# 제10장 라플라스 변환

## [개념 문제]

10.1 라플라스 변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 라플라스 변환은 에너지 신호나 전력 신호가 아닌 신호들도 주파수 영역으로 변환해준다.

㉯ 수렴 영역이 표시되지 않으면 라플라스 변환 $X(s)$로부터 유일하게 $x(t)$를 구할 수 없다.

㉰ 비인과 신호는 라플라스 변환이 불가능하다.

㉱ 라플라스 변환은 푸리에 변환을 일반화한 것으로 생각할 수 있다.

(※ 책에 ㉰항에 미스프린트 있음)

*Ans)* ㉰

10.2 라플라스 변환의 수렴 영역에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 모든 인과 신호에 대한 라플라스 변환의 수렴 영역은 동일하다.

㉯ 우편향 신호와 좌편향 신호의 라플라스 변환의 수렴 영역은 겹칠 수 있다.

㉰ 수렴 영역이 $s$ 평면의 허축을 포함하지 않는 신호는 푸리에 변환이 존재하지 않는다.

㉱ 단방향 라플라스 변환에서는 같은 $X(s)$에 2개의 수렴 영역이 대응되지 않는다.

*Ans)* ㉮

$e^{3t}u(t)$의 수렴 영역은 $\sigma > 3$, $e^{-3t}u(t)$의 수렴 영역은 $\sigma > -3$으로 다르다.

10.3 RLC 직렬회로의 회로 방정식은 다음과 같다. $t=0$에서 $x(t)=10u(t)$를 인가하였다. 입력 전압이 인가되기 직전에 회로 전류는 $i(0^-)=2$, 커패시터 충전 전압은 $v_c(0^-)=5$라고 한다. 회로 방정식을 라플라스 변환한 것으로 옳은 것은? 단 $R=3$, $L=1$, $C=0.5$이다.

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = x(t), \quad t \geq 0$$

㉮ $(s^2+3s+2)I(s)=10s$

㉯ $(s^2+3s+2)I(s)=10s+2$

㉰ $(s^2+3s+2)I(s)=2s+10$

㉱ $(s^2+3s+2)I(s)=2s+5$

*Ans)* ㉱

$$RI(s)+LsI(s)-Li(0^-)+\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{1}{s}v_C(0^-)=\frac{10}{s}$$

10.4 다음의 $X(s)$와 신호의 정상상태 값 $x(\infty)$의 짝 중에서 틀린 것은?

㉮ $X(s)=\dfrac{2s+4}{s(s^2+5s+4)}$, $x(\infty)=1$

㉯ $X(s)=\dfrac{4s+4}{s(s^2-5s+4)}$, $x(\infty)=1$

㉰ $X(s)=\dfrac{4s+4}{s(s^2+5s+4)}$, $x(\infty)=1$

㉱ $X(s)=\dfrac{4s-4}{s(s^2+3s-4)}$, $x(\infty)=1$

*Ans)* ㉯

㉯와 ㉱는 똑같이 불안정한 극을 가지지만 ㉱는 불안정한 극이 영점과 상쇄되는 반면에 ㉯는 상쇄되지 않으므로 최종값 정리를 적용할 수 없다.

10.5 라플라스 역변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $X(s)$를 역변환하려면 분모 차수만큼의 부분분수 항으로 전개해야 한다.

㉯ $\dfrac{K_1}{s+1}+\dfrac{K_2}{(s+1)^2}+\dfrac{K_3}{(s+1)^3}$의 계수를 헤비사이드 기법으로 구할 때 $K_1$을 제일 먼저 구한다.

㉰ 공액 복소극을 갖는 $X(s)$를 라플라스 역변환하면 항상 실수 신호가 되지는 않는다.

㉱ $X(s)$의 분모와 분자의 차수가 같으면 역변환으로 얻은 신호에 반드시 임펄스가 포함된다.

*Ans)* ㉯, ㉰

공액 복소극에 대해 부분분수 전개를 하면 계수 또한 서로 공액이 되어 통분하면 분모 분자 모두 실수 계수를 갖는 다항식으로 표현된다. 따라서 역변환하면 실수 신호가 된다.

10.6 라플라스 변환에 의한 미분 방정식의 풀이에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 라플라스 변환의 시간 미분 성질을 이용하여 한 번에 완전해를 구할 수 있다.

㉯ 영상태 응답+영입력 응답 형태와 고유 응답+강제 응답의 풀이가 모두 가능하다.

㉰ 고전적 해법과 마찬가지로 $t=0^+$에서의 초기 조건을 사용한다.

㉱ 풀이 과정에서 특성 방정식이 영입력 응답과 영상태 응답 모두에 관여함을 볼 수 있다.

*Ans)* ㉰

10.7 전달 함수에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 비선형 또는 시변 시스템에 대해서도 전달 함수를 구할 수 있다.

㉯ 전달 함수로부터 인과 시스템의 주파수 응답을 구할 수 없다.

㉰ 임펄스 응답과 주파수 응답과 전달 함수는 결국 같은 것에 대한 다른 표현이다.

㉱ 전달 함수는 입력에 대한 출력의 비이므로 입력에 따라 달라질 수 있다.

*Ans)* ㉰

10.8 전달 함수의 극과 영점에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 전달 함수의 극은 시스템 모드와 임펄스 응답의 형태를 결정한다.

㉯ 극이 라플라스 변환의 수렴 영역에 존재하면, 그 시스템은 안정하다.

㉰ 극이 $s=-5\pm j5$인 시스템은 극이 $s=-1\pm j1$인 시스템보다 임펄스 응답의 감쇠가 느리다.

㉱ 극이 $s=-5\pm j5$인 시스템은 극이 $s=-1\pm j1$인 시스템보다 임펄스 응답의 진동이 빠르다.

*Ans)* ㉯, ㉰

극이 $s=-5\pm j5$이면 $e^{(-5\pm j5)t}=e^{-5t}e^{\pm j5t}$인 시스템 모드를 가져 $e^{(-1\pm j1)t}=e^{-t}e^{\pm jt}$보다 감쇠와 진동이 훨씬 빨리 이루어진다.

10.9 다음의 전달 함수를 갖는 시스템 중 BIBO 불안정인 것을 모두 골라라.

㉮ $H(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$ ㉯ $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$ ㉰ $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2-2s+5}$

㉱ $H(s)=\dfrac{s-2}{s^2-3s+2}$ ㉲ $H(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$ ㉳ $H(s)=\dfrac{s-3}{s^2-2s-3}$

*Ans)* ㉰ ㉱ ㉲

㉳는 $s=-1$, $s=3$의 극을 가지는데 $s=3$의 극이 영점에 의해 상쇄되므로 이 시스템은 안정하다.

10.10 주파수 응답과 시스템의 극-영점의 관계에 대한 설명 중 틀린 것은?

㉮ 하나의 극 또는 영점에 의해서 변할 수 있는 위상의 범위는 $0.5\pi$ 이내로 제한된다.

㉯ 이득에 미치는 극과 영점의 영향을 크게 하려면 허축에서 멀리 위치시키는 것이 좋다.

㉰ 시스템 $H(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$ 보다 시스템 $H(s)=\dfrac{(s+2)^2}{(s^2+2s+2)^2}$ 의 주파수 응답이 더 날카로운 골과 뾰족 마루를 가진다.

㉱ 극과 영점을 잘 조합하면 원하는 형태의 주파수 응답을 얻을 수 있다.

