제7장 연속 시간 푸리에 급수

[개념 정리]

7.1 신호의 변환에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 신호를 주파수 영역으로 표현 변환하면 신호의 고유한 특성이 달라진다.
㉯ 변환을 위한 기저 신호가 직교하면 신호의 변환 표현을 구하기가 매우 쉽다.
㉰ 변환을 위한 기저 신호는 유일하게 결정된다.
㉱ 주파수 영역 변환을 위한 기저 신호는 주파수와 다대일 대응 관계를 갖는 것이 좋다.

Ans) ㉯

7.2 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 주기 T인 주기 신호는 $\omega = \dfrac{3\pi}{T}$와 $\omega = \dfrac{9\pi}{T}$의 주파수 성분을 갖는다.
㉯ 5고조파의 주파수가 10π인 주기 신호의 주기는 $T=1$이다.
㉰ DC 성분과 기본파는 서로 직교한다.
㉱ 홀수 고조파와 짝수 고조파는 서로 직교한다.

Ans) ㉮

7.3 푸리에 급수의 등가 표현에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 같은 주파수에 대한 간결형 삼각 함수 형식과 지수 함수 형식의 진폭 스펙트럼은 다르다.
㉯ 같은 주파수에 대한 간결형 삼각 함수 형식과 지수 함수 형식의 위상 스펙트럼은 같다.
㉰ 지수 함수 형식 푸리에 표현과 간결형 삼각 함수 푸리에 표현으로 계산한 전력은 다르다.
㉱ 지수 함수 형식 푸리에 표현의 위상 스펙트럼은 항상 기대칭이다.

Ans) ㉰

7.4 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $\tan(\pi t)$는 푸리에 급수 표현이 불가능하다.
㉯ 기대칭 주기 신호의 고조파의 위상은 0 또는 $\pm\pi$이다.
㉰ 우대칭 주기 신호의 고조파의 위상은 0 또는 $\pm\pi$이다.
㉱ 푸리에 계수 $X_k = jka,\ k=$홀수인 주기 신호의 파형은 기대칭을 만족한다.

Ans) ㉯

기대칭 주기 신호의 스펙트럼은 순 허수이므로 $\pm\dfrac{\pi}{2}$의 위상을 갖는다.

7.5 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 주기 신호의 스펙트럼은 불연속적이다.
㉯ 스펙트럼이 같으면 같은 신호이다.
㉰ 지수함수 형식 푸리에 표현의 푸리에 계수를 X_k라고 하면 스펙트럼으로부터 조파 합성된 신호는

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |X_k| \cos(k\omega_0 t + \angle X_k)$$이다.

㉱ 대칭성을 만족하지 않는 실수 신호의 푸리에 계수는 복소수이다.

Ans) ㉰

7.6 진폭 스펙트럼에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 진폭이 같으면 주기 삼각파의 3고조파와 주기 사각 펄스의 3고조파의 진폭 스펙트럼은 같다.

㉯ 수없이 많은 고조파를 더해도 정확한 사각 펄스를 만들 수 없다.

㉰ 전파 정류회로의 출력이 사각 펄스 주기 신호에 비해 진폭 스펙트럼이 감쇠가 급격하다.

㉱ 진폭 스펙트럼을 보면 그 신호를 만들기 위해 얼마나 많은 정현파가 필요한지 알 수 있다.

Ans) ㉮

삼각파가 사각 펄스보다 파형이 완만(정현파에 더 가까움)하므로 진폭 스펙트럼의 감쇠가 급격하다. 따라서 3고조파의 크기도 더 작게 된다.

7.7 위상 스펙트럼에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 위상 스펙트럼과 상관없이 진폭 스펙트럼이 같으면 같은 신호이다.

㉯ $x(t)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)+\cos(2\pi t)$을 시간 지연시키면 두 코사인 성분은 같은 위상 뒤짐을 갖는다.

㉰ 사각 펄스 주기 신호의 불연속점에서 홀수 고조파는 $+$에서 $-$로 짝수 고조파는 $-$에서 $+$로 부호가 바뀐다.

㉱ 위상 스펙트럼에 따라서 조파 합성된 신호의 파형이 달라진다.

Ans) ㉱

7.8 푸리에 급수 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$와 관련한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $x(t-2)$의 푸리에 계수는 $e^{jk\frac{4\pi}{T}}X_k$이다.

㉯ 주기를 2배로 바꾸게 되면 홀수 고조파 성분은 없다.

㉰ $x(t+2)$의 진폭 스펙트럼은 $|X_k|$로 변하지 않는다.

㉱ $x(t)+2$의 DC 성분은 X_0+2, 3고조파 성분은 X_3이다.

Ans) ㉮

주기를 2배로 바꾸면 새로운 기본 주파수가 원래의 기본 주파수의 반이 되므로 원래 신호의 고조파는 새로운 기본 주파수에 대해서는 짝수 고조파가 된다. 주기만 바꾼다고 새로운 주파수 성분이 생기는 것은 아니다.

7.9 주기 신호의 전력에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 시간 영역에서 구한 전력과 주파수 영역에서 구한 전력은 같다.

㉯ 홀수 고조파와 짝수 고조파 사이에는 전력이 형성되지 않는다.

㉰ 홀수 고조파끼리는 전력을 형성한다.

㉱ $x(t)=\sqrt{2}\cos(t)+3\sqrt{2}\cos(3t)$의 전력은 10이다.

Ans) ㉰

7.10 한 주기 파형이 $x(t)=\sin(\pi t)$, $0\le t\le 1$인 주기 신호의 푸리에 급수 표현에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 위상이 0이므로 진폭 스펙트럼만 나타내면 된다.

㉯ 직접 푸리에 급수 전개를 하지 않고 한 주기 파형이 $s(t)=\begin{cases}\sin(\pi t), & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2\end{cases}$인 주기 신호의 푸리에 급수 표현으로부터 푸리에 급수 표현을 구할 수 있다.

㉰ 진폭 스펙트럼에서 DC 성분이 가장 크다.

㉱ 주기를 2배로 바꾸어 푸리에 급수 전개하면 짝수 고조파만 갖는다.

Ans) ㉮

$x(t)=s(t)+s(t-1)$이므로 선형성과 시간 이동 성질을 이용해 반파정류 회로 출력의 푸리에 급수로부터 전파정류 회로 출력 푸리에 급수를 구할 수 있다. 주기를 2배로 바꾸면 새로운 기본 주파수가 원래의 기본 주파수의 반이 되므로 원래 신호의 고조파는 새로운 기본 주파수에 대해서는 짝수 고조파가 되어 홀수 고조파는 없게 된다.

[기초 문제]

7.11 다음의 주기 신호에 대하여 기본 주파수 ω_0의 값을 구하고, 지수 함수 형식 푸리에 급수로 전개하라.

(a) $x(t)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$

Ans) $T=4$, $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ [rad/sec]

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}t}+2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$\therefore\ X_{-1}=2e^{-j\frac{\pi}{4}},\quad X_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

(b) $x(t)=\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

Ans) $T=\pi$, $\omega_0=2$ [rad/sec]

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{j\pi}e^{-j\frac{3\pi}{4}}e^{-j2t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk2t}$$

$$\therefore\ X_{-1}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},\quad X_1=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

(c) $x(t)=\cos(2\pi t)+\cos(3\pi t)$

Ans) $x(t)$의 기본 주파수 ω_0는 두 정현파 성분의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0=\pi$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{j3\pi t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\pi t}$$

$$\therefore\ X_{-3}=\frac{1}{2},\quad X_{-2}=\frac{1}{2},\quad X_2=\frac{1}{2},\quad X_3=\frac{1}{2}$$

(d) $x(t)=\sin(2t)+\cos(4t)$

Ans) $x(t)$의 기본 주파수 ω_0는 두 정현파 성분의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0=2$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-j4t}-\frac{1}{2j}e^{-j2t}+\frac{1}{2j}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{j4t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{j2kt}$$

$$\therefore\ X_{-2}=\frac{1}{2},\ \ X_{-1}=-\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\ \ X_1=\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\ \ X_2=\frac{1}{2}$$

(e) $x(t)=10e^{j(2\pi t-\frac{\pi}{3})}$

Ans) $x(t)$는 이미 복소 지수 함수 형식으로 표현되어 있어서 그 자체로 푸리에 급수 전개한 결과이다.

따라서 기본 주파수는 $\omega_0=2\pi$

$$x(t)=10e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi t}=X_1e^{j\omega_0 t}$$

$$\therefore\ X_1=10e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

(f) $x(t)=\sin(2\pi t)+e^{-j6\pi t}$

Ans) $x(t)$의 기본 주파수 ω_0는 두 성분의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0=2\pi$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=e^{j2\pi(-3)t}+\frac{1}{j2}e^{j2\pi(-1)t}+(-\frac{1}{j2})e^{j2\pi(1)t}$$

$$\therefore\ X_{-3}=1,\quad X_{-1}=-\frac{1}{j2}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\quad X_1=\frac{1}{j2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

7.12 다음 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하고, 스펙트럼을 그려라.

