제11장 이산 시간 푸리에 급수

[개념 문제]

11.1 이산 (복소) 정현파 신호에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ $\cos(\Omega_0 n)$은 항상 주기 신호이다.

㉯ 이산 정현파 신호가 연속 정현파 신호와 성질이 다른 이유는 기본적으로 시간 변수 n이 정수 값만 가지기 때문이다.

㉰ 다른 이산 정현파와 구분 가능한 이산 정현파 신호의 최대 주파수는 $\Omega = \infty$이다.

㉱ $\cos(\frac{3\pi}{4}n)$과 $\cos(\frac{11\pi}{4}n)$은 서로 다른 신호이다.

Ans) ㉯

11.2 이산 신호의 스펙트럼에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 이산 정현파는 스펙트럼이 주기 함수이다.

㉯ 주기 N인 이산 주기 신호의 주파수 성분은 신호에 따라 무수히 많을 수 있다.

㉰ 이산 신호는 $0 \le \Omega \le \pi$의 스펙트럼만 주어지면 전 주파수 범위에 대한 스펙트럼을 구할 수 있다.

㉱ 이산 정현파 신호는 주파수와 일대일 대응이 되지 않는다.

Ans) ㉯

11.3 이산 시간 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 주기 N인 이산 주기 신호의 푸리에 급수는 수렴 조건이 필요하다.

㉯ 같은 주기를 갖는 이산 주기 신호들의 고조파의 개수는 모두 다를 수 있다.

㉰ 이산 주기 신호의 푸리에 급수와 푸리에 계수는 반드시 $\Omega = [0 \quad 2\pi]$ 구간에서 계산해야 한다.

㉱ 이산 주기 신호의 고조파들은 복소평면의 단위원을 주기로 등분한 점에 위치한다.

Ans) ㉱

11.4 이산 시간 푸리에 급수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 이산 주기 신호의 스펙트럼은 선 스펙트럼이다.

㉯ 이산 실수 주기 신호의 스펙트럼은 반주기에 대해서도 대칭성을 만족한다.

㉰ 이산 N-주기 신호는 $\Omega = [2\Omega_0, \ (N+1)\Omega_0]$ 구간의 주파수 성분들로는 합성할 수 없다.

㉱ 주기 4인 이산 신호 $x[n]$의 푸리에 계수가 X_k일 때, $x[n-2]$의 푸리에 계수는 $e^{-jk\pi}X_k$이다.

Ans) ㉰

이산 N-주기 신호는 연속된 N개의 고조파 성분만 있으면 시간 신호를 합성할 수 있다. $\Omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$이므로 $x[n-2]$의 푸리에 계수는 시간 이동 성질에 의해 $e^{-jn_0 k\Omega_0}X_k = e^{-jk\pi}X_k$가 된다.

11.5 이산 주기 신호의 전력에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 두 이산 주기 신호의 진폭 스펙트럼이 같으면, 두 신호의 전력은 같다.

㉯ 기본파와 3고조파 사이에는 전력이 형성되지 않는다.

㉰ 2고조파와 4고조파는 전력을 형성한다.

㉱ 시간 영역에서 구한 전력과 주파수 영역에서 구한 전력은 같다.

Ans) ㉰

[기초 문제]

11.6 다음과 같은 이산 신호가 주기 $N=4$로 반복되는 이산 주기 신호 $x[n]$의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $[\underset{\uparrow}{1},\ 2,\ 1,\ 0]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(1+2e^{-j\frac{\pi}{2}k}+e^{-j\pi k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1+2+1)=1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(1+2e^{-j\pi}+e^{-j2\pi})=0$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{2}$$

(b) $[\underset{\uparrow}{-1},\ 2,\ -1,\ 0]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(-1+2e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\pi k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(-1+2-1)=0$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(-1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}-e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(-1+2e^{-j\pi}-e^{-j2\pi})=-1$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(-1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}-e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{2}$$

(c) $[\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 0,\ 0]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(1+e^{-j\frac{\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(1+e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(1+e^{-j\pi}) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(1+e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

(d) $[\underset{\uparrow}{0},\ 0,\ 1,\ 1]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(e^{-j\pi k}+e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(e^{-j\pi}+e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = -\frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(e^{-j2\pi}+e^{-j3\pi}) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(e^{-j3\pi}+e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = -\frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

(e) $[\underset{\uparrow}{2},\ -1,\ 1,\ 2]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(2-e^{-j\frac{\pi}{2}k}+e^{-j\pi k}+2e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(2-1+1+2) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(2 - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(2 - j1 - 1 + j2) = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(2 - e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi}) = \frac{1}{4}(2 + 1 + 1 - 2) = \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(2 - e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(2 + j1 - 1 - j2) = \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

(f) $[\underset{\uparrow}{1},\ 2,\ -2,\ 3]$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} - 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1 + 2 - 2 + 3) = 1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} - 2e^{-j\pi} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(1 - j2 + 2 + j3) = \frac{3}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\pi} - 2e^{-j2\pi} + 3e^{-j3\pi}) = \frac{1}{4}(1 - 2 - 2 - 3) = -\frac{3}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} - 2e^{-j3\pi} + 3e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(1 + j2 + 2 - j3) = \frac{3}{4} - j\frac{1}{4}$$

11.7 다음과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하고, 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.