*Ans)* ㉯

허축을 따라 $\omega$를 변화시킬 때 거리의 변화가 더 심하게 만들어져야 이득의 변화가 커지는데, 극과 영점이 허축에 가까이 붙을수록 그렇게 된다. 실극(영점)은 $s=j\omega$를 따라 $\omega=0$에서부터 이동해가면 $0°$에서 $90°$의 위상을 만들고 공액복소극(영점)쌍이 $0°$에서 $180°$의 위상을 만든다.

## [기초 문제]

10.11 다음 신호의 양방향 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t)=e^{2|t|}$

*Ans)* 라플라스 변환의 정의식으로부터

$$X(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{-2t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty} e^{2t}e^{-st}dt=-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-2}$$

ROC : $Re\{s\}=\sigma<-2$ & $\sigma>2$

두 조건을 동시에 만족하는 수렴 영역이 존재하지 않으므로 양방향 라플라스 변환은 존재하지 않는다.

(b) $x(t)=e^{-2|t|}$

*Ans)* 라플라스 변환의 정의식으로부터

$$X(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt=-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}$$

ROC : $Re\{s\}=\sigma<2$ & $\sigma>-2$

두 조건을 동시에 만족하는 수렴 영역이 존재하므로 양방향 라플라스 변환은 존재한다.

$$X(s)=\frac{4}{4-s^2},\qquad \text{ROC : } -2<Re\{s\}=\sigma<2$$

(c) $x(t)=|t|$

*Ans)* 라플라스 변환의 정의식으로부터

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}(-t)e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}t e^{-st}dt$$

ROC : $Re\{s\}=\sigma<0$ & $\sigma>0$

두 조건을 동시에 만족하는 수렴 영역이 존재하지 않으므로 양방향 라플라스 변환은 존재하지 않는다.

(d) $x(t)=\cos(\omega_0 t)u(-t)$

*Ans)* 라플라스 변환의 정의식으로부터

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t)u(-t)e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right]e^{-st}dt=-\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

ROC : $Re\{s\}=\sigma<0$

10.12 라플라스 변환의 정의식을 이용하여 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t) = e^{-at}(u(t) - u(t-1))$

*Ans)* 정의식을 이용하여 $x(t)$를 라플라스 변환하면

$$X(s) = \int_0^1 e^{-at} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s+a}(1 - e^{-(s+a)})$$

(b) $x(t) = (e^{2t} - 2e^{-t})u(t)$

*Ans)* 정의식을 이용하여 $x(t)$를 라플라스 변환하면

$$X(s) = \int_0^\infty (e^{-(s-2)t} - 2e^{-(s+1)t})\, dt = \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s+1}$$

(c) $x(t) = (1 - e^{-t})u(t-1)$

*Ans)* 정의식을 이용하여 $x(t)$를 라플라스 변환하면

$$X(s) = \int_1^\infty (e^{-st} - e^{-(s+1)t}\, dt = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s+1}e^{-(s+1)}$$

(d) $x(t) = \cos(\pi t + \frac{\pi}{4})u(t)$

*Ans)* 라플라스 변환의 정의식으로부터

$$X(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{j(\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\pi t + \frac{\pi}{4})})e^{-st}\, dt = \frac{s\cos(\frac{\pi}{4}) - \pi\sin(\frac{\pi}{4})}{s^2 + \pi^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s-\pi}{s^2+\pi^2}$$

(e) $x(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)u(t)$

*Ans)* $x(t) = \frac{1}{4}(e^{j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1-\omega_2)t})u(t)$

정의식을 이용하여 $x(t)$를 라플라스 변환하면

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty \frac{1}{4}(e^{j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1-\omega_2)t})u(t)e^{-st}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + (\omega_1+\omega_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(\omega_1-\omega_2)^2} \end{aligned}$$

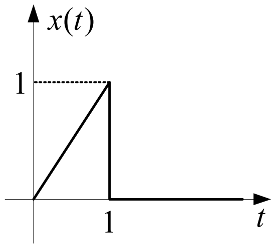
(f) $x(t) = t\cos(\omega_0 t)u(t)$

*Ans)* $x(t) = t\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}t(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t)$

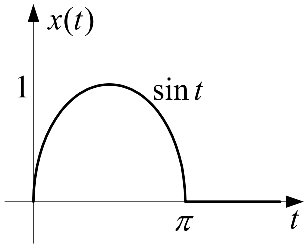
따라서 $x(t)$의 라플라스 변환은 [예제 10-5(b)]의 결과를 이용하여 $a = \pm j\omega_0$로 두면 쉽게 얻어진다.

$$X(s) = \frac{1}{2}(\frac{1}{(s-j\omega_0)^2} + \frac{1}{(s+j\omega_0)^2}) = \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

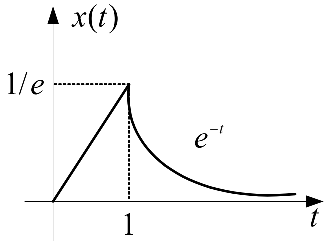
10.13 아래 그림의 신호 $x(t)$를 먼저 수식으로 표현하고, 라플라스 변환의 정의식을 이용하여, 또한 라플라스 변환쌍표와 시간 이동 성질을 이용한 두 가지 방법으로 라플라스 변환을 구하라.



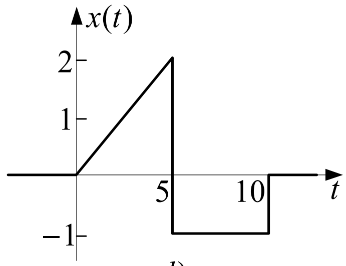

a)




b)




c)




d)

*Ans)*

(a) ( i ) $x(t)=t(u(t)-u(t-1))=tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1)$

(ii) $X(s)=\int_0^1 te^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$

(iii) 변환쌍 $tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2},\quad u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$ 와 시간 이동 성질을 이용하면

$$X(s)=\mathcal{L}\{tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1)\}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})-\frac{1}{s}e^{-s}$$

(b) ( i ) $x(t)=\sin(t)(u(t)-u(t-\pi))=\sin(t)u(t)+\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

$\because\ \sin(t-\pi)=\sin t\cos\pi-\cos t\sin\pi=-\sin t$

(ii) $X(s)=\int_0^{\pi}\sin(t)e^{-st}dt=\frac{1}{j2}\int_0^{\pi}(e^{jt}-e^{-jt})e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})$

(iii) 변환쌍 $\sin(t)u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$ 와 시간 이동 성질을 이용하면

$$X(s)=\mathcal{L}\{\sin t\,u(t)+\sin(t-\pi)u(t-\pi)\}=\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}=\frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})$$

(c) ( i ) $x(t)=t(u(t)-u(t-1))+e^{-t}u(t-1)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1)+e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)$

(ii) $X(s)=\int_0^1 te^{-st}dt+\int_1^{\infty}e^{-(s+1)t}dt=-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})+\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)}$

(iii) 변환쌍 $tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2},\quad u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s},\quad e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ 와 시간 이동 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}X(s)&=\mathcal{L}\{tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1)+e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)\}\\&=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})-\frac{1}{s}e^{-s}+e^{-1}\frac{1}{s+1}e^{-s}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)}\end{aligned}$$