(a) $x(t)=8\cos(12\pi t+\frac{\pi}{3})+6\sin(20\pi t+\frac{\pi}{6})$

Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=4e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j12\pi t}+4e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j12\pi t}+3e^{-j\pi}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j20\pi t}+3e^{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j20\pi t}$$

기본 주파수 ω_0는 12π와 20π의 최대공약수로 $\omega_0=4\pi$

$$\begin{aligned}x(t)&=3e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j20\pi t}+4e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j12\pi t}+4e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j12\pi t}+3e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j20\pi t}\\&=X_{-5}e^{-j5\omega_0 t}+X_{-3}e^{-j3\omega_0 t}+X_3e^{j3\omega_0 t}+X_5e^{j5\omega_0 t}\end{aligned}$$

$$\therefore\ X_{-5}=3e^{j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_{-3}=4e^{j\frac{\pi}{4}},\qquad X_3=4e^{-j\frac{\pi}{4}},\qquad X_5=3e^{-j\frac{5\pi}{6}}$$

(b) $x(t)=2\cos(7\pi t-\frac{\pi}{4})-4\cos(11\pi t+\frac{\pi}{3})$

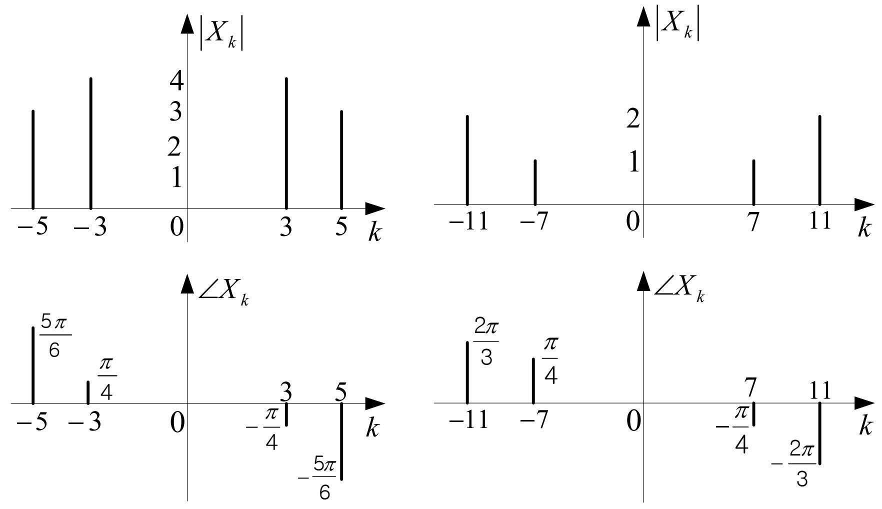
Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j7\pi t}+e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j7\pi t}+2e^{-j\pi}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j11\pi t}+2e^{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j11\pi t}$$

기본 주파수 ω_0는 7π와 11π의 최대공약수로 $\omega_0 = \pi$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{-j11\pi t} + e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j7\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j7\pi t} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{j11\pi t} \\ &= X_{-11}e^{-j11\omega_0 t} + X_{-7}e^{-j7\omega_0 t} + X_7 e^{-j7\omega_0 t} + X_{11}e^{j11\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\therefore\ X_{-11} = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}, \qquad X_{-7} = e^{j\frac{\pi}{4}}, \qquad X_7 = e^{-j\frac{\pi}{4}}, \qquad X_{11} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$



(a) (b)

(c) $x(t) = \sin(3\pi t)\cos(5\pi t)$

Ans) $x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(8t - \frac{\pi}{2})$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j8t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2t} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j8t}$$

기본 주파수는 $\omega_0 = 2$이고, 기본파($|X_1| = \frac{1}{4}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$), 4고조파($|X_4| = \frac{1}{4}$, $\phi_4 = -\frac{\pi}{2}$)가 존재한다. 음의 주파수 성분에 대해서는 $|X_{-k}| = |X_k|$, $\phi_{-k} = -\phi_k$를 만족한다.

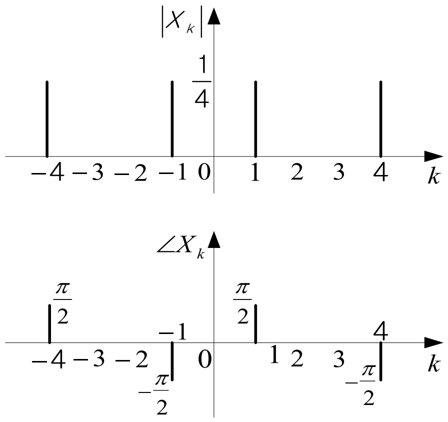
(d) $x(t) = \cos^3(\pi t)$

Ans) $x(t) = \cos^3(\pi t) = \frac{3}{4}\cos(\pi t) + \frac{1}{4}\cos(3\pi t)$

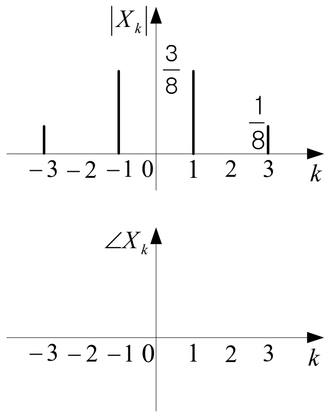
오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{8}e^{-j3\pi t} + \frac{3}{8}e^{-j\pi t} + \frac{3}{8}e^{j\pi t} + \frac{1}{8}e^{j3\pi t}$$

기본 주파수는 $\omega_0 = \pi$이고, 기본파($|X_1| = \frac{3}{8}$, $\phi_1 = 0$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{8}$, $\phi_3 = 0$)가 존재한다. 음의 주파수 성분에 대해서는 $|X_{-k}| = |X_k|$, $\phi_{-k} = -\phi_k$를 만족한다.



(c)



(d)

(e) $x(t) = 1 + 4\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos(2t) + \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j3t} + e^{j\pi}e^{-j2t} + 2e^{j\frac{3\pi}{4}}e^{-jt} + 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}}e^{jt} + e^{-j\pi}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j3t}$$

기본 주파수는 $\omega_0 = 1$이고, DC($X_0 = 1$), 기본파($|X_1| = 2$, $\phi_1 = -\frac{3\pi}{4}$), 2고조파($|X_2| = 1$, $\phi_2 = -\pi$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{2}$, $\phi_3 = -\frac{\pi}{6}$)가 존재한다. 음의 주파수 성분에 대해서는 $|X_{-k}| = |X_k|$, $\phi_{-k} = -\phi_k$를 만족한다.

(f) $x(t) = 3 + \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) + \sin(3t) - \frac{1}{2}\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$

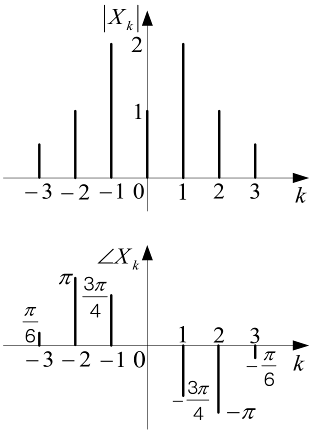
Ans) 2고조파에 대해 삼각함수 합성 공식을 이용하여 정리하면

$$x(t) = 3 + 2\cos(2t - \frac{\pi}{6}) + \cos(3t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos\left(5t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

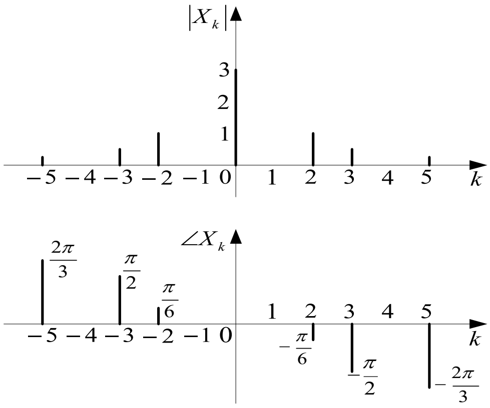
오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{-j5t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j3t} + e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j2t} + 3 + e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j3t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{j5t}$$

기본 주파수는 $\omega_0 = 1$이고, DC($X_0 = 3$), 2고조파($|X_2| = 1$, $\phi_2 = -\frac{\pi}{6}$), 3고조파($|X_3| = \frac{1}{2}$, $\phi_3 = -\frac{\pi}{2}$), 5고조파($|X_5| = \frac{1}{4}$, $\phi_5 = -\frac{2\pi}{3}$)가 존재한다. 음의 주파수 성분에 대해서는 $|X_{-k}| = |X_k|$, $\phi_{-k} = -\phi_k$를 만족한다.



(e)



(f)

7.13 어떤 주기 신호의 지수함수 형식 푸리에 급수가 다음과 같다.

$$x(t) = (2+j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-j2)e^{j3t}$$

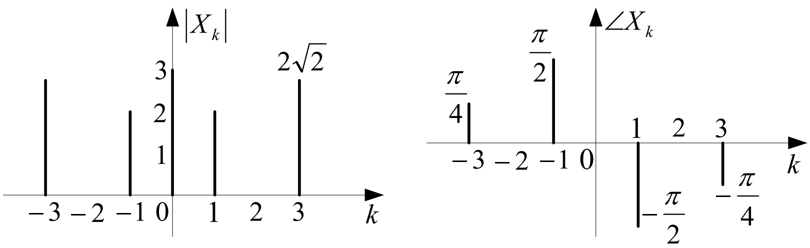
(a) 지수 함수 형식 푸리에 스펙트럼을 그려라.

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = 1$

$$X_{-3} = 2+j2 = \sqrt{2^2+2^2}\,e^{j\tan^{-1}\frac{2}{2}} = 2\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad X_1 = -j2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

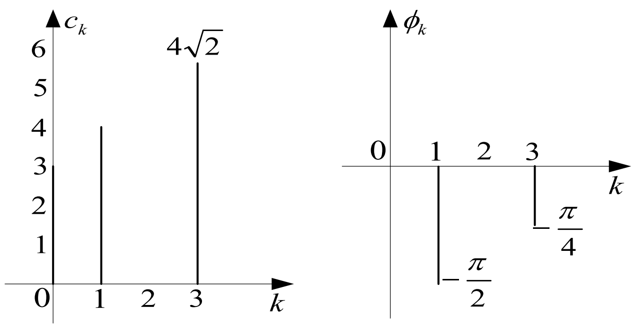
$$X_{-1} = j2 = 2e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad X_3 = 2-j2 = \sqrt{2^2+2^2}\,e^{-j\tan^{-1}\frac{2}{2}} = 2\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$X_0 = 3$$



(b) (a)의 결과로부터 삼각함수 형식 푸리에 스펙트럼을 그려라.

Ans) $c_0 = X_0$, $c_k = 2|X_k|$, $\phi_k = \angle X_k$이므로



(c) (b)의 스펙트럼을 보고 $x(t)$의 간결형 삼각함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) 스펙트럼으로부터

$$x(t) = 3 + 4\cos(t - \frac{\pi}{2}) + 4\sqrt{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$$

7.14 주기 신호의 지수함수 형식 푸리에 급수가 다음과 같을 때, 실수 주기 신호를 구하라.

