제12장 이산 시간 푸리에 변환

[개념 문제]

12.1 이산 시간 푸리에 변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 이산 시간 푸리에 변환은 수렴 조건이 필요하다.

㉯ 이산 비주기 신호의 푸리에 변환은 주파수에 대한 연속 함수가 된다.

㉰ 이산 비주기 신호를 합성하려면 전 주파수 $[0, \infty]$에 대한 주파수 성분이 필요하다.

㉱ 이산 주기 신호의 푸리에 변환은 같은 파형을 갖는 비주기 신호의 푸리에 변환을 기본 주파수 간격으로 샘플링한 것과 같다.

Ans) ㉰

12.2 이산 시간 푸리에 변환에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 이산 시간 푸리에 역변환은 한 주기 구간만 적분하면 된다.

㉯ 주기 신호에 대해 DTFS로 얻은 스펙트럼은 이산이지만, DTFT로 얻은 스펙트럼은 연속이다.

㉰ 이산 전력 신호의 푸리에 변환은 DTFT의 정의식으로 직접 계산할 수 있다.

㉱ $X(\Omega)$에 임펄스를 포함한 신호의 전력은 0이다.

Ans) ㉮

12.3 다음의 이산 시간 푸리에 변환쌍 중 틀린 것은?

㉮ $(0.5)^{2n}u[n] \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-0.5e^{-j0.5\Omega}}$

㉯ $4(n-2)(0.5)^{n}u[n-2] \Leftrightarrow \dfrac{0.5e^{-j3\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$

㉰ $(0.5)^{n}u[n] * \delta[n-1] \Leftrightarrow \dfrac{e^{-j\Omega}}{1-(0.5)e^{-j\Omega}}$

㉱ $(0.5)^{n}u[n-1] * (0.5)^{n-1}u[n-1] \Leftrightarrow \dfrac{0.5e^{-j2\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$

Ans) ㉮

$$(0.5)^{2n}u[n] = (0.5^2)^{n}u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-0.5^2e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}$$

$$4(n-2)(0.5)^{n}u[n-2] = (n-2)(0.5)^{n-2}u[n-2] \Leftrightarrow \frac{0.5e^{-j3\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

$$(0.5)^{n}u[n] * \delta[n-1] = (0.5)^{n-1}u[n-1] \Leftrightarrow \frac{e^{-j\Omega}}{1-(0.5)e^{-j\Omega}}$$

$$(0.5)^{n}u[n-1] * (0.5)^{n-1}u[n-1] = (n-1)(0.5)^{n-1}u[n-1] \Leftrightarrow \frac{0.5e^{-j2\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

12.4 이산 시간 푸리에 변환의 성질에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ $x[n] = \cos(0.2\pi n)\mathrm{rect}[n]$의 푸리에 변환은 $X(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$을 만족한다.

㉯ 기대칭 실수 신호의 위상 스펙트럼은 $\pm\pi/2$ 값만 나타난다.

㉰ 이산 실수 신호의 진폭 스펙트럼은 $\Omega=\pm\pi$에 대해서 우대칭이다.

㉱ 실수 신호 $x[n]$의 스펙트럼이 $\angle X(\frac{\pi}{2})=\phi$이면 $\angle X(\frac{3\pi}{2})=\phi$이다.

Ans) ㉱

위상 스펙트럼은 기대칭을 만족하는데, $\Omega=\pi$축에 대해서도 대칭성을 만족해야 하므로 $\angle X(\frac{3\pi}{2})=-\phi$가 되어야 한다.

12.5 이산 시간 푸리에 변환의 성질에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ $|X(\Omega)|^2=|Y(\Omega)|^2$이면 $x[n]=y[n]$이다.

㉯ $x[n]=y[n]$이면 $|X(\Omega)|^2=|Y(\Omega)|^2$이다.

㉰ $y[n]=x[2n]$의 스펙트럼 $Y(\Omega)$은 $x[n]$의 스펙트럼 $X(\Omega)$와 $Y(0.6\pi)=X(0.3\pi)$을 만족한다.

㉱ 시간 영역에 구한 이산 신호의 총에너지는 주파수 영역에서 $\Omega=[0\ \ \infty]$에 대해 $|X(\Omega)|^2$을 모두 모은 것과 같다.

Ans) ㉯, ㉰

신호의 스펙트럼은 유일하다. 따라서 두 신호가 같으면 진폭 스펙트럼의 제곱도 같다.

시간 축을 a배로 척도조절하면 스펙트럼의 주파수 축은 $1/a$로 척도조절된다.

12.6 이산 시스템의 주파수 응답에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 이산 시스템의 주파수 응답은 전 복소평면에 대해 Ω를 변화시키며 계산된 값이다.

㉯ 이산 시스템의 차분 방정식의 계수는 주파수 응답에 영향을 미치지 않는다.

㉰ 이산 시스템의 임펄스 응답을 알면 주파수 응답을 알 수 있지만 역은 성립하지 않는다.

㉱ 이산 시스템의 주파수 응답은 길이 2π인 주파수 구간에서만 나타내면 충분하다.

Ans) ㉱

12.7 주파수 응답에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 주파수 응답은 입출력 관계의 컨벌루션 표현으로부터 구할 수 있다.

㉯ 주파수 응답은 시스템에 인가되는 입력에 따라 달라지지 않는다.

㉰ 시스템 출력의 진폭 스펙트럼은 진폭 응답과 입력의 진폭 스펙트럼을, 위상 스펙트럼은 위상 응답과 입력의 위상 스펙트럼을 곱하여 얻을 수 있다.

㉱ 주파수 응답은 시스템의 입력 주파수에 따른 반응을 크기와 위상의 변화로 나타내어 시스템의 필터링 특성을 보여준다.

