-(-2)^2$$
$$h[3]=-3h[2]-2h[1]+\delta[2]=7=(-1)^3-(-2)^3$$
$$h[4]=-3h[3]-2h[2]+\delta[3]=-15=(-1)^4-(-2)^4$$
$$\vdots$$
$$h[k]=-3h[k-1]-2h[k-2]+\delta[k-1]=(-1)^k-(-2)^k$$
$$\vdots$$

$$\therefore\ h[n]=(-1)^n-(-2)^n$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma^2+3\gamma+2=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=-1,\ -2$$
$$h[n]=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

$$\therefore\ h[n]=(-1)^n-(-2)^n$$

(d) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n]=-3h[n-1]-2h[n-2]+\delta[n]+\delta[n-1]$$
$$h[0]=-3h[-1]-2h[-2]+\delta[0]+\delta[-1]=1$$
$$h[1]=-3h[0]-2h[-1]+\delta[1]+\delta[0]=-2=(-2)^1$$
$$h[2]=-3h[1]-2h[0]+\delta[2]+\delta[1]=4=(-2)^2$$
$$h[3]=-3h[2]-2h[1]+\delta[3]+\delta[2]=-8=(-2)^3$$
$$\vdots$$
$$h[k]=-3h[k-1]-2h[k-2]+\delta[k]+\delta[k-1]=(-2)^k$$
$$\vdots$$

$$\therefore\ h[n]=(-2)^n$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma^2+3\gamma+2=0 \quad \rightarrow \quad \gamma=-1,\ -2$$
$$h[n]=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

$$\therefore\ h[n]=(-2)^n u[n]$$

※ 이 경우는 극-영점 상쇄가 일어난 경우로서 $\gamma=-1$에 대응되는 시스템 모드가 출력에 나타나지 않는다.

(e) $y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n]=\frac{5}{6}h[n-1]-\frac{1}{6}h[n-2]+\delta[n]$$

$$h[0]=\frac{5}{6}h[-1]-\frac{1}{6}h[-2]+\delta[0]=1$$
$$h[1]=\frac{5}{6}h[0]-\frac{1}{6}h[-1]+\delta[1]=\frac{5}{6}$$
$$h[2]=\frac{5}{6}h[1]-\frac{1}{6}h[0]+\delta[2]=\frac{19}{36}$$
$$h[3]=\frac{5}{6}h[2]-\frac{1}{6}h[1]+\delta[3]=\frac{65}{216}$$
$$\vdots$$

이 경우는 닫힌 꼴의 해를 구하기가 힘들다.

(ii) 고전적 해법

$$\gamma^2-\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{6}=(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma-\frac{1}{3})=0 \quad\rightarrow\quad \gamma=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$
$$h[n]=c_1(\frac{1}{2})^n+c_2(\frac{1}{3})^n$$

$$\therefore\ h[n]=3(\frac{1}{2})^n u[n]-2(\frac{1}{3})^n u[n]$$

(f) $y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=x[n]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n]=4h[n-1]-4h[n-2]+\delta[n]$$
$$h[0]=4h[-1]-4h[-2]+\delta[0]=1$$
$$h[1]=4h[0]-4h[-1]+\delta[1]=4=2\times 2^1$$
$$h[2]=4h[1]-4h[0]+\delta[2]=12=3\times 2^2$$
$$h[3]=4h[2]-4h[1]+\delta[3]=32=4\times 2^3$$
$$h[4]=4h[3]-4h[2]+\delta[4]=80=5\times 2^4$$
$$\vdots$$
$$h[k]=4h[k-1]-4h[k-2]+\delta[k]=(1+k)\times 2^k$$
$$\vdots$$

$$\therefore\ h[n]=(1+n)2^n$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma^2-4\gamma+4=0 \quad\rightarrow\quad \therefore\ \gamma=2(\text{중근})$$
$$h[n]=(c_1+c_2 n)2^n$$

$$\therefore\ h[n]=(1+n)2^n$$

6.16 이산 LTI 시스템이 다음의 차분 방정식으로 표현될 때, 물음에 답하라.

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=6x[n]$$

(a) 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $\delta[n]$은 $n=0$에서만 값을 가지므로 $n>0$에서는

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$$
$$\gamma^2+3\gamma+2=(\gamma+2)(\gamma+1)=0 \qquad\rightarrow\qquad \therefore\ \gamma=-1,\ -2$$

$\therefore\ y[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n,\quad n>0$

$n=0$에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$y[0]+3y[-1]+2y[-2]=6 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[0]=-3y[-1]-2y[-2]+6=6$

나머지 하나의 초기 조건은

$y[1]+3y[0]+2y[-1]=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[1]=-3y[0]-2y[-1]=-18$

$\therefore\ y[n]=12(-2)^n-6(-1)^n,\quad n\geq 0$

(b) 입력 $x[n]=\delta[n]$을 인가할 때 출력 $y[n]$을 구하여라. 단 $y[-1]=0,\ y[-2]=1$이다.

Ans) $y[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n,\quad n>0$

$n=0$에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$y[0]+3y[-1]+2y[-2]=6 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[0]=-3y[-1]-2y[-2]+6=4$

나머지 하나의 초기 조건은

$y[1]+3y[0]+2y[-1]=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[1]=-3y[0]-2y[-1]=-12$

$\therefore\ y[n]=8(-2)^n-4(-1)^n,\quad n\geq 0$

(c) (a)와 (b)의 결과는 같은가? 만약 다르다면 그 이유를 설명하라.

Ans) 입력이 같다 하더라도, 초기 조건이 다르면 출력이 달라진다. 이는 초기 조건에 의한 영입력 응답이 다르기 때문이다. (a)의 임펄스 응답의 경우 영입력 응답이 0이지만, (b)의 경우는 그렇지 않다.

6.17 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI시스템에 입력 $x[n]=u[n]$을 인가할 때, 출력 $y[n]$을 구하라.