(a) $x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j3\pi t} + 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\pi t} + 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j3\pi t}$

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \pi$

$$\begin{cases} X_{-3} = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ X_{-1} = 2e^{j\frac{\pi}{3}} \\ X_0 = 3 \\ X_1 = 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ X_3 = 2 - j2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

X_k, $k > 0$을 이용하여 다음과 같이 바로 $x(t)$를 구할 수 있다.

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 3 + 4\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) $x(t) = -je^{-j4\pi t} + (1 - j1)e^{-j2\pi t} + 2 + (1 + j1)e^{j2\pi t} + je^{j4\pi t}$

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = 2\pi$

$$\begin{cases} X_{-2} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ X_{-1} = 1 - j1 = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{1}} = \sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ X_0 = 2 \\ X_1 = 1 + j1 = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{j\tan^{-1}\frac{1}{1}} = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \\ X_2 = j = e^{j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

X_k, $k > 0$을 이용하여 다음과 같이 바로 $x(t)$를 구할 수 있다.

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = 2 + 2\sqrt{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(c) $x(t) = \frac{1}{j2}e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j5t} + \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{-j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-jt} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} e^{jt} + \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{6}} e^{j2t} - \frac{1}{j2}e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j5t}$

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = 1$

$$X_{-5} = \frac{1}{j2}e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}}, \qquad X_{-2} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}, \qquad X_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

$$X_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \qquad X_2 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{6}}, \qquad X_5 = -\frac{1}{j2}e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}$$

X_k, $k > 0$을 이용하여 다음과 같이 바로 $x(t)$를 구할 수 있다.

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \angle X_k) = \cos(t + \frac{\pi}{4}) + 2\sqrt{2}\cos(2t + \frac{\pi}{6}) + \cos(5t + \frac{5\pi}{6})$$

(d) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-j4\pi t}+j\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+(\sqrt{3}-j1)e^{-j\pi t}+1+(\sqrt{3}+j1)e^{j\pi t}-j\frac{1}{2}e^{j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{j4\pi t}$

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0=\pi$

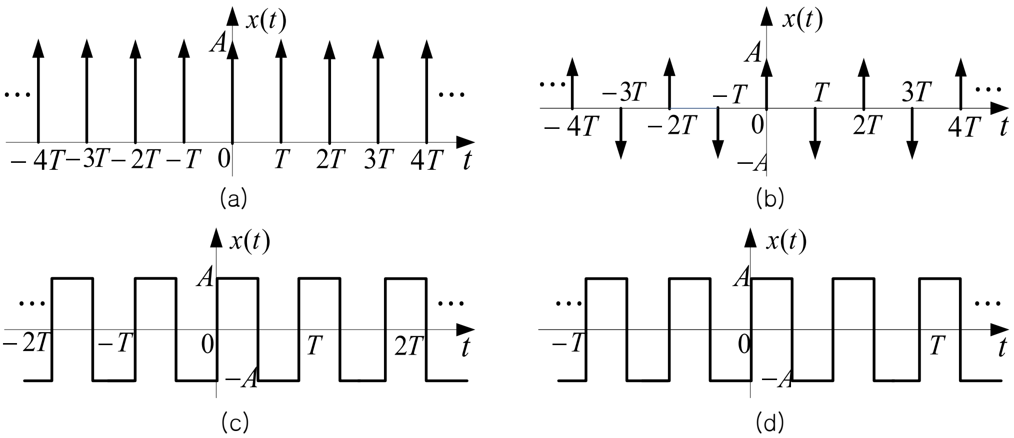
$$X_{-4}=\frac{1}{2},\qquad X_{-3}=j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\qquad X_{-1}=-\sqrt{3}+j1=2e^{j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_0=1,$$

$$X_1=-\sqrt{3}-j1=2e^{-j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_3=-j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\qquad X_4=\frac{1}{2}$$

$X_k,\ k>0$을 이용하여 다음과 같이 바로 $x(t)$를 구할 수 있다.

$$x(t)=X_0+\sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t+\angle X_k)=1+4\cos(\pi t-\frac{5\pi}{6})+\cos(3\pi t-\frac{\pi}{2})+\cos(4\pi t)$$

7.15 다음 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하고 스펙트럼을 그려라.



(a)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$$X_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}A\,\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{A}{T}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{A}{T}e^{jk\omega_0 t}$$

스펙트럼은 $|X_k|=\frac{A}{T}$ & $\angle X_k=0$

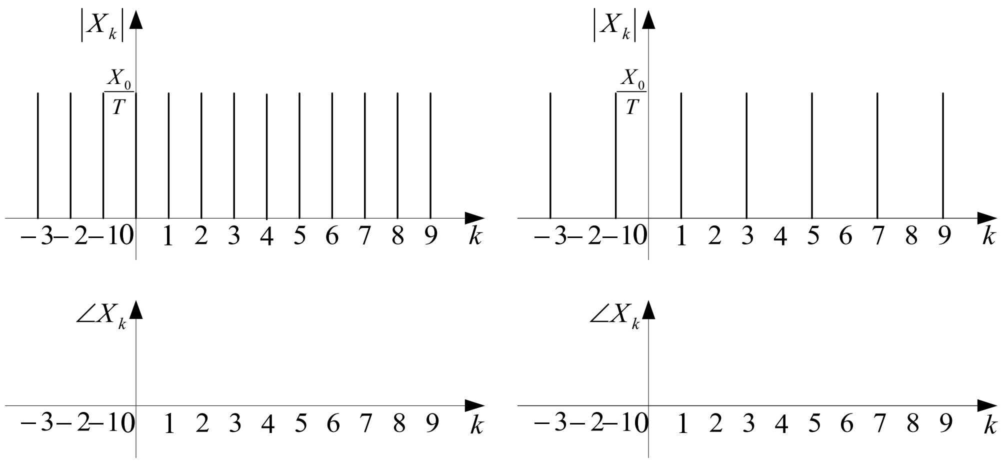
(b)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T}$

$$X_k=\frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}}A\,(\delta(t)-\delta(t-T))e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{A}{2T}(1-e^{-jk\pi})$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{A}{2T}(1-e^{-jk\pi})e^{jk\omega_0 t}$$

스펙트럼은 $|X_k|=\begin{cases}\frac{A}{T}, & k=\text{홀수}\\ 0, & k=\text{짝수}\end{cases}$ & $\angle X_k=0$



(a) (b)

(c)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{X_0}{jk\pi}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} -j\frac{2X_0}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=\text{홀수}} -j\frac{2X_0}{k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

스펙트럼은 $|X_k| = \begin{cases} \frac{2X_0}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$ & $\angle X_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$

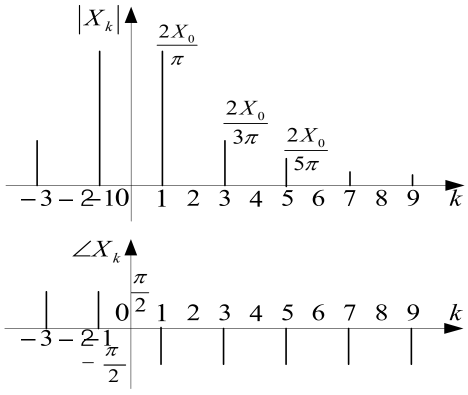
(d)

Ans) (c)와 같은 파형이며, 단지 주기만 2배로 바뀌었다. 따라서 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$이다. 따라서 (c)의 푸리에 계수는 이 파형의 푸리에 계수의 짝수 고조파가 되고 홀수 고조파는 0이 된다.

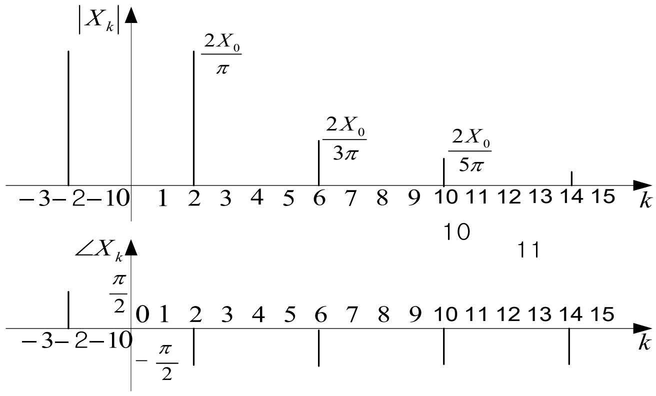
$$X_k = \begin{cases} -j\frac{2X_0}{k\pi}, & k = 4m+2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=4m+2} -j\frac{2X_0}{k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

스펙트럼은 $|X_k| = \begin{cases} \frac{2X_0}{k\pi}, & k = 4m+2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$ & $\angle X_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k = 4m+2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$

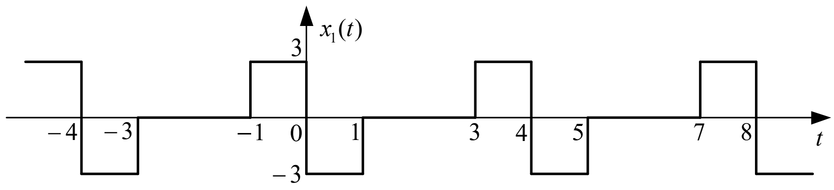


(c)



(d)

7.16 다음 그림의 신호들에 대한 지수함수 형식 푸리에 급수 전개를 구하라.