(d) ( i ) $x(t)=\frac{2}{5}t(u(t)-u(t-5))-(u(t-5)-u(t-10))$

$=\frac{2}{5}tu(t)-\frac{2}{5}(t-5)u(t-5)-3u(t-5)+u(t-10)$

(ii) $X(s)=\frac{2}{5}\int_0^5 te^{-st}dt-\int_5^{10}e^{-st}dt=\frac{1}{s}(e^{-10s}-3e^{-5s})+\frac{2}{5}\frac{1}{s^2}(1-e^{-5s})$

(iii) 변환쌍 $tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2},\quad u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$ 와 시간 이동 성질을 이용하면

$$X(s)=\mathcal{L}\{\frac{2}{5}tu(t)-\frac{2}{5}(t-5)u(t-5)-3u(t-5)+u(t-10)\}=\frac{2}{5}\frac{1}{s^2}(1-e^{-5s})+\frac{1}{s}(e^{-10s}-3e^{-5s})$$

10.14 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $x(t)=(t+1)u(t+1)$

*Ans)* 단방향 라플라스 변환에서는 $x(t)=(t+1)u(t+1)=(t+1)u(t)$

$$X(s)=\mathcal{L}\{tu(t)+u(t)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s^2}$$

(b) $x(t)=(t-1)u(t)$

*Ans)* $X(s)=\mathcal{L}\{tu(t)-u(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}=-\frac{s-1}{s^2}$

(c) $x(t)=tu(t-1)$

*Ans)* $x(t)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$

$$X(s)=\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)+u(t-1)\}=\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}=\frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

(d) $x(t)=(t-1)u(t-1)$

*Ans)* $X(s)=\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\}=\frac{e^{-s}}{s^2}$

(e) $x(t)=3(t-3)u(t-2)$

*Ans)* $x(t)=3(t-2)u(t-2)-3u(t-2)$

$$X(s)=\frac{3}{s^2}e^{-2s}-\frac{3}{s}e^{-2s}=3\frac{1-s}{s^2}e^{-2s}$$

(f) $x(t)=3t[u(t-1)-u(t-3)]$

*Ans)* $x(t)=3(t-1)u(t-1)-3(t-3)u(t-3)+3u(t-1)-9u(t-3)$

$$X(s)=\frac{3}{s^2}e^{-s}-\frac{3}{s^2}e^{-3s}+3\frac{1}{s}e^{-s}-9\frac{1}{s}e^{-3s}=\frac{3}{s^2}(e^{-s}-e^{-3s})+\frac{3}{s}(e^{-s}-3e^{-3s})$$

(g) $x(t)=te^{-t}u(t-\tau)$

*Ans)* $x(t)=e^{-\tau}(t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)+\tau e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$

$$X(s)=e^{-\tau}e^{-\tau s}\frac{1}{(s+1)^2}+\tau e^{-\tau}e^{-\tau s}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}+\tau\right)e^{-\tau(s+1)}$$

(h) $x(t)=\sin(\omega_0(t-\tau))u(t)$

*Ans)* $x(t)=[\sin(\omega_0 t)\cos(-\omega_0\tau)+\cos(\omega_0 t)\sin(-\omega_0\tau)]u(t)$

$$X(s)=\cos(\omega_0\tau)\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}-\sin(\omega_0\tau)\frac{s}{s^2+\omega_0^2}=\frac{\cos(\omega_0\tau)\omega_0-\sin(\omega_0\tau)s}{s^2+\omega_0^2}$$

10.15 다음에 주어진 신호 $x(t)$와 $h(t)$의 컨벌루션 $y(t)=x(t)*h(t)$를 라플라스 변환을 이용하여 구하라.

(a) $x(t)=u(t),\quad h(t)=u(t)$

*Ans)* $X(s)=H(s)=\frac{1}{s}$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

$\therefore\ y(t)=t\,u(t)$

(b) $x(t)=\delta(t)+\delta(t-4),\quad h(t)=u(t)$

*Ans)* $X(s)=1+e^{-4s}\qquad \&\qquad H(s)=\dfrac{1}{s}$

$$Y(s)=(1+e^{-4s})\frac{1}{s}$$

$\therefore\ y(t)=u(t)+u(t-4)$

(c) $x(t)=u(t),\quad h(t)=e^{-t}u(t)$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{1}{s}\qquad \&\qquad H(s)=\dfrac{1}{s+1}$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$\therefore\ y(t)=u(t)-e^{-t}u(t)$

(d) $x(t)=e^{-t}u(t),\quad h(t)=e^{-2t}u(t)$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{1}{s+1}\qquad \&\qquad H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$\therefore\ y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

10.16 신호 $x(t)$의 라플라스 변환이 다음과 같을 때, 신호의 초깃값과 최종값을 초깃값 정리와 최종값 정리를 사용하여 구하고, $X(s)$를 라플라스 역변환하여 $x(t)$를 구해 얻어진 값이 맞는지 확인하라.

(a) $X(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$

*Ans)* $x(0)=\lim\limits_{s\to\infty}sX(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)}=1$

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{(s+1)(s+2)}=0$$

$$X(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}=-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

$\therefore\ x(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)$

$x(0)=-e^0+2e^0=1$

$x(\infty)=-e^{-\infty}+2e^{-\infty}=0$

이 값은 초깃값 정리와 최종값 정리를 이용하여 구한 결과와 일치한다.

(b) $X(s)=\dfrac{s+4}{s(s+2)}$

*Ans)* $x(0)=\lim\limits_{s\to\infty}sX(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s(s+4)}{s(s+2)}=1$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(s+4)}{s(s+2)} = 2$$

$$X(s) = \frac{s+4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore\ x(t) = (2 - e^{-2t})u(t)$$

$$x(0) = 2 - e^{0} = 1$$

$$x(\infty) = 2 - e^{-\infty} = 2$$

이 값은 초깃값 정리와 최종값 정리를 이용하여 구한 결과와 일치한다.

(c) $X(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)^2}$

*Ans)* $x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = \lim_{s \to \infty} \dfrac{s(s+2)}{s(s+1)^2} = 0$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(s+2)}{s(s+1)^2} = 2$$

$$X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\therefore\ x(t) = (2 - 2e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

$$x(0) = 2 - 2e^{0} - 0 = 0$$

$$x(\infty) = 2 - 2e^{-\infty} - 0 = 2$$

이 값은 초깃값 정리와 최종값 정리를 이용하여 구한 결과와 일치한다.

(d) $X(s) = \dfrac{s^2+2s}{s^2(s^2+2s+2)}$

*Ans)* $x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = \lim_{s \to \infty} \dfrac{s(s^2+2s)}{s^2(s^2+2s+2)} = 0$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(s^2+2s)}{s^2(s^2+2s+2)} = 1$$

$$X(s) = \frac{s^2+2s}{s^2(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}$$

$$\therefore\ x(t) = (1 - e^{-t}\cos t)u(t)$$

$$x(0) = 1 - e^{0} = 0$$

$$x(\infty) = 1 - e^{-\infty} = 0$$

이 값은 초깃값 정리와 최종값 정리를 이용하여 구한 결과와 일치한다.

10.17 다음과 같이 주어지는 $X(s)$의 라플라스 역변환을 구하라.