(a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)$

Ans) 주기와 주파수를 구하면 $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{\pi}{4}, \quad N = 8$

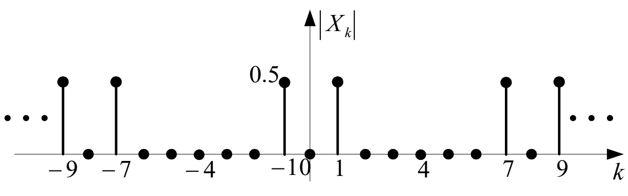
$$x[n] = \sum_{k=0}^{7} X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

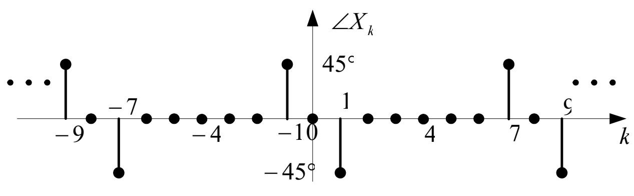
$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi(n-1)}{4}} + e^{-j\frac{\pi(n-1)}{4}}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4})e^{j\frac{\pi}{4}n} + (\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4})e^{j7\frac{\pi}{4}n}$$

$$\therefore\ X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_7 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$





(b) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n-1)\right)$

Ans) 주기와 주파수를 구하면 $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\quad N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = 4$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{3\pi}{2}n}$$

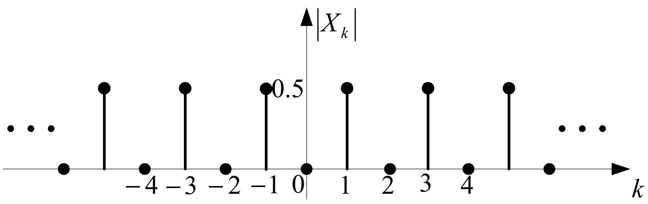
$$x[n] = \frac{1}{j2}\left(e^{j\frac{3\pi(n-1)}{2}} - e^{-j\frac{3\pi(n-1)}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j3\frac{3\pi}{2}n}$$

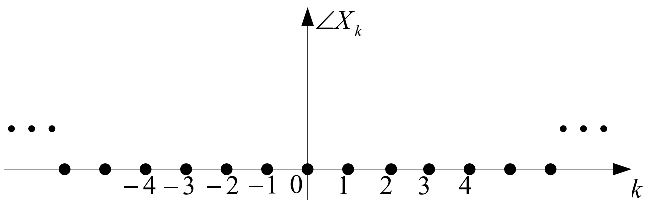
$\therefore\ X_0 = 0$

$X_1 = \frac{1}{2}$

$X_2 = 0$

$X_3 = \frac{1}{2}$





(c) $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$

Ans) 주기와 기본 주파수는 $N = 12$, $\quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{6}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} X_k e^{jk\frac{\pi}{6}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\right) + \frac{1}{j2}\left(e^{j\frac{2\pi}{4}n} - e^{-j\frac{2\pi}{4}n}\right) = \frac{1}{2}e^{j4\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{j8\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j3\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j9\frac{\pi}{6}}$$

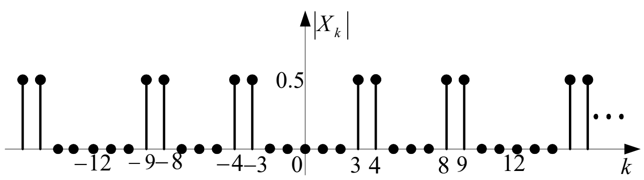
$\therefore\ X_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

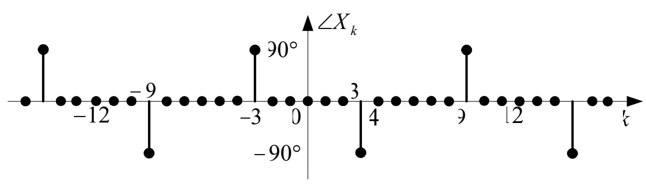
$X_4 = \frac{1}{2}$

$X_8 = \frac{1}{2}$

$X_9 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$

$X_k = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 11, \quad k \neq 3,\ 4,\ 8,\ 9$





(d) $x[n]=(0.5)^{|n|},\ -2 \le n \le 3, \quad N=6$

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\dfrac{\pi}{3}$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{5} X_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$X_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-2}^{3}(0.5)^{|n|}e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}e^{jk\frac{2\pi}{3}}+\frac{1}{2}e^{jk\frac{\pi}{3}}+1+\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{4}e^{-jk\frac{2\pi}{3}}+\frac{1}{8}e^{-jk\frac{3\pi}{3}}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3}k)+\cos(\frac{\pi}{3}k)+1+(-1)^k\frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore\ X_0=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{16}$$

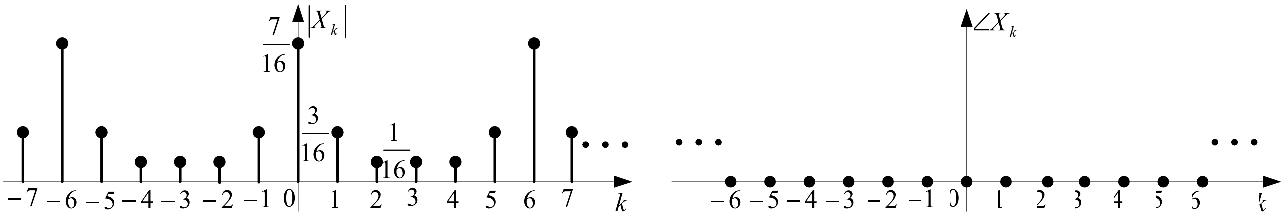
$$X_1=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}$$

$$X_2=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi}{3})+\cos(\frac{2\pi}{3})+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