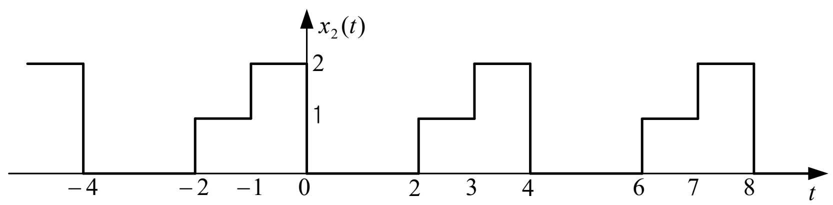
(a)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt = -\frac{3}{jk\pi} + \frac{3}{jk\pi}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = j\frac{3}{k\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$\therefore\ X_k = \begin{cases} j\frac{3}{k\pi}, & k = 1,\ 3,\ 5\ \cdots \\ j\frac{6}{k\pi}, & k = 2,\ 6,\ 10\ \cdots \\ 0, & k = 4,\ 8,\ 12,\ \cdots \end{cases}$$

$$X_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^1 (-3)\,dt + \int_3^4 3\,dt\right) = \frac{1}{4}\left(-3t\Big|_0^1 + 3t\Big|_3^4\right) = 0$$

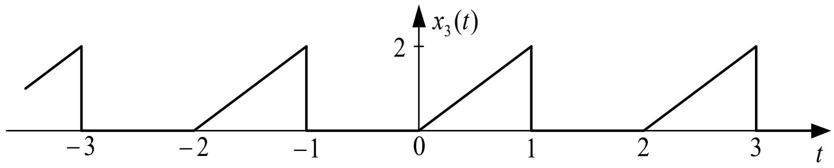


(b)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = j\frac{1}{2k\pi}\left(-e^{-jk\frac{3}{2}\pi} - e^{-jk\pi} + 2e^{j2k\pi}\right)$$

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_2^3 dt + \frac{1}{4}\int_3^4 2\,dt = \frac{3}{4}$$



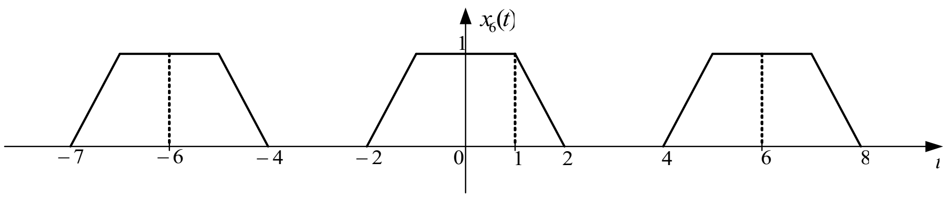
(c)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\pi t}\,dt \equiv j\frac{e^{-jk\pi}}{k\pi} + \frac{e^{-jk\pi}}{k^2\pi^2} - \frac{1}{k^2\pi^2}$$

$$※ \int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$X_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,dt = \frac{1}{2}$$



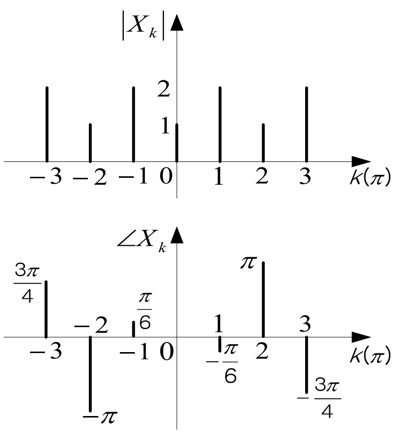
(d)

Ans) 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

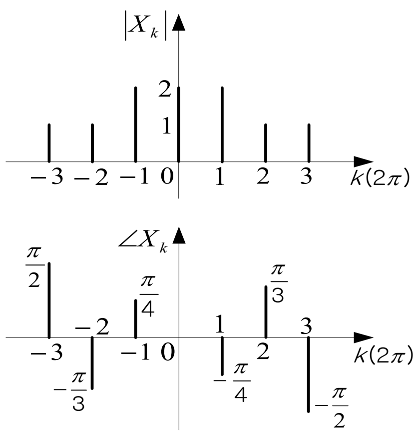
$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -j\frac{1}{k\pi} - \frac{3}{k^2\pi^2}e^{-jk\frac{\pi}{3}}\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} - 1\right)$$

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 dt + \int_1^2 (-t+2)\,dt\right) = \frac{3}{4}$$

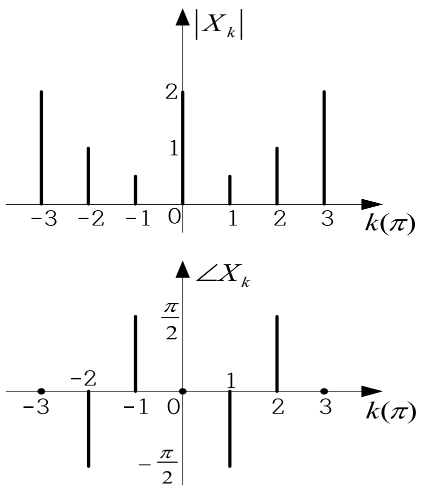
7.17 주기 신호의 스펙트럼이 다음 그림과 같을 때, 주기 신호를 구하라.



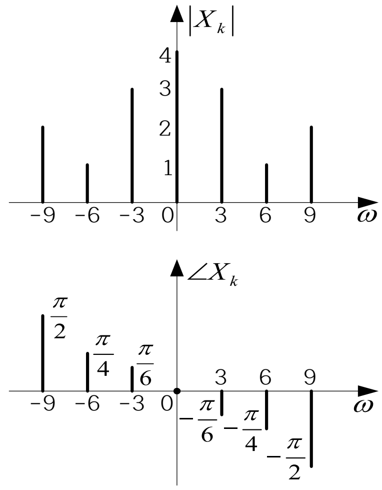
(a)



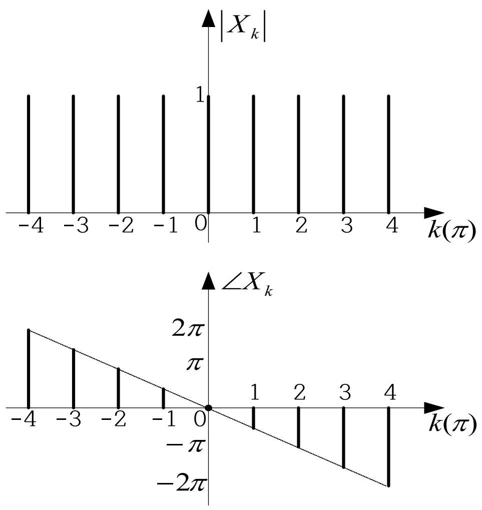
(b)



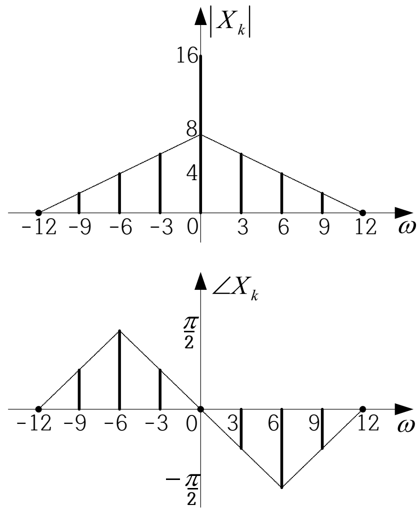
(c)



(d)



(e)



(f)

Ans)

(a) 기본주파수 $\omega_0 = \pi$

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \angle X_k)$$
$$= 1 + 4\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos(2\pi t) + 4\cos\left(3\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

(b) 기본주파수 $\omega_0 = 2\pi$

$$x(t) = X_0 + \sum_k 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \angle X_k)$$
$$= 2 + 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(6\pi t)$$

(c) $\omega_0 = \pi$ & 그림의 스펙트럼으로부터

$$X_{-3} = 2,\quad X_{-2} = e^{-j\frac{\pi}{2}},\quad X_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\quad X_0 = 2,\quad X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\quad X_2 = e^{j\frac{\pi}{2}},\quad X_3 = 2$$

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}\left(e^{j(\pi t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\pi t - \frac{\pi}{2})}\right) + \left(e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\pi t - \frac{\pi}{2})}\right) + 2\left(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}\right)$$

오일러 공식을 이용하여

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos(\pi t - \frac{\pi}{2}) + 2\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) + 4\cos(3\pi t) \\ &= 2 + \sin(\pi t) - 2\sin(2\pi t) + 4\cos(3\pi t) \end{aligned}$$

(d) $\omega_0 = 1$ & 그림의 스펙트럼으로부터

$$X_{-9} = 2e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_{-6} = e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_{-3} = 3e^{j\frac{\pi}{6}}, \quad X_0 = 4,$$

$$X_3 = 3e^{-j\frac{\pi}{6}}, \quad X_6 = e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad X_9 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$x(t) = 4 + 3\left(e^{j(3t - \frac{\pi}{6})} + e^{-j(3t - \frac{\pi}{6})}\right) + \left(e^{j(6t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(6t - \frac{\pi}{4})}\right) + 2\left(e^{j(9t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(9t - \frac{\pi}{2})}\right)$$

오일러 공식을 이용하여

$$\begin{aligned} x(t) &= 4 + 6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{2}) \\ &= 4 + 6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 4\sin(9t) \end{aligned}$$

(e) $\omega_0 = \pi$ & 그림의 스펙트럼으로부터

$$X_{-4} = e^{j2\pi}, \quad X_{-3} = e^{j\frac{3\pi}{2}}, \quad X_{-2} = e^{j\pi}, \quad X_{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_0 = 1,$$

$$X_1 = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_2 = e^{-j\pi}, \quad X_3 = e^{-j\frac{3\pi}{2}}, \quad X_4 = e^{-j2\pi}$$

$$x(t) = \sum_{k=-4}^{4} e^{-jk\frac{\pi}{2}} e^{jk\pi t} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}(t-\frac{1}{2})}\left(e^{j\frac{9\pi}{2}(t-\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{9\pi}{2}(t-\frac{1}{2})}\right)}{e^{j\frac{\pi}{2}(t-\frac{1}{2})}\left(e^{j\frac{\pi}{2}(t-\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{\pi}{2}(t-\frac{1}{2})}\right)}$$

오일러 공식을 이용하여

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{9\pi}{2}t - \frac{9\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\frac{9\pi}{2}t - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4})}$$

(f) $\omega_0 = 1$ & 그림의 스펙트럼으로부터

$$X_{-9} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_{-6} = 4e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_{-3} = 6e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad X_0 = 16,$$

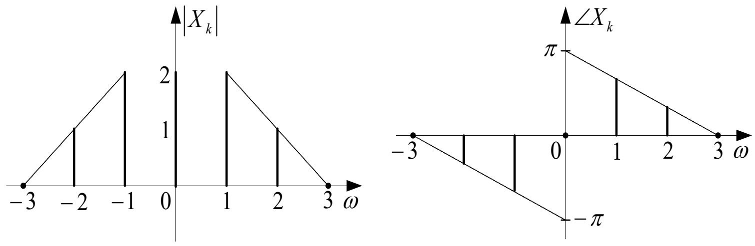
$$X_3 = 6e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad X_6 = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_9 = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$x(t) = 16 + 6\left(e^{j(3t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(3t - \frac{\pi}{4})}\right) + 4\left(e^{j(6t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(6t - \frac{\pi}{2})}\right) + 2\left(e^{j(9t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(9t - \frac{\pi}{4})}\right)$$

오일러 공식을 이용하여

$$\begin{aligned} x(t) &= 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4}) \\ &= 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\sin(6t) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

7.18 다음 그림은 주기 신호 $x(t)$의 지수함수 형식 푸리에 스펙트럼이다.