(a) $y[n]-0.5y[n-1]=x[n]+0.5x[n-1],\qquad y[-1]=1$

Ans) $y[n]\ =\ y_h[n]\ +\ y_p[n]\ =\ c(0.5)^n+3$

$y[n]=0.5y[n-1]+x[n]+0.5x[n-1]$

$y[0]\ =\ 0.5y[-1]+x[0]+0.5x[-1]\ =\ 0.5\ +\ 1\ =\ 1.5$

$\therefore\ y[n]\ =\ -1.5(0.5)^n+3$

(b) $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n],\qquad y[-1]=1,\ y[-2]=1$

Ans) $y[n]\ =\ y_h[n]\ +\ y_p[n]\ =\ c_1(-1)^n\ +\ c_2(2)^n-\dfrac{1}{2}$

$y[n]\ =\ x[n]\ +\ y[n-1]\ +\ 2y[n-2]$

$y[0]\ =\ x[0]\ +\ y[-1]\ +\ 2y[-2]\ =\ 1\ +\ 1\ +\ 2\ =\ 4$

$y[1]\ =\ x[1]\ +\ y[0]\ +\ 2y[-1]\ =\ 1\ +\ 4\ +\ 2\ =\ 7$

$\therefore\ y[n]\ =\ y_h[n]+y_p[n]\ =\ \dfrac{1}{2}(-1)^n\ +\ 4(2)^n\ -\ \dfrac{1}{2}$

(c) $y[n]+y[n-1]+0.25y[n-2]=x[n],\qquad y[-1]=0,\ y[-2]=1$

Ans) $y[n]\ =\ y_h[n]\ +\ y_p[n]\ =\ (c_1n\ +\ c_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\ +\ \dfrac{4}{9}$

$y[n]\ =\ -y[n-1]\ -\ 0.25y[n-2]\ +\ x[n]$

$$y[0] = x[0] - y[-1] - 0.25y[-2] = 1 - 0 - 0.25 = 0.75$$
$$y[1] = x[1] - y[0] - 0.25y[-1] = 1 - 0.75 - 0.25 \times 0 = 0.25$$

$$\therefore\ y[n] = \left(\frac{1}{12}n + \frac{11}{36}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{9}$$

6.18 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

(a) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n]$

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n > 0$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h[n] - h[n-1] - 2h[n-2] = 0$$
$$h[n] = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$$
$$h[0] - h[-1] - 2h[-2] = 1$$
$$h[1] - h[0] - 2h[-1] = 0$$

$$\therefore\ h[n] = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

(b) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n-2]$

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n > 2$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h[n] - h[n-1] - 2h[n-2] = 0$$
$$h[n] = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$$
$$\begin{aligned} &h[0] - h[-1] - 2h[-2] = 0, && \rightarrow && h[0] = 0 \\ &h[1] - h[0] - 2h[-1] = 0, && \rightarrow && h[1] = 0 \\ &h[2] - h[1] - 2h[0] = 1, && \rightarrow && h[2] = 1 \end{aligned}$$
$$h[3] - h[2] - 2h[1] = 0, \quad \rightarrow \quad h[3] = 1$$

$$\therefore\ h[n] = \left(\frac{1}{6}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right)u[n-2]$$

(c) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] - x[n-1]$

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n > 1$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h[n] - h[n-1] - 2h[n-2] = 0$$
$$h[n] = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$$
$$\begin{aligned} &h[0] - h[-1] - 2h[-2] = 1, && \rightarrow && h[0] = 1 \\ &h[1] - h[0] - 2h[-1] = -1, && \rightarrow && h[1] = 0 \\ &h[2] - h[1] - 2h[0] = 0, && \rightarrow && h[2] = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ h[n] = \frac{1}{3}(2)^n + \frac{2}{3}(-1)^n$$

(d) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n > 1$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h[n] - h[n-1] - 2h[n-2] = 0$$
$$h[n] = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$$

$$
\begin{array}{lll}
h[0]-h[-1]-2h[-2]=1, & \rightarrow & h[0]=1 \\
h[1]-h[0]-2h[-1]=1, & \rightarrow & h[1]=2 \\
h[2]-h[1]-2h[0]=0, & \rightarrow & h[2]=4
\end{array}
$$

$\therefore\ h[n]=(2)^n$

이 경우는 극과 영점의 상쇄가 일어나서 특성근 $\gamma=-1$에 대응되는 시스템 모드 $(-1)^n$항이 사라졌다.

※ (a)~(d)로부터 입력 조건들이 달라질 때 시스템 출력이 어떻게 변하는지 살펴볼 수 있다.

6.19 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 입력이 $x[n]=0$, $x[n]=\delta[n]$, $x[n]=u[n]$, $x[n]=(0.5)^n u[n]$일 때의 출력을 각각 구하라.

(a) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$, $\quad y[-1]=0$, $y[-2]=1$

Ans)

(i) $x[n]=0$

이 경우 차분 방정식은 다음과 같은 동차 방정식이 된다.

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$$

$$y[n]=y_h[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n$$

주어진 초기 조건을 이용하여 계수를 구하면

$\therefore\ y[n]=-4(-2)^n+2(-1)^n$

(ii) $x[n]=\delta[n]$

이 경우 $n>0$에서는 (i)의 경우와 같다. 즉

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$$

$\therefore\ y[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n,\quad n>0$

$n=0$에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$$y[0]+3y[-1]+2y[-2]=1 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[0]=-3y[-1]-2y[-2]+1=-1$$

$$y[1]+3y[0]+2y[-1]=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[1]=-3y[0]-2y[-1]=3$$

$\therefore\ y[n]=-2(-2)^n+(-1)^n,\quad n\geq 0$

(iii) $x[n]=u[n]$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n+\frac{1}{6}$$

$$
\begin{array}{l}
y[0]=-3y[-1]-2y[-2]+x[0]=0-2+1=-1 \\
y[1]=-3y[0]-2y[-1]+x[1]=3-0+1=4
\end{array}
$$

$\therefore\ y[n]=-\dfrac{16}{6}(-2)^n+\dfrac{9}{6}(-1)^n+\dfrac{1}{6}$

(iv) $x[n]=(0.5)^n u[n]$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n+\frac{1}{15}(0.5)^n$$

$$
\begin{array}{l}
y[0]=-3y[-1]-2y[-2]+x[0]=0-2+1=-1 \\
y[1]=-3y[0]-2y[-1]+x[1]=3-0+0.5=3.5
\end{array}
$$

$$\therefore\ y[n] = -\frac{12}{5}(-2)^n + \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{1}{15}(0.5)^n$$

(b) $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n], \qquad y[-1] = 1,\ y[-2] = 1$

Ans)

(i) $x[n] = 0$

이 경우 차분 방정식은 다음과 같은 동차 방정식이 된다.

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$$

$$y[n] = y_h[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n$$

$$\therefore\ y[n] = (-2n-3)(-1)^n$$

(ii) $x[n] = \delta[n]$

이 경우 $n > 0$에서는 (i)의 경우와 같다.

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$$

$$\therefore\ y[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n, \quad n > 0$$

$n = 0$에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$$y[0] + 2y[-1] + y[-2] = 1 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[0] = -2y[-1] - y[-2] + 1 = -2$$

$$y[1] + 2y[0] + y[-1] = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[1] = -2y[0] - y[-1] = 3$$

$$\therefore\ y[n] = (-n-2)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

(iii) $x[n] = u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n + \frac{1}{4}$$

$$y[0] = -2y[-1] - y[-2] + x[0] = -2 - 1 + 1 = -2$$
$$y[1] = -2y[0] - y[-1] + x[1] = 4 - 1 + 1 = 4$$

$$\therefore\ y[n] = \left(-\frac{3}{2}n - \frac{9}{4}\right)(-1)^n + \frac{1}{4}$$

(iv) $x[n] = (0.5)^n u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n + \frac{1}{9}(0.5)^n$$

$$y[0] = -2y[-1] - y[-2] + x[0] = -2 - 1 + 1 = -2$$
$$y[1] = -2y[0] - y[-1] + x[1] = 4 - 1 + 0.5 = 3.5$$

$$\therefore\ y[n] = \left(-\frac{4}{3}n - \frac{19}{9}\right)(-1)^n + \frac{1}{9}(0.5)^n$$

6.20 다음에 주어진 차분 방정식의 해를 구하라.