Ans) ㉰

12.8 DFT에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ DFT는 이산 비주기 신호의 샘플 스펙트럼을 구하는 도구이지만, 결과적으로는 이산 주기 신호와 이산 주기 스펙트럼의 쌍으로 취급된다.

㉯ 유한한 길이의 실제 관측 데이터를 DFT해서 구한 스펙트럼에는 항상 주파수 중첩의 영향이 들어있다.

㉰ DFT와 DTFS는 똑같은 변환이다.

㉱ 회전인자는 복소평면의 단위원을 N 등분한 점으로, 데이터 값을 몰라도 계산할 수 있다.

Ans) ㉰

12.9 DFT의 해상도에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?
㉮ DFT의 해상도와 DFT의 길이는 아무런 관계가 없다.
㉯ 연속 신호를 DFT할 경우, 해상도는 샘플링 주파수와 DFT의 길이에 모두 영향을 받는다.
㉰ DFT에 충분한 개수의 영 채우기를 하면 해상도와 함께 정확도도 향상된다.
㉱ 유효한 데이터의 수를 늘리면 같은 수의 영 채우기를 하는 것보다 해상도가 높아진다.

Ans) ㉯

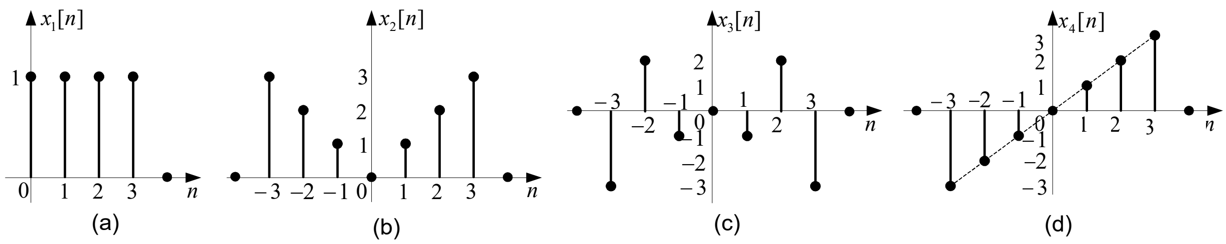
연속 신호에 DFT를 적용할 경우 $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ 으로 해상도는 샘플링 주파수와 DFT의 길이에 모두 영향을 받는다.

12.10 원형 컨벌루션에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?
㉮ 주기가 같은 두 주기 신호의 선형 컨벌루션은 주기마다 같은 패턴을 반복하고 값이 발산하여 계산할 수 없고, 원형 컨벌루션만 계산할 수 있다.
㉯ 주기 N인 두 주기 신호를 원형 컨벌루션한 결과 신호의 길이는 N이다.
㉰ 주기 신호의 원형 컨벌루션을 DFT하면, 각 신호의 DFT를 곱한 것과 같다.
㉱ 모든 주기 신호는 서로 원형 컨벌루션이 가능하다.

Ans) ㉱

[기초 문제]

12.11 다음 그림의 이산 신호에 대해 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.



(a)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} = 4e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\cos(\frac{1}{2}\Omega)\cos(\Omega)$$

(b)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-3}^{3} x[n]e^{-j\Omega n} = 3e^{j3\Omega} + 2e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + 3e^{-j3\Omega} \\ &= 2\cos(\Omega) + 4\cos(2\Omega) + 6\cos(3\Omega) \end{aligned}$$

(c)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega)=\sum_{n=-3}^{3}x[n]e^{-j\Omega n}=-3e^{j3\Omega}+2e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}+2e^{-j2\Omega}-3e^{-j3\Omega}$$
$$=-2\cos(\Omega)+4\cos(2\Omega)-6\cos(3\Omega)$$

(d)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega)=\sum_{n=-3}^{3}x[n]e^{-j\Omega n}=-3e^{j3\Omega}-2e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}+2e^{-j2\Omega}+3e^{-j3\Omega}$$
$$=-j\,[2\sin(\Omega)+4\sin(2\Omega)+6\sin(3\Omega)]$$

12.12 다음과 같은 이산 주기 신호의 DTFT를 구하라.

(a) $x[n]=\begin{cases}1, & n=\text{짝수}\\ 0, & n=\text{홀수}\end{cases}$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X'(\Omega)=\sum_{n=0}^{1}x'[n]e^{-j\Omega n}=1$$

$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\pi$이므로

$$X(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X'(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-k\pi)$$

(b) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 1\\ 0, & 2\le n\le 3\end{cases},\quad N=4$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X'(\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x'[n]e^{-j\Omega n}=1+e^{-j\Omega}$$

$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$X(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X'(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2}(1+e^{-j\frac{\pi}{2}k})\delta(\Omega-\frac{\pi}{2}k)$$

$$1+e^{-j\frac{\pi}{2}k}=\begin{cases}2, & k=4m\ (m\text{은 정수})\\ 1+j, & k=4m+1\ (m\text{은 정수})\\ 0, & k=4m+2\ (m\text{은 정수})\\ 1-j, & k=4m+3\ (m\text{은 정수})\end{cases}$$

(c) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3\\ 0, & 4\le n\le 7\end{cases},\quad N=8$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X'(\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x'[n]e^{-j\Omega n}=1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}=4e^{-j\frac{3}{2}\Omega}(\cos\frac{\Omega}{2})(\cos\Omega)$$

$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$X(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X'(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi e^{-j\frac{3\pi}{8}k}(\cos\frac{\pi}{8}k)(\cos\frac{\pi}{4}k)\delta(\Omega-\frac{\pi}{4}k)$$

(d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right)$

Ans) 이 신호의 DTFS는 다음과 같으므로

$$X_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_7 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