(a) 진폭 스펙트럼 (b) 위상 스펙트럼

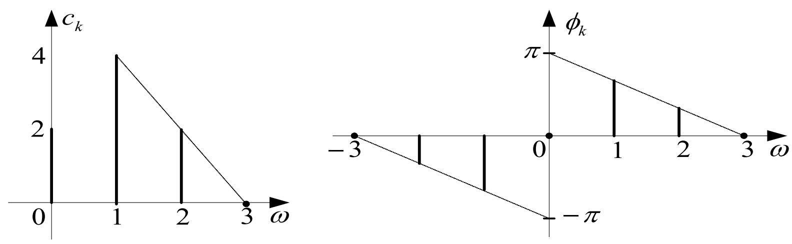
(a) 그림을 보고 $x(t)$의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $\omega_0 = 1$

$$x(t) = \sum_{k=-2}^{2} |X_k| e^{j\angle X_k} e^{jkt} = e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2t} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{-jt} + 2 + 2e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{jt} + e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2t}$$

(b) 그림을 보고 $x(t)$의 삼각함수 형식 푸리에 스펙트럼을 그려라.

Ans) $c_k = 2|X_k|$ & $\phi_k = \angle X_k$



(a) 진폭 스펙트럼 (b) 위상 스펙트럼

(c) (b)의 결과를 보고, $x(t)$의 삼각 함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $\omega_0 = 1$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{2} c_k \cos(kt + \phi_k) = 2 + 4\cos(t + \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(2t + \frac{\pi}{3})$$

(d) (a)와 (c)에서 구한 급수들이 같다는 것을 보여라.

Ans) (a)에서 구한 지수 함수 형식 푸리에 급수를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + 2\left(e^{j(t+\frac{2\pi}{3})} + e^{-j(t+\frac{2\pi}{3})}\right) + \left(e^{j(2t+\frac{\pi}{3})} + e^{-j(2t+\frac{\pi}{3})}\right) \\ &= 2 + 4\cos(t + \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(2t + \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

따라서 (a)와 (c)의 결과는 일치한다.

7.19 다음 물음에 답하라.

(a) 전파 정류 회로에 주기 $T=1$인 정현파 $\sin\omega_0 t$를 입력으로 인가하였을 때 출력 파형의 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현을 정의식을 이용하여 구하라.

Ans) 전파 정류 회로의 출력은 주기가 $T=0.5$, 즉 $\omega_0 = 4\pi$

정의식을 이용하여 직접 푸리에 급수로 전개하면

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{-j2\pi kt}$$

$$Y_0=a_0=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt=2\int_0^{1/2}\sin(2\pi t)\,dt=\frac{2}{\pi}$$

$$Y_k=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)e^{-j4\pi kt}\,dt=2\int_0^{1/2}\frac{(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t})}{2j}e^{-j4\pi kt}\,dt$$

$$=\frac{1}{(1-4k^2)\pi}e^{-jk\pi}\cos(k\pi)=\frac{2}{(1-4k^2)\pi}$$

(b) 같은 정현파를 전파 정류 회로에 인가할 때 출력 파형의 푸리에 급수 표현 정의식을 이용하지 말고, [예제 7-5]의 결과를 이용하여 구하라.

Ans) 반파 정류 회로의 출력 $x(t)$의 푸리에 계수는

$$X_k=\begin{cases}-j\frac{1}{4}, & k=1\\ \frac{1}{(1-k^2)\pi}, & k=even\\ 0, & k=odd,\ k\neq 1\end{cases} \qquad \& \qquad X_{-k}=X_k^*$$

$$y(t)=x(t)+x(t-\frac{T}{2})=x(t)+x(t-\frac{1}{2})$$

$$x(t-\frac{1}{2})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k' e^{j2\pi kt}$$

$$X_k'=\frac{1}{T}\int_T x(t-\frac{1}{2})e^{-j2\pi kt}\,dt=e^{-j\pi k}X_k=(-1)^k X_k$$

$$\therefore\ y(t)=x(t)+x(t-\frac{1}{2})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kt}+\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k' e^{j2\pi kt}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+(-1)^k)X_k e^{j2\pi kt}=\sum_{k'=-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1-4k'^2)\pi}e^{j4\pi k't}$$

$$\left(\because (1+(-1)^k)X_k=\begin{cases}\frac{2}{(1-k^2)\pi}, & k=even\\ 0, & k=odd\end{cases}\right)$$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{j4\pi kt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1-4k^2)\pi}e^{j4\pi kt}$$

7.20 5[Ω]의 저항에 $x(t)=10\sqrt{2}\cos(t)+30\sqrt{2}\cos(2t)+20\sqrt{2}\cos(3t)$의 전압을 인가하였을 때 저항에서 소비되는 전력을 구하라.

Ans) $i(t)=2\sqrt{2}\cos t+6\sqrt{2}\cos 2t+4\sqrt{2}\cos 3t$

$$P=\bar{x}_1\bar{i}_1+\bar{x}_2\bar{i}_2+\bar{x}_3\bar{i}_3=10\times 2+30\times 6+20\times 4=280$$

[응용 문제]

7.21 다음의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하고 스펙트럼을 그려라.

(a) $x(t)=2\sin(\pi t)+\cos(3\pi t)-\cos(5\pi t)$

Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\pi}e^{-j5\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\pi t}+e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi}e^{j5\pi t}$$

기본 주파수 $\omega_0=\pi$, 기본파($|X_1|=1$, $\phi_1=-\frac{\pi}{2}$), 3고조파($|X_3|=\frac{1}{2}$, $\phi_3=0$), 5고조파($|X_5|=\frac{1}{2}$, $\phi_5=-\pi$)

$|X_{-k}|=|X_k|$, $\phi_{-k}=-\phi_k$

(b) $x(t)=1+4\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{-j3\pi t}+2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\pi t}+1+2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{j3\pi t}$$

기본 주파수 $\omega_0=\pi$, DC($X_0=1$), 기본파($|X_1|=2$, $\phi_1=-\frac{\pi}{4}$), 3고조파($|X_3|=\frac{1}{2}$, $\phi_3=-\frac{2\pi}{3}$)

$|X_{-k}|=|X_k|$, $\phi_{-k}=-\phi_k$

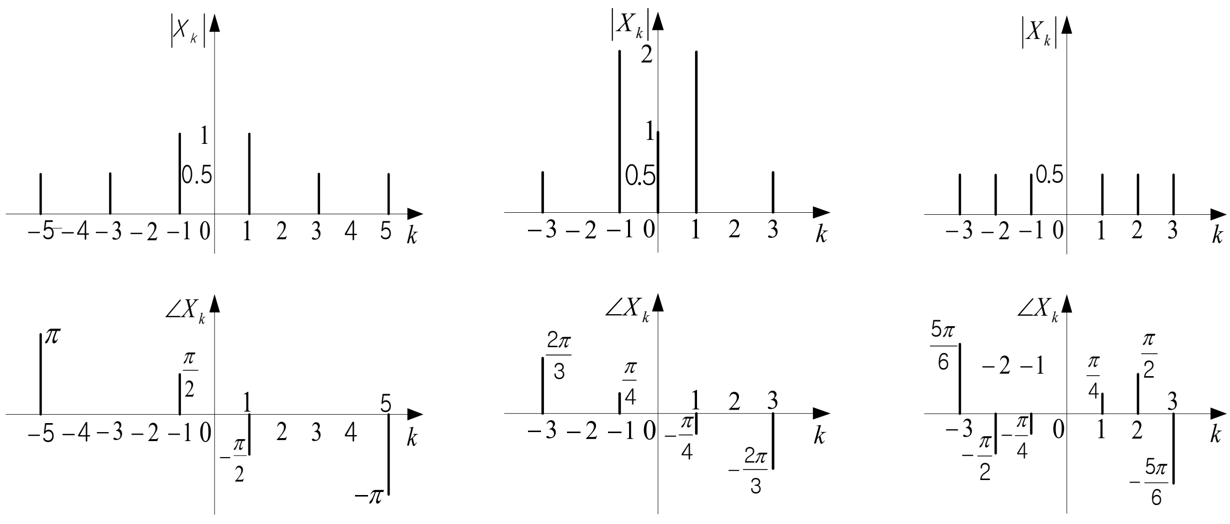
(c) $x(t)=\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin(4\pi t)+\sin\left(6\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}e^{-j6\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j4\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j4\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}}e^{j6\pi t}$$

$\omega_0=2\pi$이고, 기본파($|X_1|=\frac{1}{2}$, $\phi_1=\frac{\pi}{4}$), 2고조파($|X_2|=\frac{1}{2}$, $\phi_2=\frac{\pi}{2}$), 3고조파($|X_3|=\frac{1}{2}$, $\phi_3=-\frac{5\pi}{6}$)

$|X_{-k}|=|X_k|$, $\phi_{-k}=-\phi_k$



(a) (b) (c)

7.22 다음 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

(a) $x(t)=1+2\cos(\frac{2\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})+4\sin(\frac{4\pi}{5}t+\frac{\pi}{6})$