(a) $y[n] + 0.5y[n-1] = x[n], \quad x[n] = u[n], \quad y[-1] = 1$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-0.5)^n + \dfrac{2}{3}$

반복 대입법에 의해 $y[0]$를 구하면

$$y[0] = -0.5y[-1] + x[0] = -0.5 + 1 = 0.5$$

$$\therefore\ y[n] = -\frac{1}{6}(-0.5)^n + \frac{2}{3}$$

(b) $y[n] + 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n] - x[n-1], \quad x[n] = u[n], \quad y[0] = 1,\ y[1] = 2$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1 + c_2 n)(-2)^n$

$$\therefore\ y[n] = (1-2n)(-2)^n$$

(c) $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] + x[n-1], \quad x[n] = (-2)^n u[n], \quad y[0] = 1,\ y[1] = 2$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n + n(-2)^n$

$$\therefore\ y[n] = 6(-1)^n - 5(-2)^n + n(-2)^n$$

(d) $y[n] + 2y[n-1] + 2y[n-2] = 0, \quad y[0] = 0,\ y[1] = 2$

Ans) $y[n] = c_1\left(\sqrt{2}\,e^{+j\frac{3}{4}\pi}\right)^n + c_2\left(\sqrt{2}\,e^{-j\frac{3}{4}\pi}\right)^n = c(\sqrt{2})^n\cos(\frac{3}{4}\pi n + \theta)$

입력항이 없는 동차 차분 방정식이므로 주어진 초기 조건을 그대로 대입하면 된다.

$$\begin{cases} y[0] = c(\sqrt{2})^0\cos\theta = 0 \\ y[1] = c\sqrt{2}\cos(\frac{3}{4}\pi + \theta) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ y[n] = 2(\sqrt{2})^n\cos(\frac{3}{4}\pi n - \frac{\pi}{2})$$

[응용 문제]

6.21 이산 인과 LTI 시스템이 다음의 차분 방정식으로 표현될 때, 등가 비순환 차분 방정식으로 표현하라.

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-7]$$

Ans) $y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-7] \quad \rightarrow \quad h[n] = h[n-1] + \delta[n] - \delta[n-7]$

$$\therefore\ h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots + \delta[n-6] = \sum_{k=0}^{6}\delta[n-k]$$

$$\therefore\ y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-6] = \sum_{k=0}^{6}x[n-k]$$

(또는 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{6}x[n-k]h[k] = \sum_{k=0}^{6}x[n-k]$)

6.22 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템이 $y[n] = \delta[n]$의 출력을 내도록 하는 입력 $x[n]$을 구하라.

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

Ans) $y[n] = \delta[n]$ 을 주어진 차분 방정식에 대입하면

$$\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] = x[n] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

위 식을 $x[n]$에 대해 정리하면

$$x[n] = \frac{1}{8}x[n-2] + \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

$$\therefore\ x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = \text{짝수} \\ -2\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & n = \text{홀수} \end{cases}$$

6.23 2차 이산 LTI 시스템이 초기 휴지initially at rest 상태에서 입력 $x[n] = u[n]$에 대한 출력이 다음과 같을 때, 시스템 차분 방정식을 구하라. 초기 휴지 상태는 $n < 0$에서 모든 초기 조건이 0임을 뜻한다.

(a) $y[n] = \{(2)^n + 3(5)^n + 10\}u[n]$

Ans) 특성 방정식은

$$(\gamma-2)(\gamma-5) = \gamma^2 - 7\gamma + 10 = 0$$
$$y[n] - 7y[n-1] + 10y[n-2] = c_0x[n] + c_1x[n-1] + c_2x[n-2]$$

$$y[0] = (2)^0 + 3(5)^0 + 10 = 14$$
$$y[1] = (2)^1 + 3(5)^1 + 10 = 27$$
$$y[2] = (2)^2 + 3(5)^2 + 10 = 89$$

이와 초기 조건을 차분 방정식에 대입하여 정리하면 차분 방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\therefore\ y[n] - 7y[n-1] + 10y[n-2] = 14x[n] - 85x[n-1] + 111x[n-2]$$

(b) $y[n] = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{4}{3}(-2)^n + \frac{1}{6}, \quad n \geq 0$

Ans) 특성 방정식은

$$(\gamma+1)(\gamma+2) = \gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0$$
$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = c_1x[n] + c_2x[n-1] + c_3x[n-2]$$

$$y[0] = -\frac{1}{2}(-1)^0 + \frac{4}{3}(-2)^0 + \frac{1}{6} = 1$$

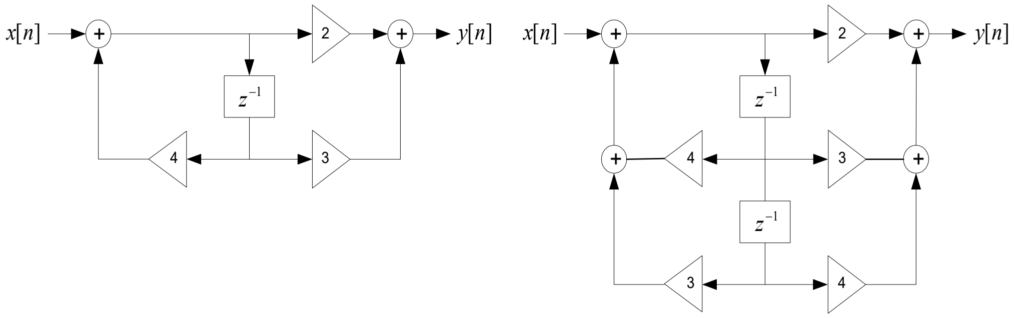
$$y[1] = -\frac{1}{2}(-1)^1 + \frac{4}{3}(-2)^1 + \frac{1}{6} = -2$$

$$y[2] = -\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{4}{3}(-2)^2 + \frac{1}{6} = 5$$

이와 초기 조건을 차분 방정식에 대입하여 정리하면 차분 방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\therefore\ y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$$

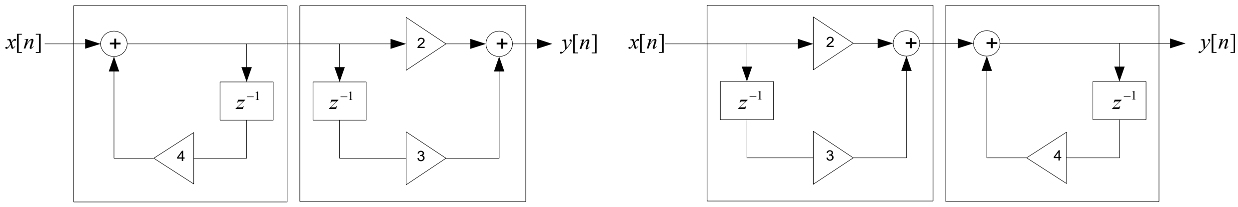
6.24 다음 그림과 같은 블록선도로 표현되는 이산 시스템에 대한 차분 방정식을 구하라.