(a) $X(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+5s+6}$

*Ans)* $X(s) = \dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \dfrac{K_1}{s+2} + \dfrac{K_2}{s+3} = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s+3}$

$$\therefore\ x(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

(b) $X(s)=\dfrac{4s+2}{2s^2+12s+16}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{2(2s+1)}{2(s+2)(s+4)}=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{s+4}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{7}{2}\dfrac{1}{s+4}$

$\therefore\ x(t)=(-\dfrac{3}{2}e^{-2t}+\dfrac{7}{2}e^{-4t})u(t)$

(c) $X(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+3s+2}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+3s+2}=\dfrac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{s}{s+2}=1-\dfrac{2}{s+2}$

$\therefore\ x(t)=\delta(t)-2e^{-2t}u(t)$

(d) $X(s)=\dfrac{5}{s^2(s+2)}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{5}{s^2(s+2)}=\dfrac{K_1}{s^2}+\dfrac{K_2}{s}+\dfrac{K_3}{s+2}=\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{5}{4}\dfrac{1}{s}+\dfrac{5}{4}\dfrac{1}{s+2}$

$\therefore\ x(t)=(\dfrac{5}{2}t-\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4}e^{-2t})u(t)$

(e) $X(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^2}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^2}=\dfrac{K_1}{s}+\dfrac{K_2}{(s+1)^2}+\dfrac{K_3}{s+1}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{2}{s+1}$

$\therefore\ x(t)=(2-te^{-t}-2e^{-t})u(t)$

(f) $X(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^2-s-6}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{(s+1)^2}{(s-3)(s+2)}=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{s-3}=-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{16}{5}\dfrac{1}{s-3}$

$\therefore\ x(t)=(-\dfrac{1}{5}e^{-2t}+\dfrac{16}{5}e^{3t})u(t)$

(g) $X(s)=\dfrac{2s^2+16s+8}{(s+2)(s+1)^3}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{2s^2+16s+8}{(s+2)(s+1)^3}=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{(s+1)^3}+\dfrac{K_3}{(s+1)^2}+\dfrac{K_4}{s+1}=\dfrac{16}{s+2}-\dfrac{6}{(s+1)^3}+\dfrac{18}{(s+1)^2}-\dfrac{16}{s+1}$

$\therefore\ x(t)=(16e^{-2t}-3t^2e^{-t}+18te^{-t}-16e^{-t})u(t)$

(h) $X(s)=\dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

*Ans)* $X(s)=\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+1+j1}+\frac{K_2^*}{s+1-j1}=-\frac{1}{s+1}+\frac{-1-j2}{2(s+1+j1)}+\frac{-1+j2}{2(s+1-j1)}$

$\therefore\ x(t)=-e^{-t}+\sqrt{5}e^{-j1.35\pi}e^{(-1-j1)t}+\sqrt{5}e^{j1.35\pi}e^{(-1+j1)t}=e^{-t}(2\sqrt{5}\cos(t+1.35\pi)-1)$

10.18 다음 미분 방정식으로 표현된 시스템에 대해 전달 함수, 임펄스 응답, 계단 응답을 구하라.

(a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=2x(t)$

*Ans)* $s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=2X(s)$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\frac{1}{s+4}\}=(\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t})u(t)$$

계단 응답

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+4}$$

$$\therefore\ y(t)=(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-4t})u(t)$$

(b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)$

*Ans)* $s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=2sX(s)+6X(s)$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+4)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{s+4}\}=(\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t})u(t)$$

계단 응답

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s}-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{6}\frac{1}{s+4}$$

$$\therefore\ y(t)=(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-4t})u(t)$$

(c) $\frac{d^3y(t)}{dt^3}+3\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$

*Ans)* $s^3Y(s)+3s^2Y(s)+4sY(s)+2Y(s)=2X(s)$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{s^3+3s^2+4s+2}=\frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+1}-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1^2}\}=2(e^{-t}-e^{-t}\cos t)u(t)$$

계단 응답

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$\therefore\ y(t)=(1-2e^{-t}+e^{-t}(\cos t-\sin t))u(t)=(1-2e^{-t}+e^{-t}\cos(t+\frac{\pi}{4}))u(t)$$

(d) $\frac{d^3y(t)}{dt^3}-\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}-6x(t)$

*Ans)* $s^3Y(s)-s^2Y(s)+2Y(s)=2sX(s)-6X(s)$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s-6}{s^3-s^2+2}=\frac{2(s-3)}{(s+1)(s^2-2s+2)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{8}{5}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\frac{8s-14}{(s-1)^2+1}\}$$
$$=(-\frac{8}{5}e^{-t}+\frac{8}{5}e^{t}\cos t-\frac{6}{5}e^{t}\sin t)u(t)=(-\frac{8}{5}e^{-t}+2e^{t}\cos(t+\phi))u(t)$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

계단 응답

$$Y(s)=H(s)X(s)=-\frac{3}{s}+\frac{8}{5}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\frac{7(s-1)+1}{(s-1)^2+1}$$

$$\therefore\ y(t)=(-3+\frac{8}{5}e^{-t}+\frac{7}{5}e^{-t}\cos t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin t)u(t)=(-3+\frac{8}{5}e^{-t}+\sqrt{2}e^{-t}\cos(t-\theta))u(t)$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

10.19 시스템의 입력과 출력이 다음과 같을 때, 전달 함수와 임펄스 응답을 구하라.

(a) $x(t)=e^{-2t}u(t),\qquad y(t)=e^{-t}u(t)-3e^{-2t}u(t)$

*Ans)* $X(s)=\frac{1}{s+2}$

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{3}{s+2}=\frac{-2s-1}{(s+1)(s+2)}$$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=-\frac{(s+2)(2s+1)}{(s+1)(s+2)}=-\frac{2s+1}{s+1}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{2s+1}{s+1}\}=-2\delta(t)+e^{-t}u(t)$$

(b) $x(t)=e^{-3t}u(t),\qquad y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$

*Ans)* $X(s)=\frac{1}{s+3}$

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}=\frac{s^2+4s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(s+3)(s^2+4s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{s^2+4s+5}{(s+1)(s+2)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{1+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\}=\delta(t)+2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

(c) $x(t)=u(t),\qquad y(t)=tu(t)-e^{-3t}u(t)$

*Ans)* $X(s)=\frac{1}{s}$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s+3}=\frac{-s^2+s+3}{s^2(s+3)}$$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{-s^2+s+3}{s(s+3)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{-1+\frac{1}{s}+\frac{3}{s+3}\}=-\delta(t)+(1+3e^{-3t})u(t)$$

(d) $x(t)=u(t),\qquad y(t)=t^2u(t)-2e^{-3t}u(t)$

(※ 책에 $x(t)=tu(t)$는 미스 프린트임)

*Ans)* $X(s)=\frac{1}{s}$

$$Y(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s+3}=-\frac{2(s^3-s-3)}{s^3(s+3)}$$

전달 함수

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=-\frac{2(s^3-s-3)}{s^2(s+3)}$$

임펄스 응답

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{-2+\frac{6}{s+3}+\frac{2}{s^2}\}=-2\delta(t)+(2t+6e^{-3t})u(t)$$

10.20 다음과 같은 전달 함수로 표현되는 시스템에 대해 입력 $x(t)$와 출력 $y(t)$의 관계를 나타내는 미분 방정식을 구하고, 시스템의 제1 표준형 구현도를 구하라. 미분 방정식을 거치지 않고 전달 함수로부터 직접 표준형 구현도를 그릴 수 있는지 설명하라.