Ans) $x(t)$의 기본주파수 ω_0는 두 정현파 성분의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0=\frac{2\pi}{15}$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = -j2e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{2\pi}{15}(-6)t} + e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{15}(-5)t} + 1 + e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{15}(5)t} + j2e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{2\pi}{15}(6)t}$$

$$\therefore\ X_{-6} = -j2e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}},\quad X_{-5} = e^{-j\frac{\pi}{3}},\quad X_0 = 1,\quad X_5 = e^{j\frac{\pi}{3}},\quad X_6 = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

(b) $x(t) = 2 + \cos(t + \frac{\pi}{4}) + 2\cos(3t + \frac{\pi}{6}) - \sin(4t + \frac{\pi}{3})$

Ans) $x(t)$의 기본주파수 ω_0는 정현파 성분들의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0 = 1$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{j2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j(-4)t} + e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j(-3)t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j(-1)t} + 2 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j(1)t} + e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j(3)t} - \frac{1}{j2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j(4)t}$$

$$\therefore\ X_{-4} = \frac{1}{j2}e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_{-3} = e^{-j\frac{\pi}{6}},\qquad X_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},\qquad X_0 = 2,$$

$$X_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},\qquad X_3 = e^{j\frac{\pi}{6}},\qquad X_4 = -\frac{1}{j2}e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}}$$

(c) $x(t) = 1 + 2\sin(\frac{7\pi}{3}t) - 2\sqrt{3}\cos(\frac{7\pi}{3}t) + \sin(7\pi t) + \cos(\frac{28\pi}{3}t)$

Ans) $x(t)$의 기본주파수 ω_0는 정현파 성분들의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0 = \frac{7\pi}{3}$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-j4\omega_0 t} + j\frac{1}{2}e^{-j3\omega_0 t} + (-\sqrt{3} + j1)e^{-j\omega_0 t} + 1 + (-\sqrt{3} - j1)e^{j\omega_0 t} - j\frac{1}{2}e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j4\omega_0 t}$$

$$\therefore\ X_{-4} = \frac{1}{2},\qquad X_{-3} = j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\qquad X_{-1} = -\sqrt{3} + j1 = 2e^{j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_0 = 1,$$

$$X_1 = -\sqrt{3} - j1 = 2e^{-j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_3 = -j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\qquad X_4 = \frac{1}{2}$$

(d) $x(t) = 2 + \cos(\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(2\pi t) + 4\cos(3\pi t - \frac{\pi}{3})$

Ans) $x(t)$의 기본주파수 ω_0는 정현파 성분들의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0 = \pi$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t) = 2e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j3\omega_0 t} - \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j2\omega_0 t} + \frac{1 - j1}{2}e^{-j\omega_0 t} + 2 + \frac{1 + j1}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j2\omega_0 t} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j3\omega_0 t}$$

$$\therefore\ X_{-3} = 2e^{j\frac{\pi}{3}},\qquad X_{-2} = -\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}e^{j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_{-1} = \frac{1 - j1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},\qquad X_0 = 2,$$

$$X_1 = \frac{1 + j1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},\qquad X_2 = -\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}},\qquad X_3 = 2e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

(e) $x(t) = 3 + \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) + \sin(3t) - \frac{1}{2}\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$

Ans) $x(t)$의 기본주파수 ω_0는 정현파 성분들의 주파수의 최대공약수로 $\omega_0 = 1$

오일러 공식을 이용하면

$$x(t)=\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{-j5t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j3t}+e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j2t}+3+e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j3t}+\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{j5t}$$

$$\therefore\ X_{-5}=\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}},\qquad X_{-3}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\qquad X_{-2}=e^{j\frac{\pi}{6}},\qquad X_0=3,$$

$$X_2=e^{-j\frac{\pi}{6}},\qquad X_3=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\qquad X_5=\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

(f) $x(t)=|\sin(2t)|$

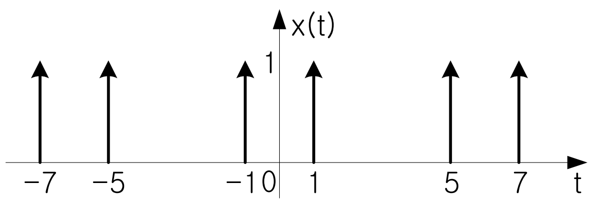
Ans) $x(t)$의 기본 주파수는 사인파 주파수의 2배인 $\omega_0=4$

X_0는 DC 성분이므로 $X_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\frac{2}{\pi}$

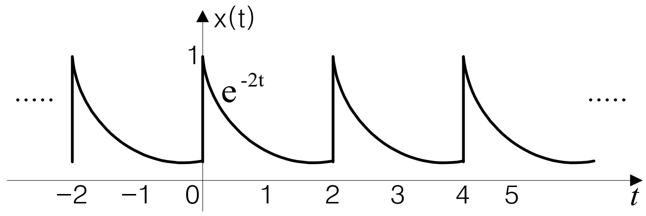
$$X_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j4kt}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{j2t}-e^{-j2t})}{j2}e^{-j4kt}dt=\frac{2}{(1-4k^2)\pi}$$

$$\therefore\begin{cases}X_0=\dfrac{2}{\pi}\\[2mm] X_k=\dfrac{2}{(1-4k^2)\pi},\quad k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\end{cases}$$

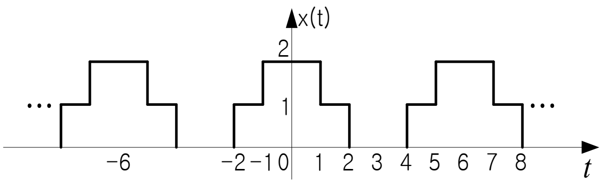
7.23 다음 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.



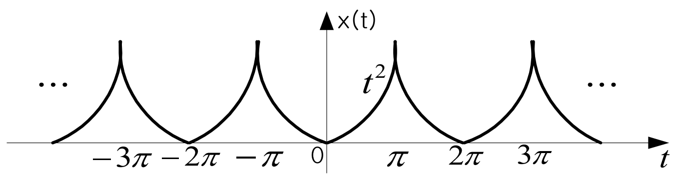
(a)



(d)



(c)



(d)

(a)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$$X_k=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}x(t)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt=\frac{1}{6}(e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{j\frac{\pi}{3}k})$$

$$\therefore\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_ke^{jk\omega_0t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{6}(e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{j\frac{\pi}{3}k})e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

(b)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$$X_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\pi t}dt = \frac{1-e^{-4}}{4+j2\pi k}$$

$$\therefore\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-4}}{4+j2\pi k} e^{jk\pi t}$$

(c)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$X_k = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}(\mathrm{rect}(t/4)+\mathrm{rect}(t/2))e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt = \mathrm{sinc}(\frac{2}{3}k)+\mathrm{sinc}(\frac{1}{3}k)$$

$$X_0 = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\,dt = 1$$

$$\therefore\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{2}{3}k\right)+\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{3}k\right)\right)e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

(d)

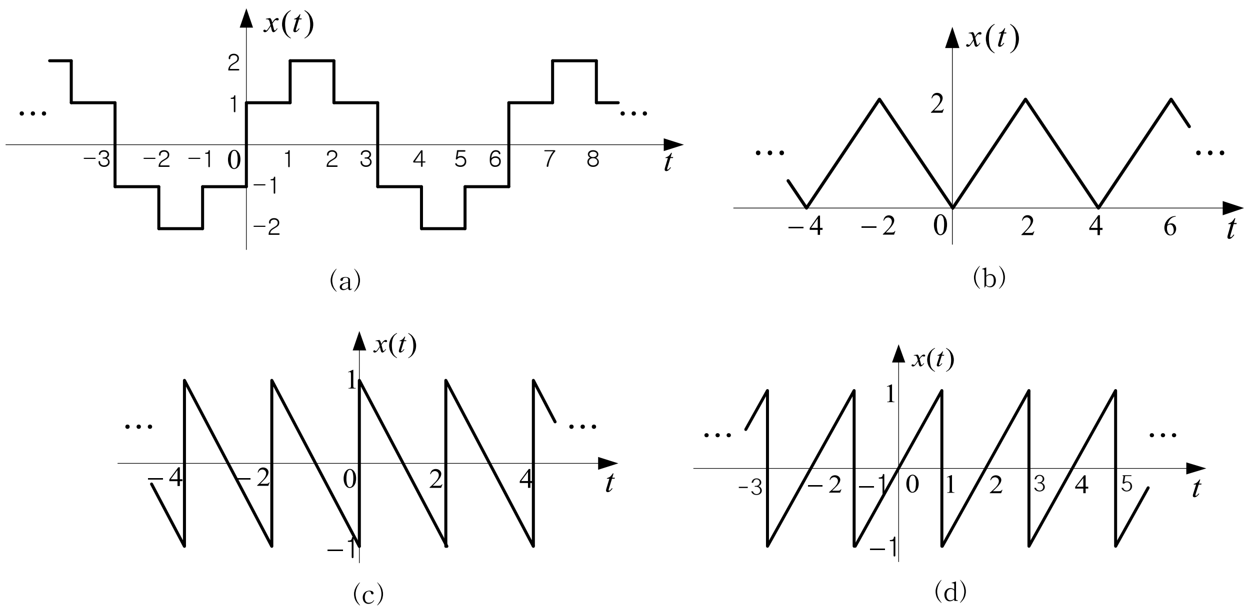
Ans) $x(t) = t^2,\quad -\pi < t \le \pi,\quad x(t+2\pi) = x(t)$ & 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$X_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jkt}dt = (-1)^k\frac{2}{k^2}$$

$$\therefore\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k^2}e^{jkt}$$

7.24 다음 그림의 주기 신호에 대해 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하고 스펙트럼을 그려라.