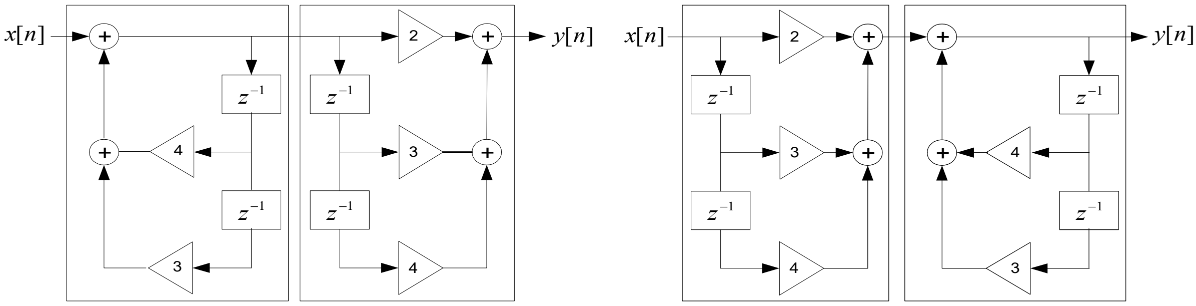
(a) (b)

Ans)

(a) $y[n]=4y[n-1]+2x[n]+3x[n-1] \quad \rightarrow \quad \therefore\ y[n]-4y[n-1]=2x[n]+3x[n-1]$



(b) $y[n]-4y[n-1]-3y[n-2]=2x[n]+3x[n-1]+4x[n-2]$



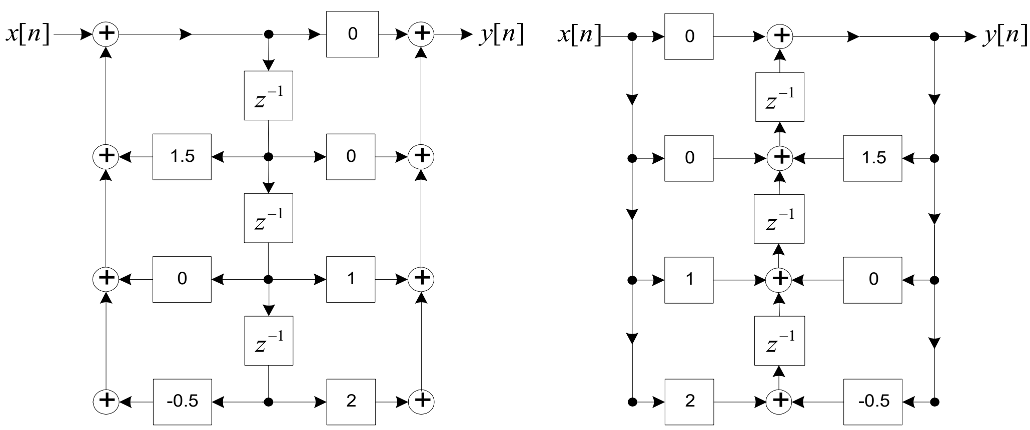
6.25 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템에 대해 (ⅰ)제 2직접형 및 전치 제2 직접형 구현도를 그리고 (ⅱ) 시스템의 안정도를 판정하라.

(a) $y[n]-1.5y[n-1]+0.5y[n-3]=x[n-2]+2x[n-3]$

Ans) 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$(\gamma-1)^2(\gamma+0.5)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=1,\ 1,\ -0.5$$

1개의 특성근이 단위원 안에, 2개의 실수 특성근이 모두 단위원 상에 존재하므로 불안정의 경우이다.



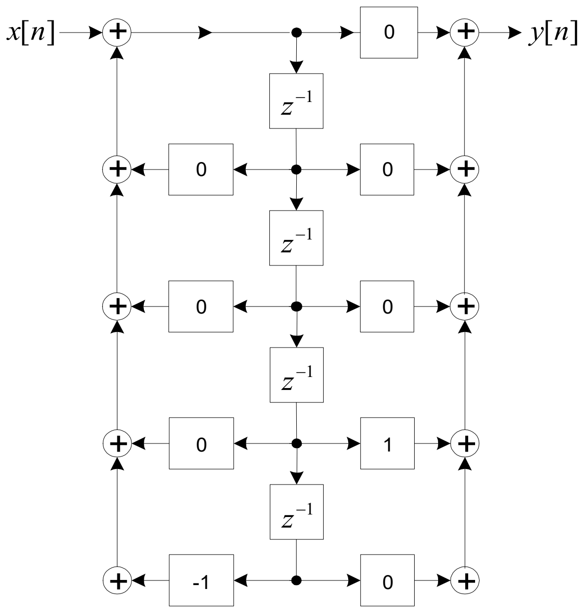
(a) 제2 직접형 (b) 전치 제2 직접형

(b) $y[n]-y[n-4]=x[n-3]$

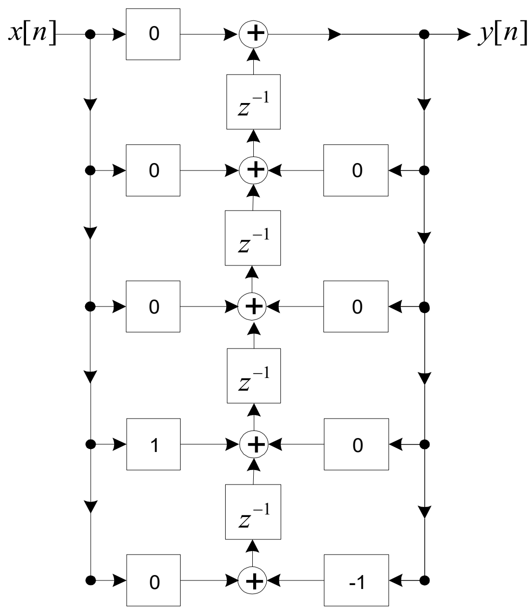
Ans) 특성방정식과 특성근을 구하면

$$(\gamma^2-1)(\gamma^2+1)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=1,\ -1,\ +j1,\ -j1$$

4개의 특성근이 단위원 상의 허축과 실축에 존재하므로 불안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형