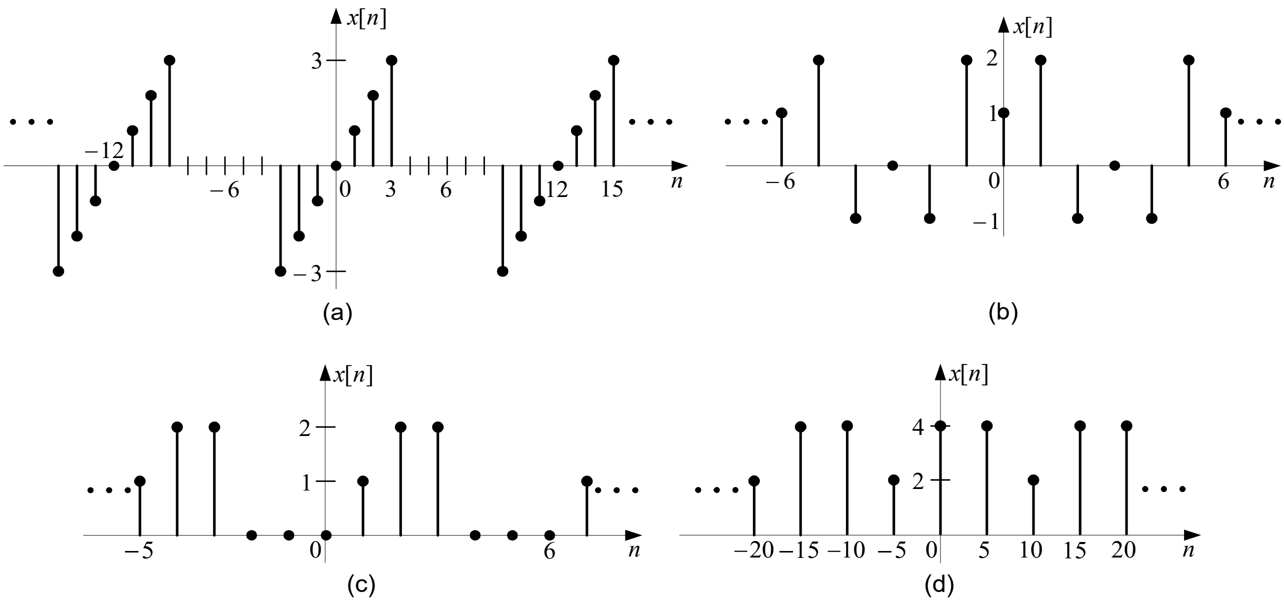
$$X_3=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{6\pi}{3})+\cos(\frac{3\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

$$X_4=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{8\pi}{3})+\cos(\frac{4\pi}{3})+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

$$X_5=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{10\pi}{3})+\cos(\frac{5\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}$$



11.8 다음 그림의 이산 주기 신호에 대한 DTFS를 구하고 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.



(a)

Ans) 주기 $N=12$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\pi/6$

$$X_k=\frac{1}{12}\sum_{n=-6}^{5}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{6}n}=\frac{1}{12}\left(-3e^{jk\frac{3\pi}{6}}-2e^{jk\frac{2\pi}{6}}-e^{jk\frac{\pi}{6}}+e^{-jk\frac{\pi}{6}}+2e^{-jk\frac{2\pi}{6}}+3e^{-jk\frac{3\pi}{6}}\right)$$

$$=\frac{j}{12}\left(-2\sin(\frac{\pi}{6}k)-4\sin(\frac{\pi}{3}k)-6\sin(\frac{\pi}{2}k)\right)$$

$$\therefore\ X_0=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{0\pi}{6}-4\sin\frac{0\pi}{3}-6\sin\frac{0\pi}{2}\right)=0$$

$$X_1=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{\pi}{6}-4\sin\frac{\pi}{3}-6\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(-1-2\sqrt{3}-6)=-\frac{j}{12}(7+2\sqrt{3})$$

$$X_2=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{2\pi}{6}-4\sin\frac{2\pi}{3}-6\sin\frac{2\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(-\sqrt{3}-2\sqrt{3})=-\frac{j}{12}(3\sqrt{3})$$

$$X_3=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{3\pi}{6}-4\sin\frac{3\pi}{3}-6\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{12}(-2-0+6)=\frac{j}{12}(4)$$

$$X_4=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{4\pi}{6}-4\sin\frac{4\pi}{3}-6\sin\frac{4\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(-\sqrt{3}+2\sqrt{3})=\frac{j}{12}(\sqrt{3})$$

$$X_5=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{5\pi}{6}-4\sin\frac{5\pi}{3}-6\sin\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(-1+2\sqrt{3}-6)=-\frac{j}{12}(7-2\sqrt{3})$$

$$X_6=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{6\pi}{6}-4\sin\frac{6\pi}{3}-6\sin\frac{6\pi}{2}\right)=0$$

$$X_7=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{7\pi}{6}-4\sin\frac{7\pi}{3}-6\sin\frac{7\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(1-2\sqrt{3}+6)=\frac{j}{12}(7-2\sqrt{3})$$

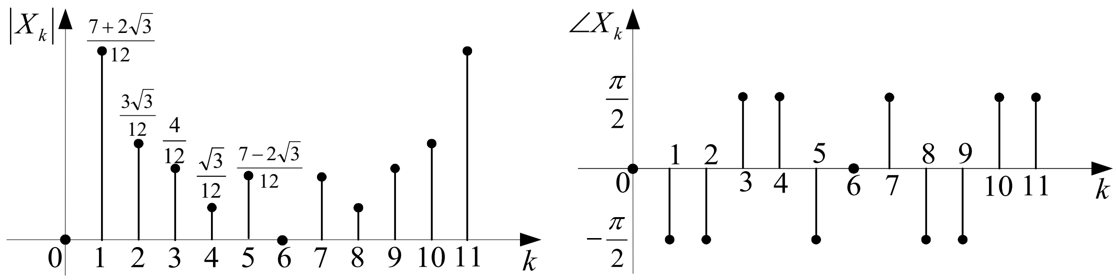
$$X_8=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{8\pi}{6}-4\sin\frac{8\pi}{3}-6\sin\frac{8\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(\sqrt{3}-2\sqrt{3})=-\frac{j}{12}(\sqrt{3})$$

$$X_9=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{9\pi}{6}-4\sin\frac{9\pi}{3}-6\sin\frac{9\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(2-6)=\frac{j}{12}(-4)$$

$$X_{10}=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{10\pi}{6}-4\sin\frac{10\pi}{3}-6\sin\frac{10\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(\sqrt{3}+2\sqrt{3})=\frac{j}{12}(3\sqrt{3})$$

$$X_{11}=\frac{j}{12}\left(-2\sin\frac{11\pi}{6}-4\sin\frac{11\pi}{3}-6\sin\frac{11\pi}{2}\right)=\frac{j}{12}(1+2\sqrt{3}+6)=\frac{j}{12}(7+2\sqrt{3})$$