(※ 교재에 (d) 그림이 잘못되었음((c)와 같음)



(a)

Ans) $x(t) = \mathrm{rect}(t-\frac{3}{2})+\mathrm{rect}(\frac{2}{3}t-\frac{3}{2})$ & 기본 주파수 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$

$$X_0 = 0$$

$$\therefore \ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=odd} -j\frac{2}{k\pi}(1+(\frac{1}{2})^k)e^{jk\frac{\pi}{3}t} = \sum_{k=odd}\frac{2}{k\pi}(1+(\frac{1}{2})^k)e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

스펙트럼은 홀수 고조파만 존재하며, 진폭 스펙트럼은 우대칭, 위상 스펙트럼은 기대칭

$$|X_k| = \frac{2}{k\pi}(1+(\frac{1}{2})^k), \quad \angle X_k = -\frac{\pi}{2}, \qquad k>0$$

(b)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = 1$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}(-\frac{2}{jk\pi})^2(1-(-1)^k) = \begin{cases} -\frac{4}{(k\pi)^2}, & k = 홀수 \\ 0, & k = 짝수 \end{cases}$$

$$\therefore \ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = 1 + \sum_{k=odd} -\frac{4}{(k\pi)^2}e^{jk\frac{\pi}{2}t} = 1 + \sum_{k=odd}\frac{4}{(k\pi)^2}e^{-j\pi}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

진폭 스펙트럼은 우대칭, 위상 스펙트럼은 기대칭

$$X_0 = 1, \qquad |X_k| = \frac{4}{(k\pi)^2}, \quad \angle X_k = -\pi, \qquad k>0$$

(c)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$X_0 = 0$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = -j\frac{1}{\pi k}$$

$$\therefore \ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=odd} -j\frac{1}{k\pi}e^{jk\pi t} = \sum_{k=odd}\frac{1}{k\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jk\pi t}$$

진폭 스펙트럼은 우대칭, 위상 스펙트럼은 기대칭

$$|X_k| = \frac{1}{k\pi}, \quad \angle X_k = -\frac{\pi}{2}, \qquad k>0$$

(d)

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

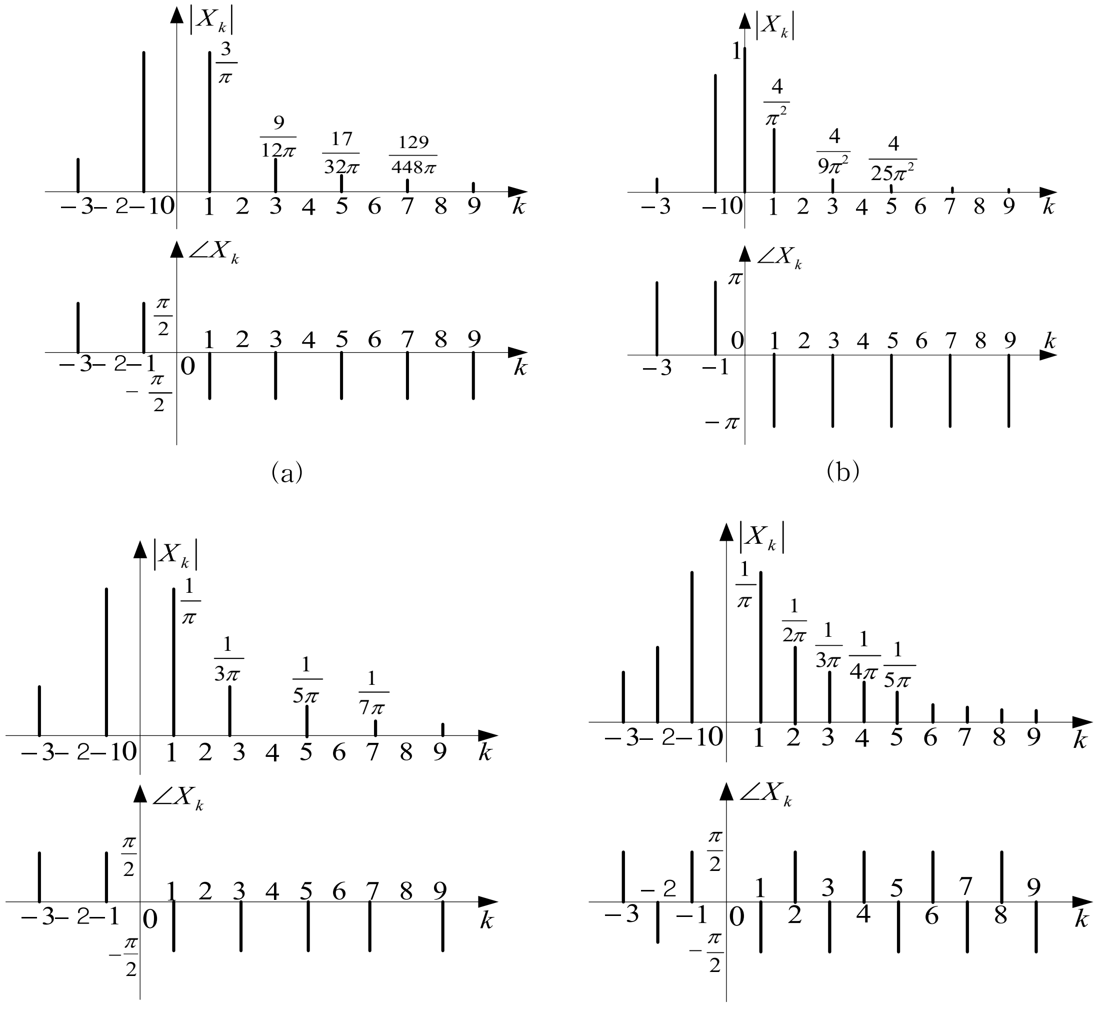
$$X_0 = 0$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = j\frac{(-1)^k}{\pi k}$$

$$\therefore \ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k\neq 0} j\frac{(-1)^k}{k\pi}e^{jk\pi t} = \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jk\pi}e^{jk\pi t}$$

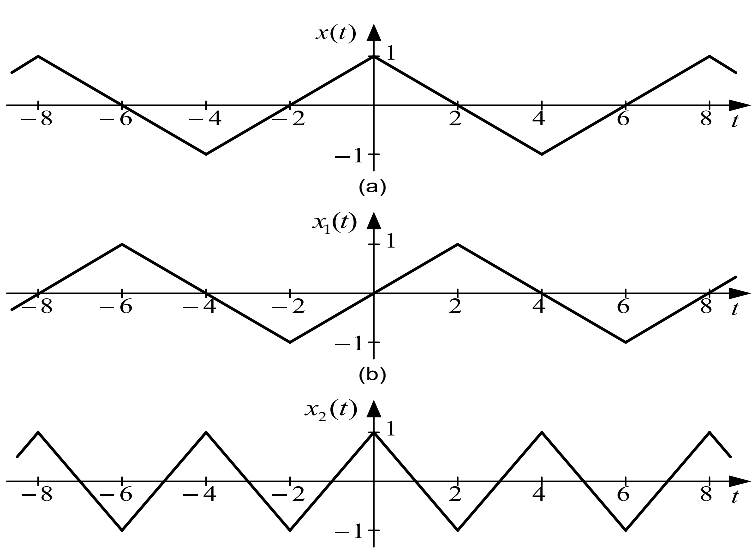
진폭 스펙트럼은 우대칭, 위상 스펙트럼은 기대칭인데 홀수 고조파는 $-\frac{\pi}{2}$, 짝수 고조파는 $\frac{\pi}{2}$

$$|X_k| = \frac{1}{k\pi}, \quad \angle X_k = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad k > 0$$



(a) (b) (c) (d)

7.25 다음 그림의 신호에 대해 물음에 답하라.



(a) (b) (c)

(a) 그림 (a)의 신호에 대한 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) $T=8, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{k^2\pi^2}[(1-e^{jk\pi})-(e^{-jk\pi}-1)] = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi^2}, & k = odd \\ 0, & k = even \end{cases}$$

$$\therefore\ x(t) = \sum_{k=odd} \frac{4}{k^2\pi^2} e^{j\frac{k\pi}{4}t}$$

(b) (a)의 결과를 이용하여 신호 $x(t)$를 시간 이동한 그림 (b)의 $x_1(t)$의 푸리에 급수를 구하라.

Ans) (b)의 파형은 (a)의 파형을 $t_0 = 2 = T/4$만큼 시간 지연한 것이다. 따라서

$$x_1(t) = x(t-2) = \sum_{k=odd} \frac{4}{k^2\pi^2} e^{j\frac{k\pi}{4}(t-2)} = \sum_{k=odd} X_k{}' e^{j\frac{k\pi}{4}t}$$

$$X_k{}' = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi^2} e^{-j\frac{k\pi}{2}}, & k = odd \\ 0, & k = even \end{cases}$$

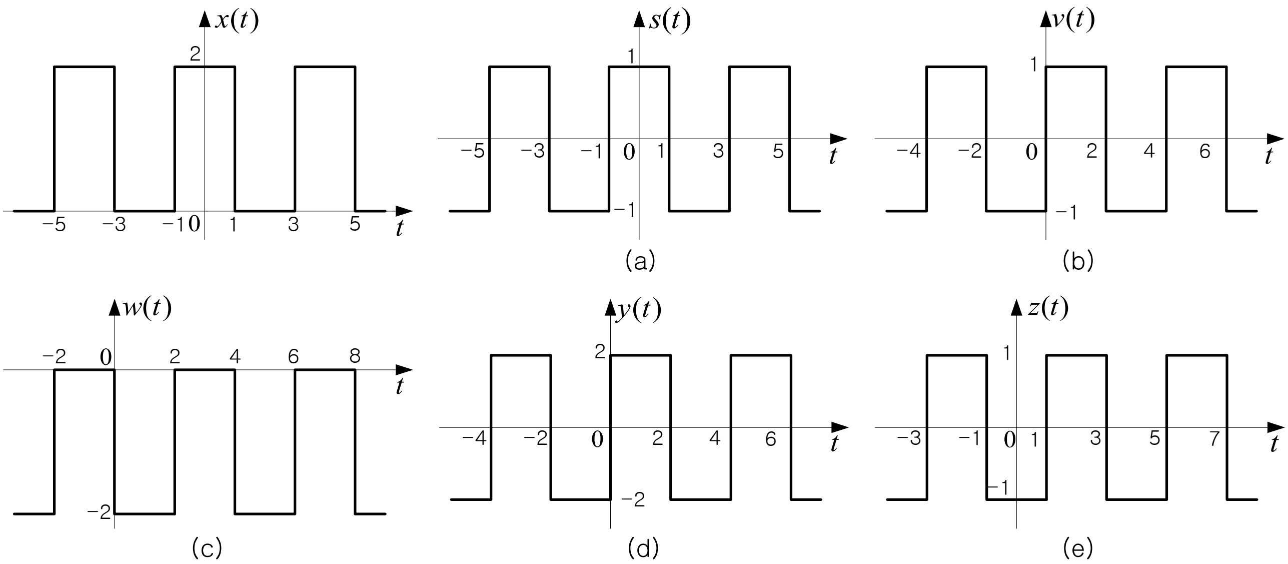
(c) (a)의 결과를 이용하여 신호 $x(t)$를 시간 척도조절한 $x_2(t)$의 푸리에 급수를 구하라.