DTFT는

$$X(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}k)$$

스펙트럼의 한 주기 $X'(\Omega)$는 다음과 같고, $X(\Omega)$는 $X'(\Omega)$가 2π 주기로 반복된다.

$$X'(\Omega) = \left(\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} - j\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\right)\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + \left(\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} + j\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\right)\delta(\Omega - \frac{7\pi}{4})$$

12.13 다음 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

(a) $n(u[n+N] - u[n-N-1])$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N}^{N} n e^{-j\Omega n} = -j2(\sin(\Omega) + 2\sin(2\Omega) + 3\sin(3\Omega) + \cdots + N\sin(N\Omega))$$
$$= -j2\sum_{k=1}^{N} k\sin(k\Omega)$$

(b) $x[n] = (n-1)(0.5)^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \dfrac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n] = n(0.5)^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad X_2(\Omega) = j\frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega} = \frac{0.5e^{-j\Omega}}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

$x[n] = x_2[n] - x_1[n]$이므로

$$X(\Omega) = X_2(\Omega) - X_1(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} - 1}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

(c) $x[n] = (0.5)^n u[n] + (-1)^n (0.5)^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \dfrac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n] = (-0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_2(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{2}{1 - 0.25e^{-j2\Omega}}$$

(d) $x[n] = (0.5)^n u[n] + (0.5)^{-n} u[-n-1]$

Ans) $x_1[n]=(0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega)=\dfrac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n]=(0.5)^{-n}u[-n-1] \Leftrightarrow X_2(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}(0.5)^{-n}e^{-j\Omega n}=\frac{0.5e^{j\Omega}}{1-0.5e^{j\Omega}}$$

$$X(\Omega)=X_1(\Omega)+X_2(\Omega)=\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}+\frac{0.5e^{j\Omega}}{1-0.5e^{j\Omega}}=\frac{0.75}{1.25-\cos\Omega}=\frac{3}{5-4\cos\Omega}$$

(e) $x[n]=(0.5)^n\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)u[n]$

Ans) $x_1[n]=(0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega)=\dfrac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$

DTFT의 변조(주파수 이동) 성질을 이용하면

$$X(\Omega)=\frac{1}{2}X_1(\Omega-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}X_1(\Omega+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\frac{1}{1-0.5e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{2})}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-0.5e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{2})}}$$

$$=\frac{1}{1+(0.5)^2e^{-j2\Omega}}$$

(f) $x[n]=(0.5)^{|n|}\cos(\dfrac{\pi}{2}n)$

Ans) $x_1[n]=(0.5)^{|n|}=(0.5)^n u[n]+(0.5)^{-n}u[-n]-\delta[n]$

따라서 $x'[n]=(0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X'(\Omega)=\dfrac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$과 DTFT의 시간 반전 성질을 이용하면

$$X_1(\Omega)=\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}+\frac{1}{1-0.5e^{j\Omega}}-1=\frac{0.75}{(1-0.5e^{-j\Omega})(1-0.5e^{j\Omega})}=\frac{0.75}{1.25-\cos\Omega}$$

따라서 DTFT의 변조(주파수 이동) 성질을 이용하면

$$X(\Omega)=\frac{1}{2}X_1(\Omega-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}X_1(\Omega+\frac{\pi}{2})=\frac{0.375}{1.25-\cos(\Omega-\frac{\pi}{2})}+\frac{0.375}{1.25-\cos(\Omega+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\frac{1}{1-(\frac{4}{5}\sin(\Omega))^2}$$

12.14 다음과 같이 DTFT가 주어질 때, 이에 대응하는 이산 신호를 구하라.

(a) $X(\Omega)=1-2e^{-j3\Omega}+4e^{j2\Omega}+3e^{-j6\Omega}$

Ans) $\delta[n] \Leftrightarrow 1$과 DTFT의 시간 이동 성질로부터

$$x[n]=\delta[n]-2\delta[n-3]+4\delta[n+2]+3\delta[n-6]$$

(b) $X(\Omega)=\begin{cases}0, & 0\le|\Omega|\le\dfrac{3\pi}{4}\\ 1, & \dfrac{3\pi}{4}<|\Omega|\le\pi\end{cases}$

Ans) IDTFT의 정의식으로부터

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} e^{j\Omega n}\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{j\Omega n}\,d\Omega$$
$$= \frac{1}{\pi n}\left(\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) = \mathrm{sinc}(\pi n) - \frac{3}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

(c) $|X(\Omega)| = \begin{cases} 0, & 0 \le |\Omega| \le \frac{\pi}{3} \\ 1, & \frac{\pi}{3} < |\Omega| \le \frac{2\pi}{3}, \\ 0, & \frac{2\pi}{3} < |\Omega| \le \pi \end{cases}$ $\angle X(\Omega) = 2\Omega$

Ans) IDTFT의 정의식으로부터

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} e^{j2\Omega}e^{j\Omega n}\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{j2\Omega}e^{j\Omega n}\,d\Omega$$
$$= \frac{1}{\pi(n+2)}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)\right) = \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right) - \frac{1}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)$$

(d) $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right)$

Ans) IDTFT의 정의식으로부터

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\int_{-\pi}^{\pi}\delta\left(\Omega - \frac{k\pi}{2}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

위 식의 두 번째 등식의 적분항은 $k=-2,\ -1,\ 0,\ ,1,\ 2$의 경우만 해당되므로

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-2}^{2}(-1)^k e^{j\frac{k\pi}{2}n} = \frac{1}{\pi}\left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2\cos(\pi n)\right)$$

12.15 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 주파수 응답과 임펄스 응답을 구하라.