(a) $H(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+8}$

*Ans)* $(s^2+3s+8)Y(s)=(s+5)X(s)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+5x(t)$$

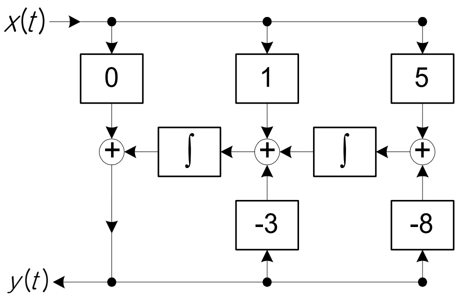
그런데 미분 방정식의 계수와 전달 함수의 계수가 동일하므로 구태여 미분 방정식을 구하는 중간 과정을 거치지 않고 전달 함수로부터 직접 제1 표준형 구현도를 그릴 수 있다.

(b) $H(s)=\dfrac{s^2+3s+5}{s^3+2s^2+5s+4}$

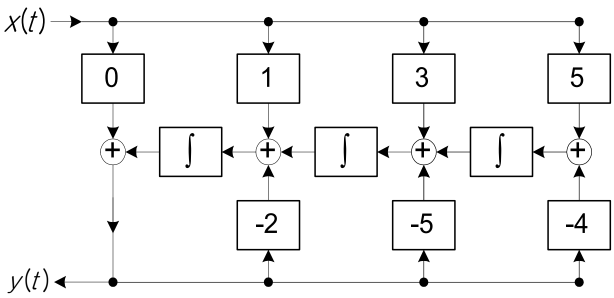
*Ans)* $(s^3+2s^2+5s+4)Y(s)=(s^2+3s+5)X(s)$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+5x(t)$$

그런데 미분 방정식의 계수와 전달 함수의 계수가 동일하므로 구태여 미분 방정식을 구하는 중간 과정을 거치지 않고 전달 함수로부터 직접 제1 표준형 구현도를 그릴 수 있다.




(a)




(b)

(c) $H(s)=\dfrac{5s^2+7s+2}{s^2-2s+5}$

*Ans)* $(s^2-2s+5)Y(s)=(5s^2+7s+2)X(s)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=5\frac{d^2x(t)}{dt^2}+7\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

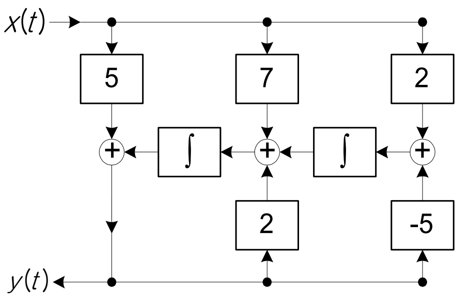
그런데 미분 방정식의 계수와 전달 함수의 계수가 동일하므로 구태여 미분 방정식을 구하는 중간 과정을 거치지 않고 전달 함수로부터 직접 제1 표준형 구현도를 그릴 수 있다.

(d) $H(s)=\dfrac{s^2-3s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$

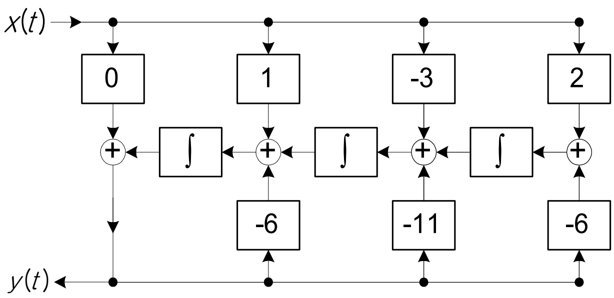
*Ans)* $(s^3+6s^2+11s+6)Y(s)=(s^2-3s+2)X(s)$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}-3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

그런데 미분 방정식의 계수와 전달 함수의 계수가 동일하므로 구태여 미분 방정식을 구하는 중간 과정을 거치지 않고 전달 함수로부터 직접 제1 표준형 구현도를 그릴 수 있다.




(c)




(d)

## [응용 문제]

10.21 인과 주기 신호의 라플라스 변환은 첫 번째 주기의 라플라스 변환을 알면 구해진다.

(a) 신호 $x(t)$의 첫 번째 주기만 떼어낸 신호를 $\hat{x}(t)$라고 하고 이의 라플라스 변환을 $\hat{X}(s)$라고 하면 $X(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\hat{X}(s)$가 됨을 보여라.

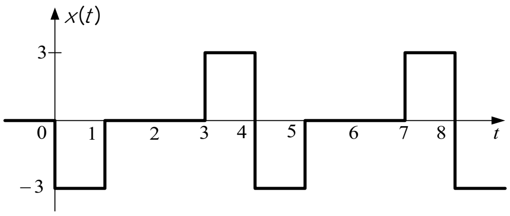
*Ans)* $x(t)=\hat{x}(t)+\hat{x}(t-T)+\hat{x}(t-2T)+\cdots+\hat{x}(t-nT)+\cdots$

이를 라플라스 변환하면, 시간 이동 성질에 의해

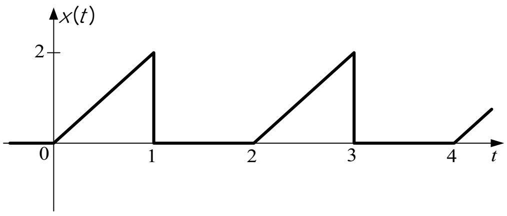
$$X(s)=\hat{X}(s)+\hat{X}(s)e^{-Ts}+\hat{X}(s)e^{-2Ts}+\cdots+\hat{X}(s)e^{-nTs}+\cdots$$

$$\therefore X(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\hat{X}(s)$$

(b) 다음 그림의 인과 주기 신호에 대한 라플라스 변환을 구하라.




(ㄱ)




(ㄴ)

*Ans)* (ㄱ) $x(t)$의 주기는 $T=4$이므로

$$\hat{X}(s)=\int_0^1(-3)e^{-st}dt+\int_3^4 3e^{-st}dt=\frac{3}{s}(e^{-s}-1)-\frac{3}{s}(e^{-4s}-e^{-3s})$$

$$\therefore\ X(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\hat{X}(s)=\frac{3}{s(1-e^{-4s})}(e^{-s}+e^{-3s}-e^{-4s}-1)$$

(ㄴ) $x(t)$의 주기는 $T=2$이므로

$$\hat{X}(s)=\int_0^1 te^{-st}dt\frac{1}{s}(\frac{1}{s}(1-e^{-s})-e^{-s})$$

$$\therefore\ X(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\hat{X}(s)=\frac{1}{s^2(1+e^{-s})}-\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

10.22 다음은 인과 주기 신호의 라플라스 변환이다. $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$를 구하여 그려라.

(a) $X(s)=\frac{1+sT}{s^2}-\frac{sT}{s^2(1-e^{-sT})}$

*Ans)* $X(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\frac{1-(1+sT)e^{-sT}}{s^2}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}X'(s)$

$X'(s)$를 라플라스 역변환하면

$$x'(t)=tu(t)-(t-T)u(t-T)-Tu(t-T)=t[u(t)-u(t-T)]$$

따라서 $x(t)$는 $x'(t)$를 주기 $T$로 반복한 주기 신호이다.