※ 신호가 실수 기함수 대칭이므로 스펙트럼의 실수부=0



(b)

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{3}$

$$X_k=\frac{1}{6}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(-e^{j2k\frac{\pi}{3}}+2e^{jk\frac{\pi}{3}}+1+2e^{-jk\frac{\pi}{3}}-e^{-j2k\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+4\cos(k\frac{\pi}{3})-2\cos(2k\frac{\pi}{3})\right)$$

$$\therefore\ X_0 = \frac{1}{6}(1+4\cos(0\frac{\pi}{3})-2\cos(2\cdot 0\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1+4-2) = \frac{1}{2}$$

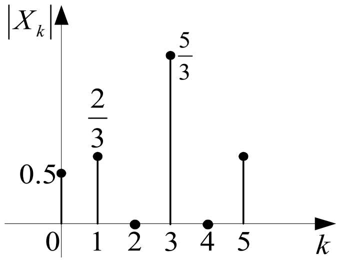
$$X_1 = \frac{1}{6}(1+4\cos(\frac{\pi}{3})-2\cos(2\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1+2+1) = \frac{2}{3}$$

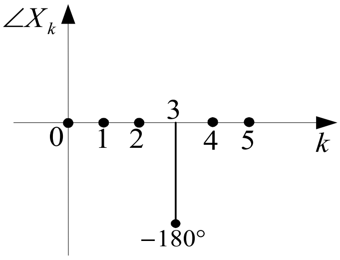
$$X_2 = \frac{1}{6}(1+4\cos(2\frac{\pi}{3})-2\cos(4\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1-2+1) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{6}(1+4\cos(3\frac{\pi}{3})-2\cos(6\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1-4-2) = -\frac{5}{3}$$

$$X_4 = \frac{1}{6}(1+4\cos(4\frac{\pi}{3})-2\cos(8\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1-2+1) = 0$$

$$X_5 = \frac{1}{6}(1+4\cos(5\frac{\pi}{3})-2\cos(10\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{6}(1+2+1) = \frac{2}{3}$$





(c)

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \pi/3$

$$X_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6}\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-jk\frac{3\pi}{3}}\right)$$

$$\therefore\ X_0 = \frac{1}{6}\left(e^{-j0\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j0\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j0\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{5}{6}$$

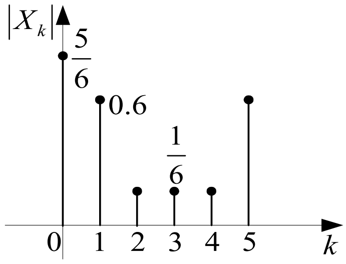
$$X_1 = \frac{1}{6}\left(e^{-j1\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j1\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j1\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0.6\,e^{j\angle -134^\circ}$$

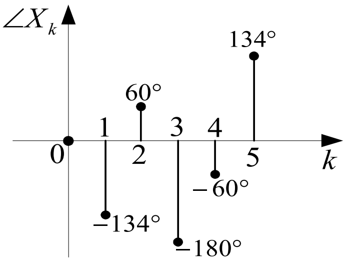
$$X_2 = \frac{1}{6}\left(e^{-j2\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j2\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j2\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}e^{j\angle 60^\circ}$$

$$X_3 = \frac{1}{6}\left(e^{-j3\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j3\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j3\frac{3\pi}{3}}\right) = -\frac{1}{6} = \frac{1}{6}e^{j\angle -180^\circ}$$

$$X_4 = \frac{1}{6}\left(e^{-j4\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j4\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j4\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}e^{j\angle -60^\circ}$$

$$X_5 = \frac{1}{6}\left(e^{-j5\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j5\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j5\frac{3\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{2} + j3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.6\,e^{j\angle 134^\circ}$$





(d)

Ans) 주기 $N=15$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{15}$

$$X_k=\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{14}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{15}n}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-jk\frac{2\pi}{3}}+2e^{-jk\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$\therefore\ X_0=\frac{1}{15}(4+4+2)=\frac{2}{3}$$

$$X_1=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{2\pi}{3}}+2e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1-j\sqrt{3})=\frac{2}{15}e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$X_2=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{4\pi}{3}}+2e^{-j\frac{8\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1+j\sqrt{3})=\frac{2}{15}e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$X_3=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{6\pi}{3}}+2e^{-j\frac{12\pi}{3}}\right)=\frac{2}{3}$$

$$X_4=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{8\pi}{3}}+2e^{-j\frac{16\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1-j\sqrt{3})$$

$$X_5=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{10\pi}{3}}+2e^{-j\frac{20\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1+j\sqrt{3})$$

$$X_6=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{12\pi}{3}}+2e^{-j\frac{24\pi}{3}}\right)=\frac{2}{3}$$

$$X_7=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{14\pi}{3}}+2e^{-j\frac{28\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1-j\sqrt{3})$$

$$X_8=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{16\pi}{3}}+2e^{-j\frac{32\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1+j\sqrt{3})$$

$$X_9=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{18\pi}{3}}+2e^{-j\frac{36\pi}{3}}\right)=\frac{2}{3}$$

$$X_{10}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{20\pi}{3}}+2e^{-j\frac{40\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1-j\sqrt{3})$$