(a) $y[n] + 0.8y[n-1] = x[n] - 0.5x[n]$

Ans) $Y(\Omega) + 0.8e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega) - 0.5e^{-j\Omega}X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 - 0.5e^{-j\Omega}}{1 + 0.8e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.8e^{-j\Omega}} - \frac{0.5e^{-j\Omega}}{1 + 0.8e^{-j\Omega}}$$

임펄스 응답

$$h[n] = (0.8)^n u[n] - 0.5(0.8)^{n-1}u[n-1] = \delta[n] + 0.3(0.8)^{n-1}u[n-1]$$

(b) $y[n] + 0.64y[n-2] = x[n-1]$

Ans) $Y(\Omega) + 0.64e^{-j2\Omega}Y(\Omega) = e^{-j\Omega}X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{e^{-j\Omega}}{1 + 0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega}}{2}\left(\frac{1}{1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\Omega}}\right)$$

임펄스 응답

$$h[n] = \frac{1}{2}\left((0.8e^{-j\frac{\pi}{2}})^{(n-1)}u[n-1] + (0.8e^{j\frac{\pi}{2}})^{(n-1)}u[n-1]\right) = (0.8)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u[n-1]$$

(c) $y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n-1]$

Ans) $Y(\Omega)-\frac{5}{6}e^{-j\Omega}Y(\Omega)+\frac{1}{6}e^{-j2\Omega}Y(\Omega)=e^{-j\Omega}X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\Omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\Omega}}=\frac{6}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-\frac{6}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

임펄스 응답

$$h[n]=6(\frac{1}{2})^n u[n]-6(\frac{1}{3})^n u[n]$$

(d) $y[n]-0.3y[n-1]-0.4y[n-2]=2x[n-1]-x[n-2]$

Ans) $Y(\Omega)-0.3e^{-j\Omega}Y(\Omega)-0.4e^{-j2\Omega}Y(\Omega)=2e^{-j\Omega}X(\Omega)-e^{-j2\Omega}X(\Omega)$

주파수 응답

$$\begin{aligned}H(\Omega)&=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{2e^{-j\Omega}-e^{-j2\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}-0.4e^{-j2\Omega}}\\&=e^{-j\Omega}\left(\frac{10/13}{1+0.5e^{-j\Omega}}+\frac{16/13}{1-0.8e^{-j\Omega}}\right)-e^{-j2\Omega}\left(\frac{5/13}{1+0.5e^{-j\Omega}}+\frac{8/13}{1-0.8e^{-j\Omega}}\right)\end{aligned}$$

임펄스 응답

$$\begin{aligned}h[n]&=\frac{10}{13}(-0.5)^{n-1}u[n-1]+\frac{16}{13}(0.8)^{n-1}u[n-1]-\frac{5}{13}(-0.5)^{n-2}u[n-2]-\frac{8}{13}(0.8)^{n-2}u[n-2]\\&=2\delta[n-1]-\frac{10}{13}(-0.5)^{n-2}u[n-2]+\frac{24}{65}(0.8)^{n-2}u[n-2]\end{aligned}$$

12.16 차분 방정식 $y[n]=0.5y[n-1]+bx[n]$으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 다음을 구하라.

(a) $H(0)=1$이 되기 위한 b의 값

Ans) $H(0)=\frac{b}{1-0.5e^{-j0}}=\frac{b}{1-0.5}=1$

$\therefore\ b=0.5$

(b) 반전력 주파수

Ans) $|H(\Omega)|^2=\frac{b^2}{(1-0.5\cos\Omega)^2+(0.5\sin\Omega)^2}=\frac{0.25}{1.25-\cos\Omega}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos\Omega=0.75\ \rightarrow\ \Omega=0.23\pi$

12.17 실수 신호 $x[n]$의 DFT $X[k]$가 다음과 같을 때 빈칸을 채워라. 그리고 각 경우에 대해 $n=0$에서의 신호 값 $x[0]$을 구하라.

(a) $X[k]=[3,\ (\ ),\ 1,\ 0,\ (\ ),\ 2]$

Ans) $X[k]=[3,\ (2),\ 1,\ 0,\ (1),\ 2]$

$$x[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]=\frac{1}{6}[(3)+(2)+(1)+(0)+(1)+(2)]=\frac{3}{2}$$

(b) $X[k]=[0,\ -j,\ (\ ),\ -2,\ 2-j,\ (\ )]$

Ans) $X[k]=[0,\ -j,\ (2+j),\ -2,\ 2-j,\ (j)]$

$$x[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]=\frac{1}{6}[(0)+(-j)+(2+j)+(-2)+(2-j)+(j)]=\frac{1}{3}$$

(c) $X[k]=[4,\ 2,\ (\ ),\ 2+j,\ (\ ),\ 0,\ (\ ),\ -1,\ (\ )]$

Ans) $X[k]=[4,\ 2,\ (-1),\ 2+j,\ (0),\ 0,\ (2-j),\ -1,\ (2)]$

$$x[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]=\frac{1}{9}[(4)+(2)+(-1)+(2+j)+(0)+(0)+(2-j)+(-1)+(2)]=\frac{10}{9}$$

(d) $X[k]=[-1,\ (\ ),\ 1,\ (\ ),\ 0,\ j2,\ (\ ),\ 1-j]$

Ans) $X[k]=[-1,\ (1+j),\ 1,\ (-j2),\ 0,\ j2,\ (1),\ 1-j]$

$$x[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]=\frac{1}{8}[(-1)+(1+j)+(1)+(-j2)+(0)+(j2)+(1)+(1-j)]=\frac{3}{8}$$

12.18 다음에 주어진 $X[k]$에 대하여 IDFT를 수행하여 $x[n]$을 구하라.