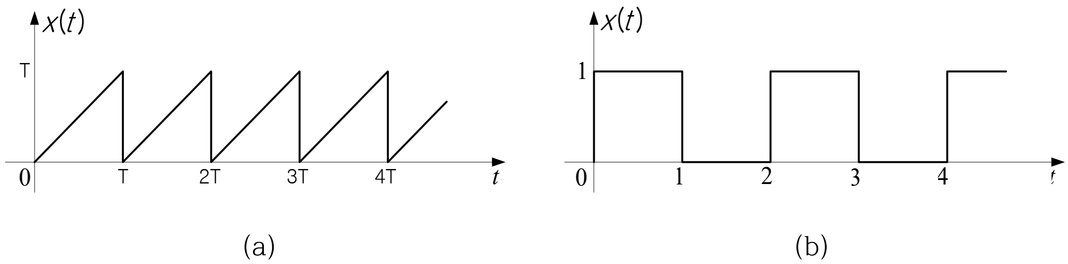
(b) $X(s) = \dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$

*Ans)* $X(s) = \dfrac{1}{1-e^{-2s}} \dfrac{1-e^{-s}}{s} = \dfrac{1}{1-e^{-2s}} X'(s)$

$X'(s)$를 라플라스 역변환하면

$$x'(t) = u(t) - u(t-1) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

따라서 $x(t)$는 $x'(t)$를 주기 $T=2$로 반복한 주기 신호이다.




10.23 $X(s) = \dfrac{s^3+2s^2+3s+2}{s^4+2s^3+2s^2+2s+2}$ 일 때 다음 신호의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $y(t) = 2x(2t)$

*Ans)* 시간 척도조절 성질에 의해

$$Y(s) = 2\frac{1}{2}X(\frac{s}{2}) = \frac{2(s^3+4s^2+12s+16)}{s^4+4s^3+8s^2+16s+32}$$

(b) $y(t) = tx(t)$

*Ans)* 주파수 미분 성질에 의해

$$Y(s) = -\frac{dX(s)}{ds} = \frac{s^6+4s^5+11s^4+16s^3+8s^2-2}{(s^4+2s^3+2s^2+2s+2)^2}$$

(c) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

*Ans)* 시간 미분 성질에 의해

$$Y(s) = sX(s) = \frac{s(s^3+2s^2+3s+2)}{s^4+2s^3+2s^2+2s+2}$$

(d) $y(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau$

*Ans)* 시간 적분 성질에 의해

$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s) = \frac{s^3+2s^2+3s+2}{s(s^4+2s^3+2s^2+2s+2)}$$

10.24 다음과 같이 주어지는 $X(s)$의 라플라스 역변환을 구하라.

(a) $X(s) = \dfrac{(2s+5)e^{-2s}}{s^2+5s+6}$

*Ans)* $X'(s)=\dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{s+3}=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$

$$x'(t)=(e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

$$\therefore\ x(t)=x'(t-2)=(e^{-2(t-2)}+e^{-3(t-2)})u(t-2)$$

(b) $X(s)=\dfrac{2e^{-3s}-e^{-2s}}{(s-2)(s+1)}$

*Ans)* $X'(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{K_1}{s+1}+\dfrac{K_2}{s-2}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\dfrac{\frac{1}{3}}{s-2}$

$$x'(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)=\frac{1}{3}(e^{2t}-e^{-t})$$

$$\therefore\ x(t)=\frac{2}{3}(e^{2(t-3)}-e^{-(t-3)})u(t-3)+\frac{1}{3}(e^{2(t-2)}-e^{-(t-2)})u(t-2)$$

(c) $X(s)=\dfrac{e^{-(s-1)}+3}{s^2-2s+5}$

*Ans)* $X(s)=\dfrac{e^{-(s-1)}+3}{s^2-2s+5}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}e^{-(s-1)}+\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}$

$e^{-(s-1)}$은 1만큼의 시간 지연에 해당한다. 따라서 $X(s)$를 라플라스 역변환하면

$$\therefore\ x(t)=\frac{1}{2}e^{(t-1)}\sin(2(t-1))u(t-1)+\frac{3}{2}e^{t}\sin(2t)u(t)$$

(d) $X(s)=\dfrac{(s^2+8)e^{-2s}}{s^3+16s}$

*Ans)* $X'(s)=\dfrac{s^2+8}{s(s^2+4^2)}=\dfrac{K_1}{s}+\dfrac{As+B}{s^2+4^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{s}+\dfrac{\frac{1}{2}s}{s^2+4^2}$

$$x'(t)=\frac{1}{2}(1-\cos(4t))u(t)=\sin^2(2t)u(t)$$

$$\therefore\ x(t)=\sin^2(2(t-2))u(t-2)$$

10.25 다음 미분 방정식을 라플라스 변환을 이용하여 영입력 응답+영상태 응답, 고유 응답+강제 응답 형태로 각각 풀어라.

(a) $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{x}(t),\quad y(0^-)=2,\ \dot{y}(0^-)=-3,\quad x(t)=u(t)$

*Ans)* $(s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-))+3(sY(s)-y(0^-))+2Y(s)=sX(s)$

$$Y(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

i) 영입력 응답+영상태 응답

$$Y(s)=\left(\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}\right)+\left(\frac{K_3}{s+1}+\frac{K_4}{s+2}\right)=\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right)+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)$$

$$\therefore\ y(t)=\underbrace{(e^{-t}+e^{-2t})u(t)}_{[\text{영입력 응답}]}+\underbrace{(e^{-t}-e^{-2t})u(t)}_{[\text{영상태 응답}]}$$

ii) 고유 응답+강제 응답

$$Y(s)=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}=\frac{2}{s+1}$$

$$\therefore\ y(t)=\underbrace{2e^{-t}u(t)}_{[\text{고유 응답}]}$$

이 문제의 경우는 극-영점 상쇄에 의해 시스템 모드 중에서 $e^{-2t}$는 나타나지 않고, 강제 응답은 0이다.

(b) $\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+4y(t)=\dot{x}(t)+x(t),\quad y(0^-)=2,\ \dot{y}(0^-)=1,\quad x(t)=e^{-t}u(t)$

*Ans)* $(s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-))+4(sY(s)-y(0^-))+4Y(s)=sX(s)+X(s)$

$$Y(s)=\frac{2s+9}{(s+2)^2}+\frac{s+1}{(s+2)^2(s+1)}$$

i) 영입력 응답+영상태 응답

$$Y(s)=\left(\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{(s+2)^2}\right)+\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)=\left(\frac{2}{s+2}+\frac{5}{(s+2)^2}\right)+\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)$$

$$\therefore\ y(t)=\underbrace{(2+5t)e^{-2t}u(t)}_{[\text{영입력 응답}]}+\underbrace{te^{-2t}u(t)}_{[\text{영상태 응답}]}$$

ii) 고유 응답+강제 응답

$$Y(s)=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{(s+2)^2}=\frac{2}{s+2}+\frac{6}{(s+2)^2}$$

$$\therefore\ y(t)=\underbrace{(2+6t)e^{-2t}u(t)}_{[\text{고유 응답}]}$$

이 문제의 경우는 영상태 응답의 극-영점 상쇄에 의해 강제 응답 항이 나타나지 않는다.