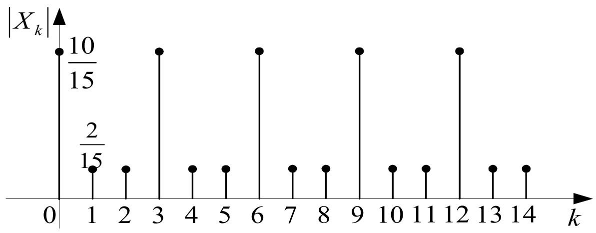
$$X_{11}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{22\pi}{3}}+2e^{-j\frac{44\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1+j\sqrt{3})$$

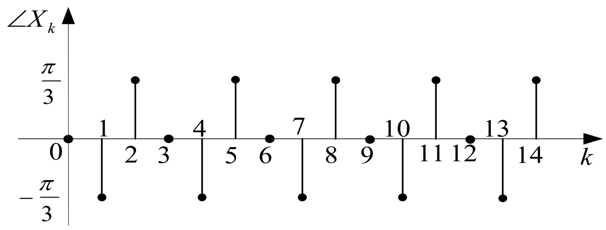
$$X_{12}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{24\pi}{3}}+2e^{-j\frac{48\pi}{3}}\right)=\frac{2}{3}$$

$$X_{13}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{26\pi}{3}}+2e^{-j\frac{52\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1-j\sqrt{3})$$

$$X_{14}=\frac{1}{15}\left(4+4e^{-j\frac{28\pi}{3}}+2e^{-j\frac{56\pi}{3}}\right)=\frac{1}{15}(1+j\sqrt{3})$$

이 문제의 경우는 시간 축을 5배로 압축(시간 솎음)하여 주기 $N=3$인 신호를 DTFS한 결과와 같다.





11.9 다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 2 \\ 0, & 3 \le n \le 7 \end{cases}, \quad N = 8$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{7} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n} = \frac{1}{8}\left(1 + e^{-jk\frac{\pi}{4}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\therefore\ X_0 = \frac{1}{8}(1+1+1) = \frac{3}{8}$$

$$X_1 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{8}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} - j1) = \frac{2+\sqrt{2}}{16}(1-j1)$$

$$X_2 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{8}$$

$$X_3 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{3\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{8}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} + j1) = \frac{2-\sqrt{2}}{16}(1+j1)$$

$$X_4 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}) = \frac{1}{8}$$

$$X_5 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{5\pi}{4}} + e^{-j\frac{5\pi}{2}}) = \frac{1}{8}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - j1) = \frac{2-\sqrt{2}}{16}(1-j1)$$

$$X_6 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{8}$$

$$X_7 = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{7\pi}{2}}) = \frac{1}{8}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + j1) = \frac{2+\sqrt{2}}{16}(1+j1)$$

(b) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{2}$ & 주기 $N = 4$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi(2n-1)}{4}} + e^{-j\frac{\pi(2n-1)}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j1)e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j1)e^{j3\frac{\pi}{2}n}$$

$$\therefore\ X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_0 = X_2 = 0$$

(c) $x[n] = 2\cos(\frac{3\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{3}n)$

Ans) 주기 $N = 24$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{\pi}{12}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{23} X_k e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

$$x[n] = \left(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n}\right) + \frac{1}{j2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right) = e^{j9\frac{\pi}{12}n} + e^{-j9\frac{\pi}{12}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j4\frac{\pi}{12}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j4\frac{\pi}{12}n}$$

$\therefore\ X_4 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$X_9 = 1$

$X_{15}(=X_{-9}) = 1$

$X_{20}(=X_{-4}) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$

$X_k = 0,\quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 23,\quad k \neq 4,\ 9,\ 15,\ 20$

(d) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}(n-1)) - \cos(\frac{\pi}{4}(n-2))$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{7} X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4})}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})}\right)$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{2-\sqrt{2}}{4})e^{j\frac{\pi}{4}n} + (\frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{2-\sqrt{2}}{4})e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$\therefore\ X_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$X_{-1} = X_7 \equiv \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$X_k = 0,\quad k = 0,\ 2,\ 3\ 4,\ 5,\ 6$

(e) $x[n] = 4\cos(\frac{\pi}{3}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$

Ans) $x[n] = 2[\cos(\frac{\pi}{12}n) + \cos(\frac{7\pi}{12}n)]$

주기 $N = 24$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{12}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{23} X_k e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

$$x[n] = \left(e^{j\frac{\pi}{12}n} + e^{-j\frac{\pi}{12}n}\right) + \left(e^{j\frac{7\pi}{12}n} + e^{-j\frac{7\pi}{12}n}\right)$$

$\therefore\ X_1 = X_7 = X_{17}(=X_{-17}) = X_{23}(=X_{-1}) = 1$

$X_k = 0,\quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 23,\quad k \neq 1,\ 7,\ 17,\ 23$

(f) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(n-m) + \cos(\frac{2\pi}{3}n)$

Ans) $x'[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\delta(n-m)$의 주기는 $N_1=2$, 정현파의 주기는 $N_2=3$이므로 이 신호의 주기와 기본 주파수는 $N=6$ & $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{3}$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{5}X_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$X_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

한 주기에 대해 $x'[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ (-1),\ 1,\ (-1),\ 1,\ (-1)]$이므로

$$X_k'=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}(-1)^n e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}}=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 5,\ k\neq 3$$

$$X_3'=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}(-1)^{2n}=1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\right)=\frac{1}{2}e^{j2\frac{\pi}{3}n}+\frac{1}{2}e^{j4\frac{\pi}{3}n}=X_2''e^{j2\Omega_0 n}+X_4''e^{j4\Omega_0 n}$$