(a) $X[k]=[1,\ j,\ 0,\ -j]$

Ans) $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]\,W_N^{-kn}$

$$\therefore\ x[n]=\left[\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right]$$

(b) $X[k]=[1,\ 1,\ 1,\ 1]$

Ans) $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]\,W_N^{-kn}$

$$\therefore\ x[n]=[1,\ 0,\ 0,\ 0]$$

위의 결과는 DTFT에서 $\delta[n]\Leftrightarrow 1$의 변환쌍에 완전히 일치함을 알 수 있다.

(c) $X[k]=[1,\ -1,\ 1,\ -1]$

Ans) $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]\,W_N^{-kn}$

$$\therefore\ x[n]=[0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

(d) $X[k]=[2,\ 0,\ -2,\ 0]$

Ans) $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]\,W_N^{-kn}$

$$\therefore\ x[n]=[0,\ 1,\ 0,\ 1]$$

(e) $X[k]=[1,\ 0,\ 0,\ j,\ 0,\ -j,\ 0,\ 0]$

Ans) $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]\,W_N^{-kn}=\frac{1}{8}(X[0]\,W_8^0+X[3]\,W_8^{-3n}+X[5]\,W_8^{-5n})$

$$\therefore\ x[n]=[\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}),\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1-\sqrt{2}),\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1+\sqrt{2}),\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}(1+\sqrt{2})]$$

(f) $X[k]=\begin{cases}3, & k=0\\ 1, & 1\le k\le 9\end{cases}$

Ans) $X[k] = 1 + 2\delta[k], \quad 0 \le k \le 9$

$$\begin{cases} x[n] = \delta[n] & \Leftrightarrow \quad X[k] = 1 \\ x[n] = 1 & \Leftrightarrow \quad X[k] = N\delta[k] \end{cases}$$

$$\therefore \ x[n] = \frac{1}{5} + \delta[n] = [\frac{6}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{5}]$$

12.19 신호 $x[n] = [\underset{\uparrow}{1}, \ 0, \ 2, \ 1]$에 대해 물음에 답하라.

(a) 4점 DFT $X[k]$를 구하라.

Ans) $X[k] = \sum_{n=<N>} x[n] W_N^{kn}$

$$\therefore \ X[k] = [4, \ -1+j, 2, \ -1-j]$$

(b) $y[n] = x[n] \circledast x[n]$을 원형 컨벌루션 정의를 이용하여 계산하라.

Ans) $y[n] = x[n] \circledast x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] x[n-m]$

$$\therefore \ y[n] = [\underset{\uparrow}{5}, \ 4, \ 5, \ 2]$$

(c) $y[n] = x[n] \circledast x[n]$을 DFT를 이용하여 계산하라.

Ans) $Y[k] = X[k]X[k] = [16, \ -2j, \ 4, \ 2j]$

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} Y[k] W_N^{-kn}$$

$$\therefore \ y[n] = [\underset{\uparrow}{5}, \ 4, \ 5, \ 2]$$

(d) $h[n] = [\underset{\uparrow}{1}, \ 0, \ 2, \ 1, \ 0, \ 0]$에 대해 $z[n] = h[n] \circledast h[n]$을 계산하라.

Ans) $z[n] = h[n] \circledast h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] h[n-m]$

$$\therefore \ z[n] = [\underset{\uparrow}{2}, \ 0, \ 4, \ 2, \ 4, \ 4]$$

12.20 두 이산 신호 $x[n] = [-1, \ 2, \ 1, \ 3]$과 $y[n] = [-2, \ -1, \ 0, \ 2]$에 대해 물음에 답하라.

(a) 선형 컨벌루션 $x[n] * y[n]$을 구하여라.

Ans) $z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=0}^{3} x[n-k] y[k]$

$$\therefore \ z[n] = [2, \ -3, \ -4, \ -9, \ 1, \ 2, \ 6]$$

(b) 원형 컨벌루션 $x[n] \circledast y[n]$을 구하여라.

Ans) $s[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m]$

$$\therefore \ s[n] = [3, \ -1, \ 2, \ -9]$$

(c) $x[n]$과 $y[n]$에 3개의 영 채우기를 하여 원형 컨벌루션을 수행하라.

Ans) $x'[n]=[-1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0]$ & $y'[n]=[-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]$

$$s'[n]=x'[n]\circledast y'[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x'[m]y'[n-m]$$

$$\therefore\ s'[n]=[2,\ -3,\ -4,\ -9,\ 1,\ 2,\ 6]$$

(a)의 결과와 (c)의 결과는 같다. 즉, $s'[n]=z[n]$

[응용 문제]

12.21 $x[n]$의 DTFT가 $X(\Omega)=\dfrac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$일 때, 주어진 각 신호의 DTFT를 구하라.

(a) $y[n]=x[-n]$

Ans) DTFT의 시간 반전 성질 $x[-n]\Leftrightarrow X(-\Omega)$에 의해

$$Y(\Omega)=X(-\Omega)=\frac{1}{1-0.5e^{j\Omega}}$$

(b) $y[n]=x[n-1]$

Ans) DTFT의 시간이동 성질에 의해

$$Y(\Omega)=e^{-j\Omega}X(\Omega)=\frac{e^{-j\Omega}}{1-0.5e^{j\Omega}}$$

(c) $y[n]=nx[n]$

Ans) DTFT의 주파수 미분 성질에 의해

$$Y(\Omega)=j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}=-\frac{0.5e^{-j\Omega}}{(1+0.5e^{-j\Omega})^2}$$

(d) $y[n]=x[n+1]+x[n-1]$

Ans) DTFT의 선형성과 시간 이동 성질에 의해

$$Y(\Omega)=e^{j\Omega}X(\Omega)+e^{-j\Omega}X(\Omega)=\frac{2\cos(\Omega)}{1-0.5e^{-j\Omega}}$$

(e) $y[n]=x[n]\cos(\pi n)$

Ans) $w[n]=\cos(\pi n)$라 두면, DTFT의 주파수 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(\Omega)=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)*W(\Omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}\right)*(\delta(\Omega+\pi)+\delta(\Omega-\pi))=\frac{1}{1+0.5e^{-j\Omega}}$$

(f) $y[n]=x[n]*x[n]$

Ans) DTFT의 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(\Omega)=X(\Omega)X(\Omega)=\frac{1}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

12.22 파스발의 정리를 이용하여 신호 $x[n]=\mathrm{sinc}(\frac{n}{2})\cos(\frac{\pi}{2}n)$의 에너지를 구하라.