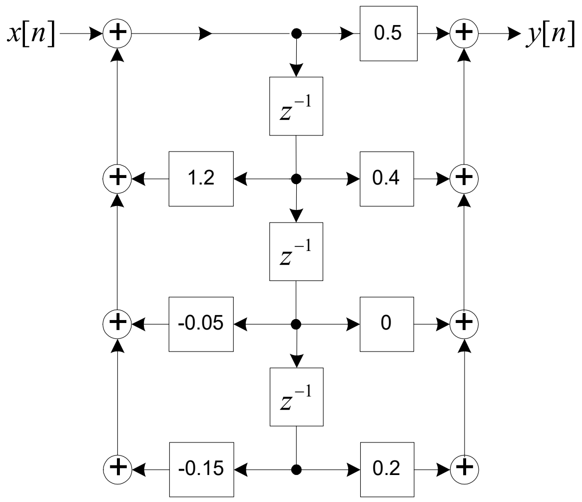
(b) 전치 제2 직접형

(c) $y[n]-1.2y[n-1]+0.05y[n-2]+0.15y[n-3]=0.5x[n]+0.4x[n-1]+0.2x[n-3]$

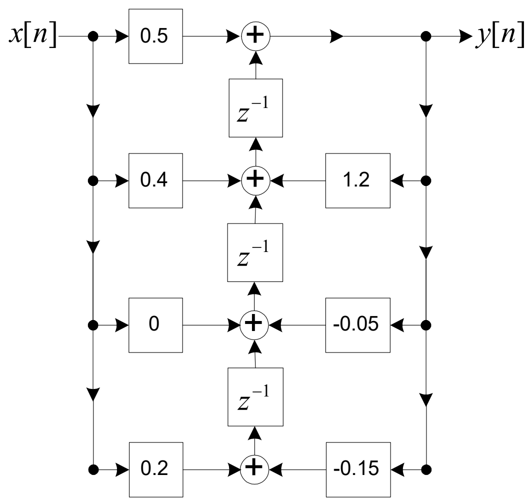
Ans) 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$(\gamma^3-1.2\gamma^2+0.05\gamma+0.15)=(\gamma-0.5)(\gamma-1)(\gamma+0.3)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=0.5,\ 1,\ -0.3$$

1개의 특성근($\gamma=1$)이 단위원 위에 존재하므로 불안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형



(b) 전치 제2 직접형

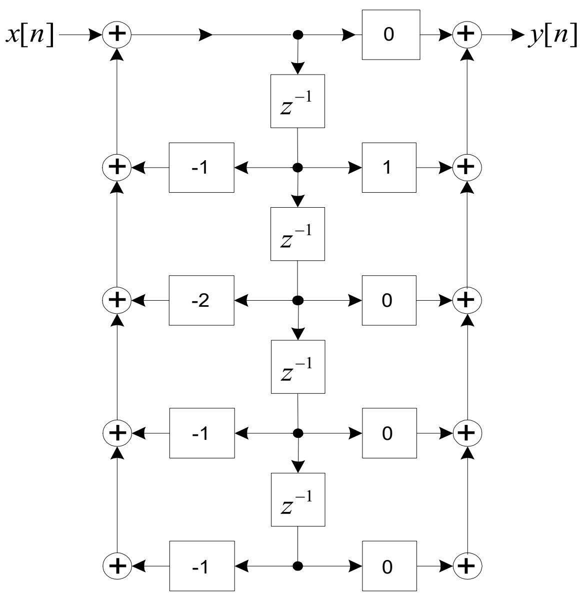
(d) $y[n]+y[n-1]+2y[n-2]+y[n-3]+y[n-4]=x[n-1]$

Ans) 특성 방정식과 특성근을 구하면

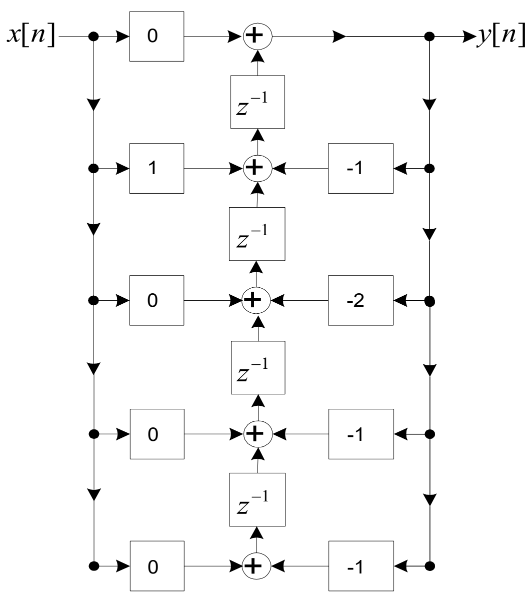
$$\gamma^4+\gamma^3+2\gamma^2+\gamma+1=(\gamma^2+1)(\gamma^2+\gamma+1)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=\pm j1,\ \gamma=\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$$

4개의 복소 특성근이 모두 단위원 상에 존재하므로 임계 안정의 경우이다.

안정 또는 불안정의 둘로 나눈다면 임계 안정은 불안정으로 분류된다.



(a) 제2 직접형



(b) 전치 제2 직접형

6.26 토끼 1쌍이 매달 새끼 1쌍을 낳고, 생후 1개월이면 임신 가능하다고 한다. 첫째 달에 새끼 토끼 1쌍이 있다고 하자.

(a) n번째 달의 토끼 쌍수를 구할 수 있는 차분 방정식을 구하라.

Ans) $y[n] = 2y[n-2] + y[n-1] - y[n-2]$

$$\therefore y[n] - y[n-1] - y[n-2] = 0$$

(b) 반복 대입법을 이용하여 처음 10개월 동안의 토기 쌍수를 구해보라.

Ans) $y[n] = y[n-1] + y[n-2]$

문제로부터 $y[1] = 1$이므로

$$\begin{aligned}
n=1 &: \; y[1] = 1 \\
n=2 &: \; y[2] = y[1] + y[0] = 1 \\
n=3 &: \; y[3] = y[2] + y[1] = 1+1 = 2 \\
n=4 &: \; y[4] = y[3] + y[2] = 2+1 = 3 \\
n=5 &: \; y[5] = y[4] + y[3] = 3+2 = 5 \\
n=6 &: \; y[6] = y[5] + y[4] = 5+3 = 8 \\
n=7 &: \; y[7] = y[6] + y[5] = 8+5 = 13 \\
n=8 &: \; y[8] = y[7] + y[6] = 13+8 = 21 \\
n=9 &: \; y[9] = y[8] + y[7] = 21+13 = 34 \\
n=10 &: \; y[10] = y[9] + y[8] = 34+21 = 55
\end{aligned}$$

(c) 고전적 해법으로 차분 방정식을 풀어 닫힌 꼴의 해를 구하라.