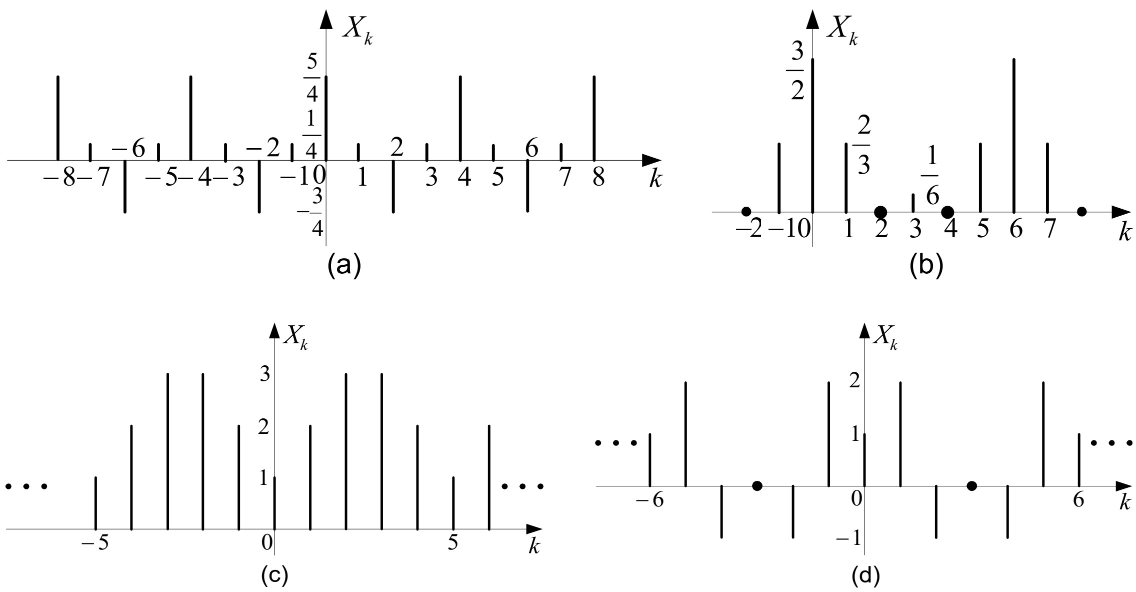
$X_k=X_k'+X_k''$는 다음과 같이 구해진다.

$$\therefore\ X_0=X_1=X_5=0$$

$$X_2=X_4=\frac{1}{2}$$

$$X_3=1$$

11.10 다음 그림과 같이 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 대응되는 이산 신호를 구하라.



(a)

Ans) X_k의 주기는 $N=4$ $\rightarrow$ 신호의 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{2}$

$X_0=\frac{5}{4}$, $X_1=\frac{1}{4}$, $X_2=-\frac{3}{4}$이므로

$$x[n] = |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + |X_2|e^{j(2\Omega_0 n + \angle X_2)} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{3}{4}(-1)^n$$

(b)

Ans) X_k의 주기는 $N=6$ $\rightarrow$ 신호의 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$X_0 = \frac{3}{2}$, $X_1 = \frac{2}{3}$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{1}{6}$이므로

$$x[n] = |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + |X_3|e^{j(3\Omega_0 n + \angle X_3)} = \frac{3}{2} + (-1)^n\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\cos(\frac{\pi}{3}n)$$

(c)

Ans) X_k의 주기는 $N=5$ $\rightarrow$ 신호의 주기 $N=5$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

$X_0 = 1$, $X_1 = 2$, $X_2 = 3$이므로

$$x[n] = |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) = 1 + 4\cos(\frac{2\pi}{5}n) + 6\cos(\frac{4\pi}{5}n)$$

(d)

Ans) X_k의 주기는 $N=6$ $\rightarrow$ 신호의 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$X_0 = 1$, $X_1 = 2$, $X_2 = -1 = 1e^{j\pi}$, $X_3 = 0$이므로

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) \\ &= 1 + 4\cos(\frac{\pi}{3}n) - 2\cos(\frac{2\pi}{3}n) \end{aligned}$$

11.11 이산 주기 신호 $x[n]$의 DTFS 계수가 다음과 같을 때, 이에 대응하는 $x[n]$을 구하라.

(a) $X_k = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3]$, $0 \le k \le 3$, $N=4$

Ans) 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 + e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j2\frac{\pi}{2}n} + e^{j3\frac{\pi}{2}n} = 1 + (-1)^n(1 + 2\cos(\frac{\pi}{2}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$x[0] = 4$
$x[1] = 0$
$x[2] = 0$
$x[3] = 0$

(b) $X_k = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3]$, $0 \le k \le 7$, $N=8$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{7} X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 + e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{j3\frac{\pi}{4}n} = 1 + (j)^n(1 + 2\cos(\frac{\pi}{4}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$x[0]=4$
$x[1]=1+j(1+\sqrt{2})$
$x[2]=0$
$x[3]=1-j(1-\sqrt{2})$
$x[4]=0$
$x[5]=1+j(1-\sqrt{2})$
$x[6]=0$
$x[7]=1-j(1+\sqrt{2})$

(c) $X_k=\delta[k]+\delta[k-2]+\delta[k-4]+\delta[k-6],\quad 0\le k\le 7,\quad N=8$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{7}X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}=1+e^{j2\frac{\pi}{4}n}+e^{j4\frac{\pi}{4}n}+e^{j6\frac{\pi}{4}n}=1+(-1)^n(1+2\cos(\frac{\pi}{2}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$x[0]=4$ $\quad$ $x[4]=4$
$x[1]=0$ $\quad$ $x[5]=0$
$x[2]=0$ $\quad$ $x[6]=0$
$x[3]=0$ $\quad$ $x[7]=0$

(d) $X_k=\delta[k-1]+\delta[k-3]+\delta[k-5]+\delta[k-7],\quad 0\le k\le 7,\quad N=8$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{7}X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}=e^{j\frac{\pi}{4}n}+e^{j3\frac{\pi}{4}n}+e^{j5\frac{\pi}{4}n}+e^{j7\frac{\pi}{4}n}=4(-1)^n\cos(\frac{\pi}{4}n)\cos(\frac{\pi}{2}n)$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$x[0]=4$ $\quad$ $x[4]=-4$
$x[1]=0$ $\quad$ $x[5]=0$
$x[2]=0$ $\quad$ $x[6]=0$
$x[3]=0$ $\quad$ $x[7]=0$

11.12 이산 주기 신호 $x[n]$의 DTFS 계수가 다음과 같을 때, 이에 대응하는 $x[n]$을 구하라.