Ans) DTFT의 변조 성질을 이용하면

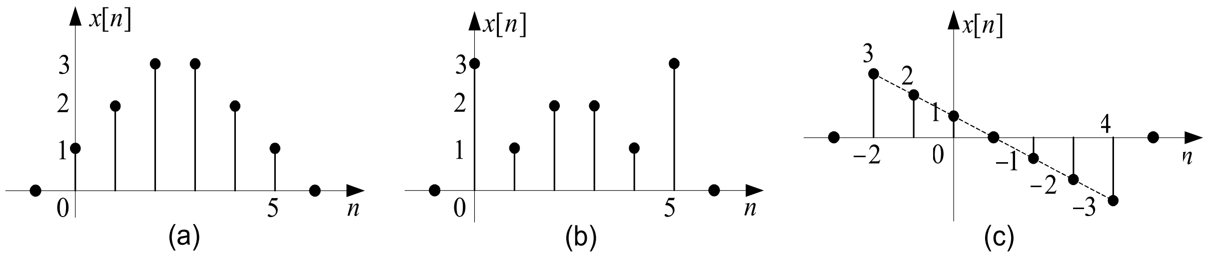
$$X(\Omega)=\frac{1}{2}X'(\Omega-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}X'(\Omega+\frac{\pi}{2})=\mathrm{rect}(\frac{\Omega}{\pi}-\frac{1}{2})+\mathrm{rect}(\Omega+\frac{1}{2})=\mathrm{rect}(\frac{\Omega}{2\pi})$$

파스발의 정리를 이용하면

$$E_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{rect}(\frac{\Omega}{2\pi})|^2\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,d\Omega=1$$

12.23 다음 그림의 신호 $x[n]$에 대해, $X(\Omega)$를 직접 구하지 말고 다음의 값을 구하라.

(1) $X(0)$ (2) $X(\pi)$ (3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\,d\Omega$ (4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$



(a)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]$$

$\therefore\ X(0)=1+2+3+3+2+1=12$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n]$$

$\therefore\ X(\pi)=1-2+3-3+2-1=0$

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\,d\Omega$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega\Big|_{n=0}=x[0]=1$$

(4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=1^2+2^2+3^2+3^2+2^2+1^2=28$$

(b)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]$$

$\therefore\ X(0)=3+1+2+2+1+3=12$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n]$$

$\therefore\ X(\pi) = 3-1+2-2+1-3 = 0$

(3) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,d\Omega$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega\Big|_{n=0} = x[0] = 3$$

(4) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = 3^2+1^2+2^2+2^2+1^2+3^2 = 28$$

(c)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$\therefore\ X(0) = 3+2+1+0-1-2-3 = 0$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n]$$

$\therefore\ X(\pi) = 3-2+1-0+1-2+3 = 4$

(3) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,d\Omega$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega\Big|_{n=0} = x[0] = 1$$

(4) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = 3^2+2^2+1^2+(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2 = 28$$

12.24 이산 신호 $x[n]$의 DTFT $X(\Omega)$가 다음과 같은 특성을 갖는다고 할 때, 이러한 주파수 영역에서의 특성에 해당하는 시간 영역에서의 특성을 결정하라.

(a) $X(0) = 0$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$
$$=(\cdots+x[-k]\cos(\Omega k)+\cdots+x[0]+x[1]\cos(-\Omega)+\cdots+x[k]\cos(-\Omega k)+\cdots)$$
$$+j(\cdots+x[-k]\sin(\Omega k)+\cdots+x[-1]\sin(\Omega)+x[1]\sin(-\Omega)+\cdots+x[k]\sin(-\Omega k)+\cdots)$$

$\sin(0)=0$이므로 $\{x[i]\}$값에 상관없이 $Im\{X(0)\}=0$이 된다. 따라서 $Re\{X(0)\}=0$이 될 조건만 찾으면 된다.

$$Re\{X(\Omega)\}=x[0]+(x[-1]+x[1])\cos(\Omega)+\cdots+(x[-k]+x[k])\cos(\Omega k)+\cdots=0$$
$$\therefore\ x[0]=0,\ x[1]=-x[-1],\ \cdots,\ x[k]=-x[-k],\ \cdots$$

즉 $x[n]$은 기대칭을 만족하는 실수 기함수 신호이다.

(b) $X(\pi)=0$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega)=\sum_{n=odd}x[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=even}x[n]e^{-j\Omega n}$$
$$X(\pi)=-(\cdots+x[-(2k+1)]+\cdots+x[-1]+x[1]+\cdots+x[2k+1]+\cdots)$$
$$+(\cdots+x[-2k)]+\cdots+x[-2]+x[0]+x[2]+\cdots+x[2k]+\cdots)$$

모든 n에 대해 $X(\pi)=0$을 만족시키려면

$$x[0]=0,\ x[1]=-x[-1],\ \cdots,x[k]=-x[-k],\ \cdots$$

즉 $x[n]$은 기대칭을 만족하는 실수 기함수 신호이다.

※ 실수 신호의 경우 스펙트럼이 2π-주기성+대칭성 관계를 만족해야 하므로 $\Omega=0$뿐만 아니라 $\Omega=\pi$에서도 대칭성을 만족하게 된다. 그러므로 이 조건은 $X(0)=0$의 조건과 동일하다.