Ans) $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \; \gamma = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$y_h[n] = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\therefore \; y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

6.27 [연습문제 6.18]의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 입력 $x[n] = u[n]$을 인가할 때, 출력

$y[n]$을 (i) 영입력 응답 + 영상태 응답, (ii) 고유 응답 + 강제 응답의 형태로 구하라. 단 초기 조건은 $y[-1]=1,\ y[-2]=1$이다.

(a) $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n]$

Ans)

(i) 영입력 응답 +영상태 응답

차분 방정식의 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$\gamma^2-\gamma-2=(\gamma+1)(\gamma-2)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \gamma=-1,\ \gamma=2$$

동차해에 $n<0$에서의 초기 조건을 대입하여 영입력 응답 $y_s[n]$을 구하면

$$\therefore\ y_s[n]=\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{8}{3}(2)^n$$

영상태 응답은

$$y_i[n]=c_1(-1)^n+c_2(2)^n-\frac{1}{2},\quad n\geq 0$$

$y[-1]=y[-2]=0$으로 두고 계수 결정을 위한 $y[0]$과 $y[1]$을 차분 방정식으로부터 계산하면,

$$y[n]=x[n]+y[n-1]+2y[n-2]$$
$$y[0]=x[0]+y[-1]+2y[-2]=1+0+0=1$$
$$y[1]=x[1]+y[0]+2y[-1]=1+1+0=2$$

$$\therefore\ y_i[n]=\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{4}{3}(2)^n-\frac{1}{2}$$

따라서 영입력 응답 + 영상태 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$y[n]=y_s[n]+y_i[n]=\left[\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{8}{3}(2)^n\right]+\left[\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{4}{3}(2)^n-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}(-1)^n+4(2)^n-\frac{1}{2}$$

(ii) 고유 응답+강제 응답

(i)의 풀이 과정에서 구한 동차해와 특이해로부터 고유 응답+강제 응답 꼴의 시스템 출력은

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c_1(-1)^n+c_2(2)^n-\frac{1}{2}$$

주어진 초기 조건으로부터 입력이 인가된 이후의 초기 조건을 구하면,

$$y[n]=x[n]+y[n-1]+2y[n-2]$$
$$y[0]=x[0]+y[-1]+2y[-2]=1+1+2=4$$
$$y[1]=x[1]+y[0]+2y[-1]=1+4+2=7$$

따라서 고유 응답 + 강제 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$\therefore\ y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\left[\frac{1}{2}(-1)^n+4(2)^n\right]+\left[-\frac{1}{2}\right]$$

(b) $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n-2]$

Ans)

(i) 영입력 응답 +영상태 응답

영입력 응답은 (a)의 경우와 같으므로

$$y_s[n]=\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{8}{3}(2)^n$$

영상태 응답의 꼴 또한 (a)의 경우와 같으므로

$$y_i[n]=c_1(-1)^n+c_2(2)^n-\frac{1}{2},\quad n\geq 2$$

$y[-1]=y[-2]=0$으로 두고 계수 결정을 위한 $y[0]$과 $y[1]$을 차분 방정식으로부터 계산하면,

$$y[n] = x[n-2] + y[n-1] + 2y[n-2]$$
$$y[0] = x[-2] + y[-1] + 2y[-2] = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$y[1] = x[-1] + y[0] + 2y[-1] = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$y[2] = x[0] + y[1] + 2y[0] = 1 + 0 + 0 = 1$$
$$y[3] = x[1] + y[2] + 2y[1] = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$\therefore\ y_i[n] = \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}(2)^n - \frac{1}{2}$$

따라서 영입력 응답 + 영상태 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$y[n] = y_s[n] + y_i[n] = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}(2)^n\right] + \left[\frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}(2)^n - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(-1)^n + 3(2)^n - \frac{1}{2}$$

(ii) 고유 응답+ 강제 응답

(i)의 풀이 과정에서 구한 동차해와 특이해로부터 고유 응답+ 강제 응답 꼴의 시스템 출력은

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n - \frac{1}{2}$$

주어진 초기 조건으로부터 입력이 인가된 이후의 초기 조건을 구하면,

$$y[n] = x[n-2] + y[n-1] + 2y[n-2]$$
$$y[0] = x[-2] + y[-1] + 2y[-2] = 0 + 1 + 2 = 3$$
$$y[1] = x[-1] + y[0] + 2y[-1] = 0 + 3 + 2 = 5$$
$$y[2] = x[0] + y[1] + 2y[0] = 1 + 5 + 6 = 12$$
$$y[3] = x[1] + y[2] + 2y[1] = 1 + 12 + 10 = 23$$

따라서 고유 응답 + 강제 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$\therefore\ y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \left[\frac{1}{2}(-1)^n + 3(2)^n\right] + \left[-\frac{1}{2}\right]$$

※ 이 문제에서 구한 영상태 응답은 (a)에서 구한 영상태 응답을 시간 스텝 2만큼 지연시킨 것과 일치한다. 왜냐하면 (b)는 (a)와 동일한 시스템에 동일한 입력을 시간 2만큼 지연시켜서 인가한 것과 같기 때문이다. 그러나 전체적인 응답은 영상태 응답뿐만 아니라 초기 상태에 의한 영입력 응답도 포함되어 있기 때문에 이와 같은 시불변 성질이 만족되지 않음을 (a)와 (b)의 결과를 비교하여 확인할 수 있다.

(c) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] - x[n-1]$

Ans)

(i) 영입력 응답+ 영상태 응답

영입력 응답은 (a)의 경우와 같으므로

$$y_s[n] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}(2)^n$$

영상태 응답은

$$y_i[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n$$

$y[-1] = y[-2] = 0$으로 두고 계수 결정을 위한 $y[0]$과 $y[1]$을 차분 방정식으로부터 계산하면,

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + y[n-1] + 2y[n-2]$$
$$y[0] = x[0] - x[-1] + y[-1] + 2y[-2] = 1 - 0 + 0 + 0 = 1$$
$$y[1] = x[1] - x[0] + y[0] + 2y[-1] = 1 - 1 + 1 + 0 = 1$$

$$\therefore\ y_i[n] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$$

따라서 영입력 응답 + 영상태 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$y[n] = y_s[n] + y_i[n] = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}(2)^n\right] + \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n\right] = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{10}{3}(2)^n$$

(ii) 고유 응답+강제 응답

(i)의 풀이 과정에서 구한 동차해와 특이해로부터 고유 응답+강제 응답 꼴의 시스템 출력은

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n$$

주어진 초기 조건으로부터 입력이 인가된 이후의 초기 조건을 구하면,

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - x[n-1] + y[n-1] + 2y[n-2] \\ y[0] &= x[0] - x[-1] + y[-1] + 2y[-2] = 1 - 0 + 1 + 2 = 4 \\ y[1] &= x[1] - x[0] + y[0] + 2y[-1] = 1 - 1 + 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