(c) $\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+25y(t)=\dot{x}(t)+2x(t),\ y(0^-)=\dot{y}(0^-)=1,\quad x(t)=25u(t)$

*Ans)* $(s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-))+6(sY(s)-y(0^-))+25Y(s)=sX(s)+2X(s)$

$$Y(s)=\frac{(s+3)+4}{(s+3)^2+4^2}+\frac{25(s+2)}{s((s+3)^2+4^2)}$$

i) 영입력 응답+영상태 응답

$$\begin{aligned}Y(s)&=\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}+\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right)+\left(\frac{K_1}{s}+\frac{K_2s+K_3}{(s+3)^2+4^2}\right)\\&=\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}+\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right)+\left(\frac{2}{s}-\frac{2(s+3)}{(s+3)^2+4^2}+\frac{19}{4}\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ y(t)=(\cos(4t)+\sin(4t))e^{-3t}u(t)+(2-(2\cos(4t)-\frac{19}{4}\sin(4t))e^{-3t})u(t)$$

$$\underbrace{\sqrt{2}e^{-3t}\cos(4t-\frac{\pi}{4})u(t)}_{[\text{영입력 응답}]}+\underbrace{(2-\frac{5\sqrt{17}}{4}e^{-3t}\cos(4t+\phi))u(t)}_{[\text{영상태 응답}]}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{19}{8}$$

ii) 고유 응답+강제 응답

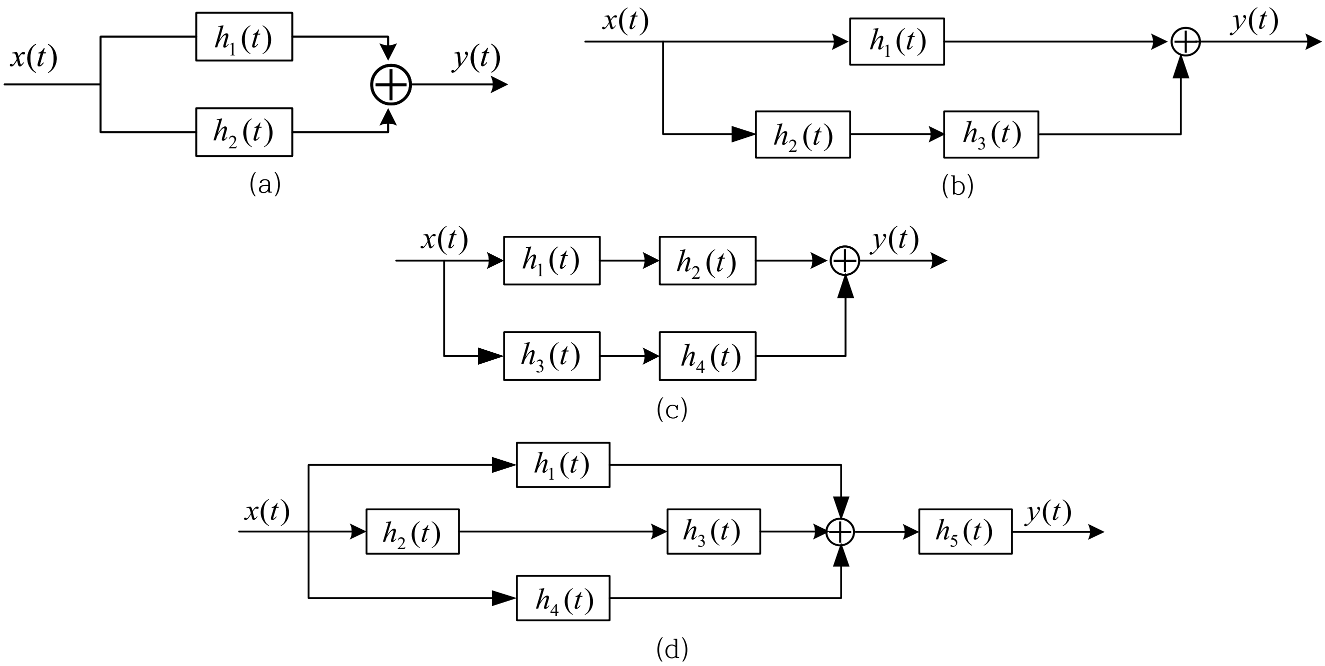
$$Y(s)=\left(\frac{K_1 s+K_2}{(s+3)^2+4^2}\right)+\left(\frac{K_3}{s}\right)=\left(\frac{-(s+3)+23}{(s+3)^2+4^2}\right)+\left(\frac{2}{s}\right)$$

$$\therefore\ y(t)=-(\cos(4t)-\frac{23}{4}\sin(4t))e^{-3t}u(t)\ +\ 2u(t)$$

$$\underbrace{-\frac{\sqrt{545}}{4}e^{-3t}\cos(4t+\theta)u(t)}_{[\text{고유 응답}]}\ +\ \underbrace{2u(t)}_{[\text{강제 응답}]}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{23}{4}$$

10.26 다음 그림의 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라.




(a) $h_1(t)=te^{-2t}u(t),\ h_2(t)=2e^{-2t}u(t)$

*Ans)* $H_1(s)=\dfrac{1}{(s+2)^2}$

$H_2(s)=\dfrac{2}{s+2}$

$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)=\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}=\frac{2s+5}{(s+2)^2}$$

$$\therefore\ h(t)=te^{-2t}u(t)+2e^{-2t}u(t)$$

(b) $h_1(t)=e^{-3t}u(t),\quad h_2(t)=e^{-2t}u(t),\quad h_3(t)=\delta(t-1)$

*Ans)* $H_1(s)=\dfrac{1}{s+3}$

$H_2(s)=\dfrac{1}{s+2}$

$H_3(s) = e^{-s}$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)H_3(s) = \frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{s+2}e^{-s} = \frac{(s+2)+(s+3)e^{-s}}{(s+2)(s+3)}$$

$\therefore\ h(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-2(t-1)}u(t-1)$

(c) $h_1(t) = e^{-3t}u(t),\quad h_2(t) = u(t),\quad h_3(t) = e^{-2t}u(t),\quad h_4(t) = \delta(t-1)$

*Ans)* $H_1(s) = \dfrac{1}{s+3}$

$H_2(s) = \dfrac{1}{s}$

$H_3(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$H_4(s) = e^{-s}$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) + H_3(s)H_4(s) = \frac{1}{s(s+3)} + \frac{1}{s+2}e^{-s} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right) + \frac{1}{s+2}e^{-s}$$

$\therefore\ h(t) = \dfrac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t) + e^{-2(t-1)}u(t-1)$

(d) $h_1(t) = e^{-2t}u(t),\quad h_2(t) = e^{-2t}u(t),\quad h_3(t) = e^{-t}u(t),\quad h_4(t) = \delta(t),\quad h_5(t) = e^{-3t}u(t)$

*Ans)* $H_1(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$H_2(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$H_3(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$H_4(s) = 1$

$H_5(s) = \dfrac{1}{s+3}$

$$H(s) = (H_1(s) + H_2(s)H_3(s) + H_4(s))H_5(s) = \left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + 1\right)\frac{1}{s+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right)$$

$\therefore\ h(t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

10.27 시스템의 전달 함수가 다음과 같을 때 시스템의 안정도를 판별하라.

(a) $H(s) = \dfrac{s-2}{s^2-3s+2}$

*Ans)* $\Delta(s) = s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2) = 0 \quad \rightarrow \quad s = 1,\ 2$

극이 $s$-평면의 우반면에 존재하므로 이 시스템은 불안정하다.

(b) $H(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$

*Ans)* $\Delta(s) = s^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j2$

극이 $s$-평면의 허축에 존재하므로 이 시스템은 임계 안정(불안정)하다.