(c) $\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}=0$

Ans) (a)의 풀이 과정에서

$$Im\{X(\Omega)\}=(x[-1]-x[1])\sin(\Omega)+\cdots+(x[-k]-x[k])\sin(\Omega k)+\cdots=0$$
$$\therefore\ x[1]=x[-1],\ \cdots,\ x[k]=x[-k],\ \cdots$$

즉 $x[n]$은 우대칭을 만족하는 실수 우함수 신호이다.

(d) $\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\,d\Omega=0$

Ans) $x[n]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$

$$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\,d\Omega$$
$$\therefore\ x[0]=0$$

12.25 다음의 임펄스 응답을 갖는 이산 LTI 시스템에 $x[n]=\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$을 입력으로 인가할 때 출력 $y[n]$을 구하라.

(a) $h[n]=[1\ \underset{\uparrow}{1},\ 1]$

Ans) $H(\Omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\Omega n}=e^{j\Omega}+1+e^{-j\Omega}$

$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \delta(\Omega - \frac{3\pi}{4})]$

$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = (e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega})(\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}))$

이를 역변환하면

$$y[n] = \cos(\frac{3\pi}{4}(n+1)) + \cos(\frac{3\pi}{4}n) + \cos(\frac{3\pi}{4}(n-1))$$

(b) $h[n] = [-1, \underset{\uparrow}{1}, -1]$

Ans) $H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = -e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega}$

$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \delta(\Omega - \frac{3\pi}{4})]$

$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = (-e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega})(\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}))$

이를 역변환하면

$$y[n] = -\cos(\frac{3\pi}{4}(n+1)) + \cos(\frac{3\pi}{4}n) - \cos(\frac{3\pi}{4}(n-1))$$

12.26 인과 LTI 시스템이 차분 방정식 $y[n] + 0.5y[n-1] = x[n]$으로 표현된다고 한다.

(a) 시스템의 주파수 응답 $H(\Omega)$를 구하라.

Ans) $Y(\Omega) + 0.5e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$

$$\therefore\ H(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

(b) 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 구하라.

Ans) $H(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - (-0.5e^{-j\Omega})}$

$$\therefore\ h[n] = (-0.5)^n u[n]$$

(c) 입력이 $x[n] = (0.5)^n u[n]$일 때 시스템 출력을 구하라.

Ans) $X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{0.5}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{0.5}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$$\therefore\ y[n] = 0.5(-0.5)^n u[n] + 0.5(0.5)^n u[n] = ((-0.5)^{n-1} + (0.5)^{n+1})u[n]$$

(d) 입력의 DTFT가 $X(\Omega) = 1 + 2e^{-j3\Omega}$일 때 시스템 출력을 구하라.

Ans) $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1 + 2e^{-j3\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{2e^{-j3\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$

$$\therefore\ y[n] = (-0.5)^n u[n] + 2(-0.5)^{n-3}u[n-3]$$

(e) 입력의 DTFT가 $X(\Omega) = \dfrac{1}{(1-0.25e^{-j\Omega})(1+0.5e^{-j\Omega})}$ 일 때 시스템 출력을 구하라.

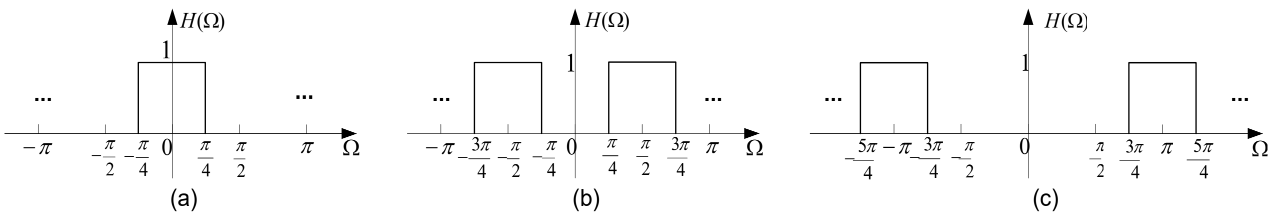
Ans) $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \dfrac{1/9}{1-0.25e^{-j\Omega}} + \dfrac{2/9}{1+0.5e^{-j\Omega}} + \dfrac{2/3}{(1+0.5e^{-j\Omega})^2}$

$$\therefore\ y[n] = \frac{1}{9}(0.25)^n u[n] + \frac{2}{9}(-0.5)^n u[n] + \frac{2}{3}(n+1)(-0.5)^n u[n]$$

12.27 주파수 응답이 다음 그림과 같은 이산 시스템이 있다. 이 시스템의 임펄스 응답을 구하고, 아래와 같은 입력을 인가할 때 출력을 구하라.

(1) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

(2) $x_2[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$



Ans) $X_1(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{6}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{6})) + \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{3}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{3})) + j\pi(\delta(\Omega+\frac{5\pi}{6}) - \delta(\Omega-\frac{5\pi}{6}))$

$X_2(\Omega) = 1 + \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{2}))$

(a)

(1) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_1(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{6}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{6}))$$

$$\therefore\ y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6})$$

(2) $x[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_2(\Omega) = H(\Omega)$$

$$\therefore\ y[n] = h[n] = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\frac{n}{4})$$

(b)

(1) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_1(\Omega) = \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{3}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{3}))$$

$$\therefore\ y[n] = \cos(\frac{\pi}{3})$$

(2) $x[n]=\delta[n]+\cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)X_2(\Omega)=H(\Omega)+\pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\frac{\pi}{2}))$$

$$\therefore\ y[n]=h[n]+\cos(\frac{\pi}{2}n)=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{n}{4})\cos(\frac{\pi}{2}n)+\cos(\frac{\pi}{2}n)=(1+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{n}{4}))\cos(\frac{\pi}{2}n)$$