(a) $X_k=1+\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}k)+\cos(\dfrac{\pi}{4}k)$

Ans) 푸리에 계수의 주기와 기본 주파수는 $N=8$ & $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\dfrac{\pi}{4}$

$$X_k=1+e^{-j\frac{\pi}{4}k}+\frac{1}{4}e^{-j2\frac{\pi}{4}k}+\frac{1}{4}e^{-j6\frac{\pi}{4}k}+e^{-j7\frac{\pi}{4}k}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$\therefore$ $x[0]=8$
$x[1]=8$
$x[2]=2$
$x[3]=0$
$x[4]=0$
$x[5]=0$
$x[6]=2$
$x[7]=8$

(b) $X_k=\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{6}k)+\dfrac{1}{3}\cos(\dfrac{\pi}{2}k)$

Ans) 푸리에 계수의 주기와 기본 주파수는 $N=12$ & $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{6}$

$$X_k=j\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}k}+\frac{1}{6}e^{-j3\frac{\pi}{6}k}+\frac{1}{6}e^{-j9\frac{\pi}{6}k}-j\frac{1}{4}e^{-j11\frac{\pi}{6}k}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{6}n}$$

$\therefore\ x[0]=0$
$x[1]=j3$
$x[2]=0$
$x[3]=2$
$x[4]=0$
$x[5]=0$
$x[6]=0$
$x[7]=0$
$x[8]=0$
$x[9]=2$
$x[10]=0$
$x[11]=-j3$

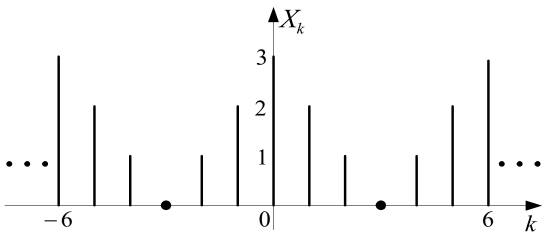
(c) $X_k=(-1)^k$

Ans) X_k의 주기 $N=2$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\pi$

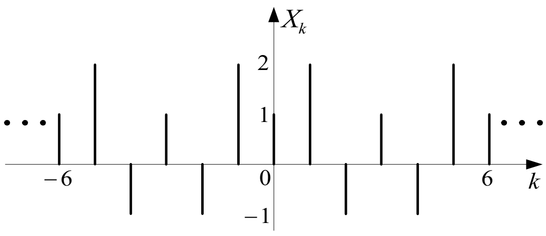
$$x[n]=\sum_{k=0}^{1}X_k e^{jk\pi n}=1-e^{j\pi n}=1-(-1)^n$$

$\therefore\ x[0]=0$
$x[1]=2$

11.13 이산 주기 신호 $x[n]$의 DTFS 계수가 (a)와 같을 때 $n=0$에서의 $x[n]$의 값 $x[0]$를 구하고, (b)와 같을 때 $x[n-3]$의 푸리에 계수를 구하라.



(a)



(b)

(a)

Ans) 주기는 $N=6$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\qquad\rightarrow\qquad x[0]=\sum_{k=<N>}X_k$$

$$\therefore\ x[0]=\sum_{k=0}^{5}X_k=3+2+1+0+1+2=9$$

(b)

Ans) 주기는 $N=6$

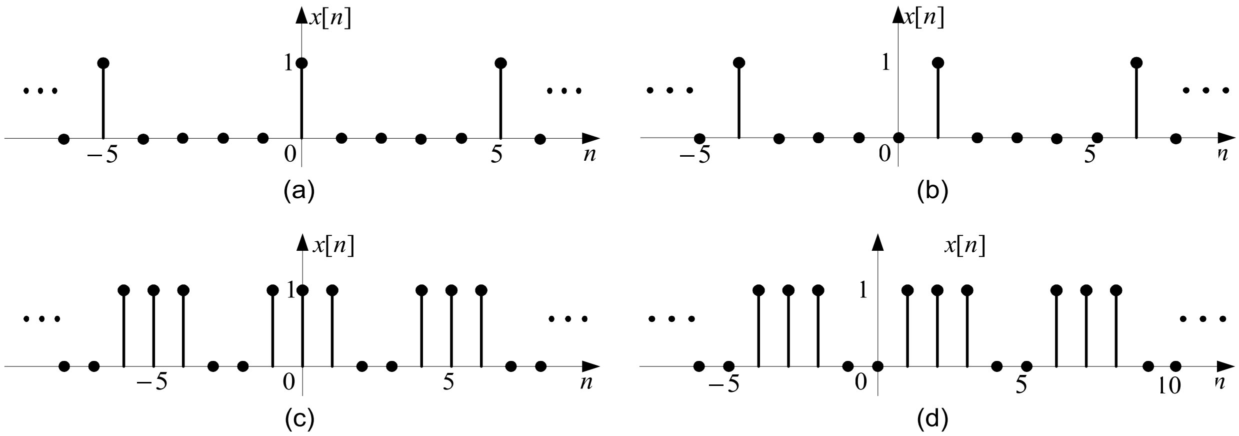
푸리에 급수의 시간 이동 성질로부터 $x[n-3]$의 푸리에 계수 $X_k{}'$는

$$X_k{}'=e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}X_k=(-1)^kX_k$$

따라서

$X_0' = X_0 = 1$
$X_1' = -X_1 = -2$
$X_2' = X_2 = 1$
$X_3' = -X_3 = -1$
$X_4' = X_4 = 1$
$X_5' = -X_5 = -2$

11.14 다음 그림과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하라.