따라서 고유 응답 + 강제 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$\therefore\ y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \left[\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{10}{3}(2)^n\right] + [0]$$

(d) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

Ans)

(i) 영입력 응답+영상태 응답

영입력 응답은 (a)의 경우와 같으므로

$$y_s[n] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}(2)^n$$

영상태 응답은

$$y_i[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n - 1$$

$y[-1] = y[-2] = 0$으로 두고 계수 결정을 위한 $y[0]$과 $y[1]$을 차분 방정식으로부터 계산하면,

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + x[n-1] + y[n-1] + 2y[n-2] \\ y[0] &= x[0] + x[-1] + y[-1] + 2y[-2] = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ y[1] &= x[1] + x[0] + y[0] + 2y[-1] = 1 + 1 + 1 + 0 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y_i[n] = 2(2)^n - 1$$

따라서 영입력 응답 + 영상태 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$y[n] = y_s[n] + y_i[n] = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}(2)^n\right] + \left[2(2)^n - 1\right] = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{14}{3}(2)^n - 1$$

(ii) 고유 응답+강제 응답

(i)의 풀이 과정에서 구한 동차해와 특이해로부터 고유 응답+강제 응답 꼴의 시스템 출력은

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n - 1$$

주어진 초기 조건으로부터 입력이 인가된 이후의 초기 조건을 구하면,

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + x[n-1] + y[n-1] + 2y[n-2] \\ y[0] &= x[0] + x[-1] + y[-1] + 2y[-2] = 1 + 0 + 1 + 2 = 4 \\ y[1] &= x[1] + x[0] + y[0] + 2y[-1] = 1 + 1 + 4 + 2 = 8 \\ y[2] &= x[2] + x[1] + y[1] + 2y[0] = 1 + 1 + 8 + 8 = 18 \end{aligned}$$

따라서 고유 응답 + 강제 응답의 꼴로 구한 시스템 출력은

$$\therefore\ y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{14}{3}(2)^n\right] + [-1]$$

6.28 이산 LTI 시스템이 다음과 같을 때 물음에 답하라.

$$y[n] + a\,y[n-1] = x[n]$$

(a) $x[n] = u[n]$, $y[-1] = 1$일 때 출력을 구하라.

Ans) $y[n] = -a\,y[n-1] + u[n]$

반복 대입법에 의해

$$
\begin{aligned}
n=0 \ &: \ y[0] = -ay[-1]+1 = -a+1 \\
n=1 \ &: \ y[1] = -ay[0]+1 = a^2-a+1 \\
n=2 \ &: \ y[2] = -ay[1]+1 = -a^3+a^2-a+1 \\
&\quad\ \vdots \\
n=k \ &: \ y[k] = -ay[k-1]+1 = (-a)^{k+1}+(-a)^k+\cdots+(-a)^2+(-a)+1 \\
&\quad\ \vdots
\end{aligned}
$$

$$\therefore \ y[n] = \sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k$$

(b) $x[n]=2u[n]$, $y[-1]=1$일 때 출력을 구하라.

Ans) 반복 대입법에 의해

$$
\begin{aligned}
n=0 \ &: \ y[0] = -ay[-1]+2 = -a+2 \\
n=1 \ &: \ y[1] = -ay[0]+2 = a^2-2a+2 \\
n=2 \ &: \ y[2] = -ay[1]+2 = -a^3+2a^2-2a+2 \\
&\quad\ \vdots \\
n=k \ &: \ y[k] = -ay[k-1]+2 = (-a)^{k+1}+2(-a)^k+\cdots+2(-a)^2+2(-a)+2 \\
&\quad\ \vdots
\end{aligned}
$$

$$\therefore \ y[n]=(-a)^{n+1}+2\sum_{k=0}^{n}(-a)^k$$

(c) $x[n]=2u[n]$, $y[-1]=2$일 때 출력을 구하라.

Ans) 반복 대입법에 의해

$$
\begin{aligned}
n=0 \ &: \ y[0] = -ay[-1]+2 = -2a+2 \\
n=1 \ &: \ y[1] = -ay[0]+2 = 2a^2-2a+2 \\
n=2 \ &: \ y[2] = -ay[1]+2 = -2a^3+2a^2-2a+2 \\
&\quad\ \vdots \\
n=k \ &: \ y[k] = -ay[k-1]+2 = 2(-a)^{k+1}+2(-a)^k+\cdots+2(-a)^2+2(-a)+2 \\
&\quad\ \vdots
\end{aligned}
$$

$$\therefore \ y[n]=2\sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k$$

(d) $x[n]=(0.5)^n u[n]$, $y[-1]=1$일 때 출력을 구하라.

Ans) $y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c(-a)^n+\dfrac{1}{2a+1}(0.5)^n$

주어진 방정식으로부터 $y[0]=-ay[-1]+x[0]=-a+1$

이를 구해진 차분 방정식의 해에 대입하여 동차해 계수를 결정하여 정리하면

$$\therefore \ y[n]=y_h[n]+y_p[n]=(-a+\frac{2a}{2a+1})(-a)^n+\frac{1}{2a+1}(0.5)^n=(-a)^{n+1}+\frac{-2(-a)^{n+1}+(0.5)^n}{2a+1}$$

(e) $x[n]=(0.5)^n u[n]+u[n]$, $y[-1]=2$일 때 출력을 구하라.

Ans) $x[n]$과 초기 조건은 (a)와 (d)의 경우를 더한 것과 같으므로, 중첩의 원리에 의하여 출력은 (a)와 (d)의 출력을 더하면 된다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k + (-a)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-a)^n[(-a)^{-1}(0.5)]^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}(-a)^k + (-a)^{n+1} + \frac{-2(-a)^{n+1} + (0.5)^n}{2a+1}$$

(f) 이상의 계산 결과로부터 출력과 초기 조건의 연관 관계를 설명하라.

Ans) (a)는 입력과 초기 조건이 모두 존재하는 경우의 시스템 응답을 보여준다.

(b)와 (c)는 입력이 2배가 되더라도 초기 조건이 2배가 되지 않으면 전체적인 출력이 2배가 되지 않음을 보여준다. 다시 말해 입력과 초기 조건이 모두 2배가 되어야만 선형성의 동차성이 만족됨을 보여준다.

(e)는 서로 다른 입력이 더해져서 입력으로 인가될 때 각각의 초기 조건도 더해진 초기 조건이 되어야만 선형성의 가산성이 성립함을 보여준다.

이상의 사실로부터 만약 초기 조건이 0이 아닐 경우 시스템의 입출력 관계가 선형성을 만족하려면 입력뿐만 아니라 초기 조건도 반드시 동차성과 가산성이 만족되도록 변경되어야 함을 알 수 있다.

초기 조건에 상관없이 선형성이 항상 성립하려면 시스템이 초기 휴지 상태(initially at rest), 즉 모든 초기 조건이 0이라는 전제가 있어야 한다.