(c)

(1) $x_1[n]=1+\cos(\frac{\pi}{6}n)+\cos(\frac{\pi}{3}n)+\sin(\frac{5\pi}{6}n)$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)X_1(\Omega)=j\pi(\delta(\Omega+\frac{5\pi}{6})-\delta(\Omega-\frac{5\pi}{6}))$$

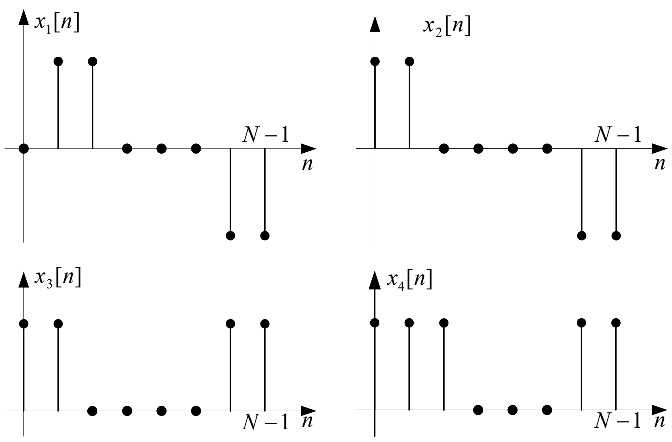
$$\therefore\ y[n]=\sin(\frac{5\pi}{6})$$

(2) $x[n]=\delta[n]+\cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)X_2(\Omega)=H(\Omega)$$

$$y[n]=h[n]=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{n}{4})\cos(\pi n)=(-1)^n\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{n}{4})$$

12.28 다음 그림은 $N=8$인 몇 개의 N점 이산 신호를 나타낸다.



(a) 어느 신호가 실수인 DFT를 가지는가?

Ans) $x_3[n]$

(b) 어느 신호가 허수인 DFT를 가지는가?

Ans) $x_2[n]$

(c) 어느 신호에 대해 $X[0]=0$이 되는가?

Ans) $X[0]=\sum_{n=<N>}x[n]$

따라서 $x_1[n]$과 $x_2[n]$이 $X[0]=0$을 만족한다.

(d) $k = 2, 4, 6$에 대해 어느 신호가 $X[k]=0$이 되는가?

Ans) $X[k] = \sum_{n=<N>} x[n]\, W_N^{kn}$

$k=2$의 경우에는 W_8^0, W_8^2, W_8^4, W_8^6, W_8^0, W_8^2, W_8^4, W_8^6의 순서로 회전인자가 곱해진다.

→ $x[0]+x[4]=x[2]+x[6]$, $x[1]+x[5]=x[3]+x[7]$을 만족하면 $X[2]=0$

$X[k]$는 $N/2=4$에 대해 대칭성을 만족해야 하므로 $k=6$일 때도 조건은 같다

$k=4$의 경우에는 W_8^0, W_8^4, W_8^0, W_8^4, W_8^0, W_8^4, W_8^0, W_8^4의 순서로 회전인자가 곱해진다.

→ $x[0]+x[2]+x[4]+x[6]=x[1]+x[3]+x[5]+x[7]$을 만족하면 $X[4]=0$

∴ $X[2]=0$, $X[4]=0$, $X[6]=0$을 만족하는 신호는 $x_3[n]$뿐이다.

12.29 이산 신호 $x[n]=[1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ -8]$의 DFT $X[k]$를 계산하지 말고 다음의 값을 구하라.

(a) $X[0]$ (b) $X[4]$ (c) $\sum_{k=0}^{7} X[k]$ (d) $\sum_{k=0}^{7} (-1)^k X[k]$

Ans) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}$

$N=8$이므로

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^0 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$X[4] = X[\frac{N}{2}] = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]$$

$$\sum_{k=0}^{7} X[k] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} = \ = Nx[0]$$

$$\sum_{k=0}^{7} (-1)^k X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} = Nx[\frac{N}{2}]$$

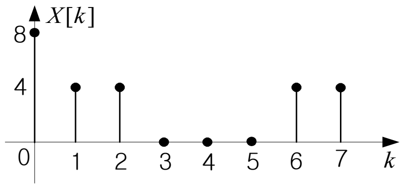
(a) $X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n] = -4$

(b) $X[4] = \sum_{n=0}^{7} (-1)^n x[n] = 36$

(c) $\sum_{k=0}^{7} X[k] = Nx[0] = 8$

(d) $\sum_{k=0}^{7} (-1)^k X[k] = Nx[\frac{N}{2}] = 40$

12.30 아날로그 신호 $x(t)$를 샘플링 주파수 8[kHz]로 샘플링하여 이산 신호 $x[n]$을 얻은 뒤, 이를 8점 DFT하여 다음과 같은 $X[k]$를 얻었다. 원래의 신호 $x(t)$를 구하라.



Ans) $N = 8 \quad \& \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{8}$

그림으로부터 $X[k]$를 IDFT하면

$$x[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) + \frac{1}{4}\ \cos\left(2\frac{2\pi}{8}n\right)$$

$\Omega = 2\pi$가 $\omega_s = 2\pi \times 8000$에 해당하므로, $\Omega_1 = \frac{2\pi}{8}$과 $\Omega_2 = \frac{4\pi}{8}$에 상응하는 아날로그 주파수는

$$\omega_1 = \Omega_1 \times 8000 = 2000\pi$$

$$\omega_2 = \Omega_2 \times 8000 = 4000\pi$$

$$\therefore\ x(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ \cos(2000\pi t) + \frac{1}{4}\ \cos(4000\pi t)$$