Ans) (c)의 파형은 (a)의 파형을 $a=2$만큼 시간 척도조절(압축)한 것에 해당한다. 따라서

$$x_2(t) = x(2t) = \sum_{k=odd} \frac{4}{k^2\pi^2} e^{j\frac{k\pi}{4}(2t)} = \sum_{k=odd} X_k{}' e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

$$X_k{}' = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi^2}, & k = odd \\ 0, & k = even \end{cases}$$

7.26 다음 그림의 신호 $x(t)$에 대한 푸리에 계수가 $X_k = \mathrm{sinc}(\frac{k}{2})$라고 한다. 푸리에 급수의 성질을 이용하여 나머지 신호들의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.



(a)

Ans) $s(t)$는 $x(t)$를 수직축으로 $a=-1$만큼 이동시킨 것과 같다. 따라서 $s(t)=x(t)-1$

$$S_0 = X_0 - 1,\ S_k = X_k$$
$$S_0 = X_0 - 1 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$S_k = X_k = \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right),\quad k \neq 0$$

(b)

Ans) $v(t)$는 $x(t)$를 수직축으로 $a=-1$만큼 이동시키고, 시간축을 따라 $t_0=1$만큼 오른쪽으로 이동, 즉 지연시킨 것과 같다. 따라서 $v(t)=x(t-1)-1$

주기가 $T=4$이므로 기본주파수는 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$V_0 = X_0 - 1,\ V_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k$$
$$V_0 = X_0 - 1 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$V_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k = e^{-j\frac{\pi}{2}k}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{1}{k\pi}(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} -j\dfrac{2}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(c)

Ans) $w(t)$는 $x(t)$를 수직축으로 $a=-2$만큼 이동시키고, 시간축을 따라 $t_0=-1$만큼 왼쪽으로 이동, 즉 선행시킨 것과 같다. 따라서 $v(t)=x(t+1)-2$

주기가 $T=4$이므로 기본주파수는 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$W_0 = X_0 - 2,\ W_k = e^{j\frac{\pi}{2}k} X_k$$
$$W_0 = X_0 - 2 = \text{sinc}(0) - 1 = 1 - 2 = -1$$
$$W_k = e^{j\frac{\pi}{2}k} X_k = e^{j\frac{\pi}{2}k}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{1}{k\pi}(e^{j\pi k} - 1) = \begin{cases} j\dfrac{2}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(d)

Ans) $y(t)$는 $x(t)$를 2배하여 수직축으로 $a=-2$만큼 이동시키고, 시간축을 따라 $t_0=1$만큼 오른쪽으로 이동, 즉 지연시킨 것과 같다. 따라서 $y(t)=2x(t-1)-2$

주기가 $T=4$이므로 기본주파수는 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$Y_0 = 2X_0 - 2,\ Y_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k$$
$$Y_0 = 2X_0 - 2 = 2\text{sinc}(0) - 2 = 2 - 2 = 0$$
$$Y_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} X_k = 2e^{-j\frac{\pi}{2}k}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -j\frac{2}{k\pi}(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} -j\dfrac{4}{k\pi}, & k = \text{홀수} \\ 0, & k = \text{짝수} \end{cases}$$

(e)

Ans) $z(t)$는 $x(t)$를 수직축으로 $a=-1$만큼 이동시키고, 시간축을 따라 $t_0=2$만큼 오른쪽으로 이동, 즉 지연시킨 것과 같다. 따라서 $z(t)=x(t-2)-1$

주기가 $T=4$이므로 기본주파수는 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$Z_0 = X_0 - 1,\ Z_k = e^{-j\pi k} X_k$$
$$Z_0 = X_0 - 1 = \mathrm{sinc}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$Z_k = e^{-j\pi k} X_k = e^{-j\pi k}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = (-1)^k \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), & k = \text{짝수} \\ -\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), & k = \text{홀수} \end{cases}$$

7.27 주기 T인 주기 신호 $x(t)$의 푸리에 계수를 X_k라고 할 때, 주어진 주기 신호 $v(t)$에 대한 푸리에 급수 표현을 X_k을 이용하여 나타내라.

(a) $v(t) = x(t-1)$

Ans) $x(t)$를 지수함수 형식 푸리에 급수로 표현하면

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$X_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

따라서 $v(t)$의 지수함수 형식 푸리에 급수 표현은

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$V_k = \frac{1}{T}\int_T x(t-1) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{e^{-jk\omega_0}}{T}\int_T x(t') e^{-jk\omega_0 t'}\, dt'$$
$$\therefore\ V_k = e^{-jk\omega_0} X_k$$

(b) $v(t) = x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}t}$

Ans) $\dfrac{2\pi}{T} = \omega_0$이므로

$$v(t) = x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}t} = x(t) e^{j\omega_0 t}$$
$$V_k = \frac{1}{T}\int_T v(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j(k-1)\omega_0 t}\, dt = X_{k-1}$$
$$\therefore\ V_k = X_{k-1}$$

(c) $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

Ans) $x(t)$의 푸리에 급수 표현으로부터

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 X_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$\therefore\ V_k = jk\omega_0 X_k$$

(d) $v(t) = x(t)\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

Ans) $\cos(\frac{2\pi}{T}t) = \cos\omega_0 t = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$V_k = \frac{1}{T}\int_T v(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}(X_{k+1} + X_{k-1})$$

7.28 다음에 주어진 주기 신호 $x(t)$의 전력을 계산하라.

(a) $x(t) = 2\sqrt{2}\cos(2\pi t) + 3\sqrt{2}\cos(3\pi t)$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

(b) $x(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t) + 3\sqrt{2}\cos(3t)$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

(c) $x(t) = 2\sqrt{2}\cos(2\pi t - \frac{\pi}{4}) + 3\sqrt{2}\cos(3\pi t + \frac{\pi}{6})$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

(d) $x(t) = 2\sqrt{2}\cos(5\pi t) + 3\sqrt{2}\cos(11\pi t)$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

7.29 다음에 주어진 주기 신호 $x(t)$의 전력을 계산하라.

(a) $x(t) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{6})$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 1^2 + (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2 = 11$

(b) $x(t) = 2 + \cos(t + \frac{\pi}{4}) + 2\cos(3t + \frac{\pi}{6}) - \sin(4t + \frac{\pi}{3})$

Ans) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 7$

(c) $x(t) = 2 + \cos(\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(2\pi t) + 4\cos(3\pi t - \frac{\pi}{3})$

Ans) $x(t) = 2 + \sqrt{2}\cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) - 3\cos(2\pi t) + 4\cos(3\pi t - \frac{\pi}{3})$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 2^2 + 1^2 + (\frac{3}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2 = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

(d) $x(t) = 1 + 2\sin(\frac{7\pi}{3}t) - 2\sqrt{3}\cos(\frac{7\pi}{3}t) + \sin(7\pi t) + \cos(\frac{28\pi}{3}t)$

Ans) $x(t) = 1 - 4\cos(\frac{7\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}) + \sin(7\pi t) + \cos(\frac{28\pi}{3}t)$

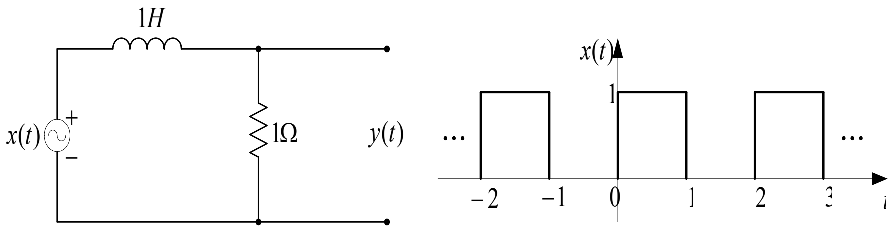
$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = 1^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 10$$

(e) $x(t) = 8\cos^3(\pi t) + 4\cos(2\pi t)$

Ans) $x(t) = 6\cos(\pi t) + 4\cos(2\pi t) + 2\cos(3\pi t)$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k^2 = (\frac{6}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 = 28$$

7.30 아래 그림의 RL 회로에 입력 신호 $x(t)$를 인가하였다.



(a) RL 회로 (b) 입력 신호

(a) $x(t)$의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하여라.

Ans) 기본 주파수는 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\pi t}$$

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} -j\frac{1}{k\pi}, & k = odd \\ 0, & k = even \end{cases}$$

(b) 출력 전압 $y(t)$의 지수함수 형식 푸리에 급수를 구하라.

Ans) 회로의 주파수 응답은

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$Y_k = H(\omega)|_{\omega = k\omega_0} X_k = \left.\frac{1}{1 + j\omega}\right|_{\omega = k\omega_0} X_k = \frac{1}{1 + jk\pi} X_k$$

따라서 y(t)의 지수함수형식 푸리에 급수 전개는 다음과 같다.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jk\pi t}$$

$$Y_k = \frac{1}{1 + jk\pi} X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{-k^2\pi^2 + jk\pi}, & k = odd \\ 0, & k = even \end{cases}$$

(c) 1[Ω]의 저항에서 사용된 평균 전력을 구하라.

Ans) 1[Ω]의 저항에 걸리는 전압과 전류는

$$v(t) = i(t) = y(t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_T v(t)\,i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_T y^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Y_k|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m-1)^2\pi^2(1-(2m-1)^2\pi^2)}$$