6.29 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

(a) 임펄스 응답을 구하라.

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n > 0$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h[n] - \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = 0$$

$$h[n] = c_1(\frac{1}{2})^n + c_2(\frac{1}{4})^n$$

$$h[0] - \frac{3}{4}h[-1] + \frac{1}{8}h[-2] = 1 \quad \rightarrow \quad \therefore\ h[0] = \frac{3}{4}h[-1] - \frac{1}{8}h[-2] + 1 = 1$$

$$h[1] - \frac{3}{4}h[0] + \frac{1}{8}h[-1] = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ h[1] = \frac{3}{4}h[0] - \frac{1}{8}h[-1] = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ h[n] = 2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n$$

(b) 계단 응답 $s[n]$을 구하여 이로부터 임펄스 응답 $h[n]$을 구하라.

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(\frac{1}{2})^n + c_2(\frac{1}{4})^n + \frac{8}{3}$

$y[-1] = y[-2] = 0$으로 두고 계수 결정을 위한 $y[0]$과 $y[1]$을 차분 방정식으로부터 계산하면,

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$$

$$y[0] = x[0] + \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y[1] = x[1] + \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] = 1 + \frac{3}{4} - 0 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore\ s[n] = y[n] = -2(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n + \frac{8}{3}$$

계단 응답과 임펄스 응답의 관계는 $h[n]=s[n]-s[n-1]$이므로

$$h[n]=\left(-2(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n+\frac{8}{3}\right)-\left(-2(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}+\frac{8}{3}\right)=2(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{4})^n$$

(c) 차분 방정식의 우변 입력 항이 아래와 같이 바뀔 때 임펄스 응답을 구하라. 이 임펄스 응답을 직접 계산하지 말고, (a)의 결과로부터 구할 수 있겠는가?

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$$

Ans) 주어진 차분 방정식은 $n>1$일 때 다음과 같이 동차 방정식이 된다.

$$h'[n]-\frac{3}{4}h'[n-1]+\frac{1}{8}h'[n-2]=0$$

$$h'[n]=c_1(\frac{1}{2})^n+c_2(\frac{1}{4})^n$$

$$h'[0]-\frac{3}{4}h'[-1]+\frac{1}{8}h'[-2]=1, \quad \rightarrow \quad h'[0]=1$$
$$h'[1]-\frac{3}{4}h'[0]+\frac{1}{8}h'[-1]=1, \quad \rightarrow \quad h'[1]=\frac{7}{4}$$
$$h['2]-\frac{3}{4}h'[1]+\frac{1}{8}h'[0]=0, \quad \rightarrow \quad h'[2]=\frac{19}{16}$$

$$\therefore\ h'[n]=6(\frac{1}{2})^n-5(\frac{1}{4})^n$$

직접 계산하지 않고 구하려면 (a)의 결과에 중첩의 원리와 시불변성을 적용하면 된다. 즉 $\delta[n]$과 $\delta[n-1]$을 각각 넣었을 때의 출력을 더하면 되므로,

$$h'[n]=h[n]+h[n-1]=\left(2(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{4})^n\right)+\left(2(\frac{1}{2})^{n-1}-(\frac{1}{4})^{n-1}\right)=6(\frac{1}{2})^n-5(\frac{1}{4})^n$$

6.30 분양받은 아파트 대금을 내기 위해 2억원을 연 이율 6%, 원금 분할 상환 조건으로 담보 대출받았다.

(a) 매월 불입금을 $\alpha u[n]$, n차월의 대출 원금 잔고를 $y[n]$이라고 할 때, 둘 사이의 관계식을 구하라.

Ans) $y[n-1]-y[n]+0.005y[n-1]=\alpha u[n], \quad n\geq 1$

(b) (a)에서 얻어진 관계식을 이용하여 n차월의 대출 원금 잔고 $y[n]$을 계산하라.

Ans) $-y[n]+1.005y[n-1]=\alpha u[n], \quad n\geq 1$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c(1.005)^n+200\alpha$$

$$y[1]=1.005y[0]-\alpha=1.005\times 2\times 10^8-\alpha=201\times 10^6-\alpha$$

$$\therefore\ y[n]=(2\times 10^8-200\alpha)(1.005)^n+200\alpha$$

(c) $y[n]$을 영입력 응답 $y_s[n]$과 영상태 응답 $y_i[n]$으로 구분하고 각각의 실제 의미를 설명하라.

Ans) 영입력 응답은 동차해에 입력 인가 전의 초기 조건을 대입해 구하면 된다.

$$y_s[n]=c(1.005)^n$$

$$y[0]=y_s[0]=c(1.005)^0=2\times 10^8 \quad \rightarrow \quad \therefore\ c=2\times 10^8$$

$$\therefore\ y_s[n]=2\times 10^8\times(1.005)^n$$

$y[n] = y_s[n] + y_i[n]$이므로

$$y_i[n] = y[n] - y_s[n] = 200(1-(1.005)^n)\alpha$$

따라서 영입력 응답 + 영상태 응답 형태의 n차월의 대출 원금 잔고 $y[n]$은 다음과 같이 된다.

$$y[n] = y_s[n] + y_i[n] = 2\times 10^8 \times (1.005)^n + 200(1-(1.005)^n)\alpha$$

영입력 응답은 할부금을 전혀 갚지 않는 경우 늘어나게 되는 원리금을 나타낸다.

영상태 응답은 매월 일정액 α를 불입함으로써 차감되는 금액을 나타낸다.

(d) 대출 기간이 20년일 때, 월 불입금 $\alpha u[n]$은 얼마인가?, 또 만기까지 내야 할 총이자액은 얼마인가?

Ans) 할부 개월 수가 240개월이므로 $y[240]=0$이 된다. 따라서

$$y[240] = (2\times 10^8 - 200\alpha)(1.005)^{240} + 200\alpha = 0$$

$$\therefore\ \alpha = 1{,}432{,}862.141$$

총 이자는 총 불입금에서 원금을 뺀 금액이다.

$\therefore$총 이자액 = $1{,}432{,}862.141 \times 240 - 2\times 10^8 = 143{,}886{,}913.9$

(e) 대출 기간이 30년일 때, 월 불입금 $\alpha u[n]$은 얼마인가?, 또 만기까지 내야 할 총이자액은 얼마인가?

Ans) 할부 개월 수가 360개월이므로 $y[360]=0$이 된다. 따라서

$$y[360] = (2\times 10^8 - 200\alpha)(1.005)^{360} + 200\alpha = 0$$

$$\therefore\ \alpha = 1{,}199{,}101.064$$

총 이자는 총 불입금에서 원금을 뺀 금액이다.

$\therefore$총 이자액 = $1{,}199{,}101.064 \times 360 - 2\times 10^8 = 231{,}676{,}383$