(c) $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2-2s+5}$

*Ans)* $\Delta(s)=s^2-2s+5=0 \quad \rightarrow \quad s=1\pm j2$

극이 $s$-평면의 우반면에 존재하므로 이 시스템은 불안정하다.

(d) $H(s)=\dfrac{s-1}{s^2+s-2}$

*Ans)* 불안정 극은 상쇄되고 겉보기 전달함수는 $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

$\Delta(s)=s+2=0 \quad \rightarrow \quad s=-2$

극이 $s$-평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.

(e) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+4s+4}$

*Ans)* $\Delta(s)=s^2+4s+4=(s+2)^2=0 \quad \rightarrow \quad s=-2,\ -2$

극이 $s$-평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.

(f) $H(s)=\dfrac{s+2}{s^2+s}$

*Ans)* $\Delta(s)=s^2+s=s(s+1)=0 \quad \rightarrow \quad s=0,\ -1$

원점에 극이 하나 있으므로 이 시스템은 불안정하다.

(g) $H(s)=\dfrac{s^2+2}{s^2(s+1)}$

*Ans)* $\Delta(s)=s^2(s+1)=0 \quad \rightarrow \quad s=-1,\ 0,\ 0$

원점에 중극을 가지므로 이 시스템은 불안정하다.

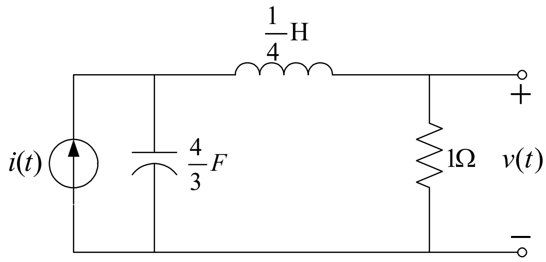
(h) $H(s)=\dfrac{s-1}{(s^2-1)(s^2-2s+2)}$

*Ans)* $H(s)=\dfrac{s-1}{(s-1)(s+1)(s^2-2s+2)}=\dfrac{1}{(s+1)(s^2-2s+2)} \quad \rightarrow \quad s=1$의 불안정 극 상쇄

$\Delta(s)=(s+1)(s^2-2s+2)=0 \quad \rightarrow \quad s=-1,\ 1\pm j1$

공액 복소극이 $s$-평면의 우반면에 존재하므로 이 시스템은 불안정하다.

10.28 다음과 같은 전기회로에 대해 물음에 답하라.




(a) 입력 $i(t)$와 출력 $v(t)$의 관계를 나타내는 회로 방정식(미분 방정식)을 세워 전달 함수를 구하라.

*Ans)* 회로 방정식은

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=3i(t)$$

$$(s^2+4s+3)V(s)=3I(s)$$

전달 함수는

$$H(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{3}{s^2+4s+3}$$

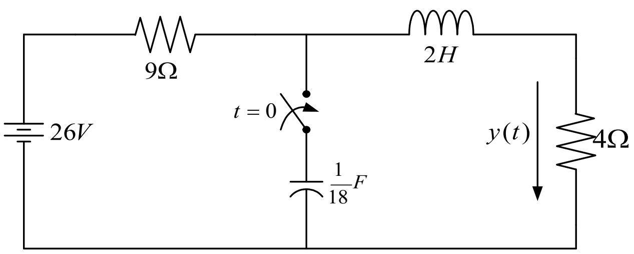
(b) $i(t)=u(t)$이고 $t<0$에서 모든 초기 조건이 0일 때, 출력 전압 $v(t)$를 구하라.

*Ans)* $V(s)=H(s)I(s)=\dfrac{3}{s^2+4s+3}\dfrac{1}{s}$

$$V(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}=\frac{1}{s}-\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$$

$$\therefore\ v(t)=(1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

10.29 다음 그림의 전기회로에서 스위치가 오랫동안 닫혀 있다가 $t=0$에서 순간적으로 열린다고 한다. $t\geq 0$에 대한 회로 방정식을 구하고 라플라스 변환을 이용하여 전류 $y(t)$를 구하라.




*Ans)* 스위치가 닫혀 있는 경우 회로 방정식은

$$\begin{cases} v_i(t)=9i_1(t)+18\displaystyle\int(i_1(t)-i_2(t))dt \\ 18\displaystyle\int(i_1(t)-i_2(t))dt=2\frac{di_2(t)}{dt}+4i_2(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}9s+18 & -18 \\ -18 & 2s^2+4s+18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1(s)\\ I_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\ 0\end{bmatrix}$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}9s+18 & 26 \\ -18 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}9s+18 & -18 \\ -18 & 2s^2+4s+18\end{vmatrix}}=\frac{26}{s((s+2)^2+3^2)}$$

따라서 스위치가 열리기 직전의 전류값은

$$y(0^-)=\lim_{s\to 0}sI_2(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{26}{s((s+2)^2+3^2)}=2$$

$t=0$ 순간에 스위치를 열었을 때 회로 방정식은

$$v_i(t)=2\frac{dy(t)}{dt}+13y(t)$$

$$\frac{26}{s}=2sY(s)-2y(0^-)+13Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{26}{s(2s+13)} + \frac{2y(0^-)}{2s+13} = \left[\frac{2}{s} - \frac{4}{2s+13}\right] + \frac{4}{2s+13}$$

$\therefore\ y(t) = 2$

※ 위에서 보면 과도 응답은 상쇄되어 사라진다. 물리적으로 따져 보면, 스위치가 닫혀 있을 때 충분한 시간이 지나면 커패시터가 완전히 충전되어 그 지로로는 전류가 흐르지 않아 스위치를 열지 않더라도 개방된 것과 같은 효과를 가진다. 또한 인덕터는 직류 전압에 대해 정상상태에서 단락시킨 것과 같이 동작하므로 회로 전류는 입력 전압값을 회로 저항으로 나눠준 것과 같게 된다.

10.30 다음의 각 항에 나타낸 성질을 만족하는 2차 시스템의 전달 함수 $H(s)$를 하나 구하고 극과 영점을 나타내어라.

(a) 시스템이 안정하다.

*Ans)* $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

극 : $s = -1,\ -2$

(b) 시스템이 불안정하다.

*Ans)* $H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$

극 : $s = 1,\ -2$

(c) 시스템의 고유 응답이 감쇠 정현파를 포함한다.

*Ans)* $H(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \quad \rightarrow \quad h(t) = 2e^{-t}\sin(t)u(t)$

극 : $s = -1 \pm j1$

(d) 시스템의 고유 응답이 감쇠 정현파를 포함하지 않는다.

*Ans)* $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \rightarrow \quad h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

극 : $s = -1,\ -2$

(e) 시스템의 고유 응답이 비감쇠 정현파를 포함한다.

*Ans)* $H(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \rightarrow \quad h(t) = \cos(2t)u(t)$

극 : $s = \pm j2$

영점 : $s = 0$

(f) 시스템의 주파수 응답이 아주 높은 주파수에서는 거의 0으로 접근한다.

*Ans)* $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

극 : $s = -1,\ -2$

$$\because\ H(s)\big|_{s=j\infty} = \left.\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=j\infty} = 0$$

(g) 시스템의 주파수 응답이 아주 높은 주파수에서 어떤 상수로 접근한다.

*Ans)* $H(s)=\dfrac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}$

극 : $s=-1,\ -2$

영점 : $s=0,\ -3$

$$\because\ H(s)\big|_{s=j\infty}=\left.\frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=j\infty}=1$$