(a)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2}\delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5}$$

따라서 모든 주파수에 대해 푸리에 계수 X_k는 상수가 된다.

(b)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2}\delta[n-1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5}e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

※ (a)의 신호를 $n_0 = 1$만큼 시간 지연한 것이므로 (a)의 결과에 시간 이동 성질을 적용해도 된다.

(c)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{5}\sum_{n=-1}^{1} e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) = \frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{5}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}k\right)}$$

(d)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{3} e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5}e^{-j\frac{4\pi}{5}k}(1+2\cos(\frac{2\pi}{5}k)) = \frac{1}{5}e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\frac{\sin(\frac{3\pi}{5}k)}{\sin(\frac{\pi}{5}k)}$$

※ (c)의 신호를 $n_0 = 2$만큼 시간 지연한 것이므로 (c)의 결과에 시간 이동 성질을 적용해도 된다.

11.15 파스발의 정리를 이용하여 다음 이산 주기 신호의 전력을 계산하라.

(a) $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{3}n) - \sin(\frac{2\pi}{7}n)$

Ans) 주기 $N = 21$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{21}$

$X_3 = j\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$, $X_7 = \frac{1}{2}$이므로

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^{10} 2|X_k|^2 = 2(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2})^2 = 1$$

또는 $P = \bar{c}_3^2 + \bar{c}_7^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1$

(b) $x[n] = 4\sin(\frac{2\pi}{3}n)\cos(\frac{\pi}{2}n)$

Ans) $x[n] = 2[\sin(\frac{7\pi}{6}n) + \sin(\frac{\pi}{6}n)]$

주기 $N = 12$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{6}$

$X_1 = -j = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $X_7 = -j = 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_5^*$ 이므로

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^{5} 2|X_k|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4$$

(c) $x[n] = 1 - 4\sin(\frac{\pi}{6}n) + 2\cos(\frac{\pi}{3}n) + 6\cos(\frac{\pi}{2}n)$

Ans) 주기 $N = 12$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{6}$

$X_0 = 1$, $X_1 = j2$, $X_2 = 1$, $X_3 = 3$이므로

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^{5} 2|X_k|^2 = 1^2 + 2(2^2 + 1^2 + 3^2) = 29$$

(d) $x[n] = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{6}n) - 4\cos(\frac{\pi}{3}n) + 2\cos(\frac{\pi}{2}n) - 4\sin(\frac{3\pi}{4}n)$

Ans) 주기 $N = 24$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{12}$

$X_0 = 1$, $X_2 = -j1$, $X_3 = j2$, $X_4 = -2$, $X_6 = 1$이므로

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^{12} 2|X_k|^2 = 1^2 + 2(1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2) = 21$$

(e) $x[n]=(0.5)^{|n|},\ -2\le n\le 3,\quad N=6$

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{3}$

$$X_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-2}^{3}(0.5)^{|n|}e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3}k)+\cos(\frac{\pi}{3}k)+1+(-1)^k\frac{1}{8}\right)$$

$$X_0=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{16}$$

$$X_1=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}$$

$$X_2=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi}{3})+\cos(\frac{2\pi}{3})+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

$$X_3=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{6\pi}{3})+\cos(\frac{3\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

$$X_4=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{8\pi}{3})+\cos(\frac{4\pi}{3})+1+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

$$X_5=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{10\pi}{3})+\cos(\frac{5\pi}{3})+1-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}$$

$$\therefore\ P=\sum_{k=0}^{5}|X_k|^2=\frac{1}{16^2}(7^2+3^2+1^2+1^2+1^2+3^2)=\frac{70}{256}=\frac{35}{128}$$

[응용 문제]

11.16 다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $x[n]=\begin{cases}1, & n=\text{짝수}\\ 0, & n=\text{홀수}\end{cases}$

Ans) 주기 $N=2$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\pi$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{1}X_k e^{jk\pi n}$$

$$X_k=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}x[n]e^{-jk\pi n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ X_0=X_1=\frac{1}{2}$$

(b) $x[n]=\begin{cases}+1, & n=\text{짝수}\\ -1, & n=\text{홀수}\end{cases}$

Ans) 주기 $N=2$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\pi$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{1}X_k e^{jk\pi n}$$

$$X_k=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}x[n]e^{-jk\pi n}=\frac{1}{2}(1-e^{-jk\pi})$$

$$\therefore\ X_0=\frac{1}{2}(1-e^{-j0\pi})=0$$

$$X_1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\pi}) = 1$$

(c) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$

Ans) 주기 N & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N}\left(\delta[n]e^{-jk\Omega_0 0} + \sum_{n=1}^{N-1} 0 e^{-jk\Omega_0 n}\right) = \frac{1}{N}$$

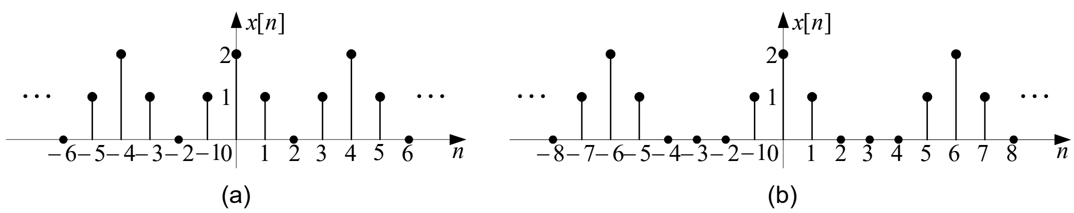
(d) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta[n+1-mN] + \delta[n-mN] + \delta[n-1-mN])$

Ans) 주기 N & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-1}^{N-2} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}(1 + 2\cos(k\Omega_0))$$

11.17 다음 그림과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하고, 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.



(a)

Ans) 주기 $N = 4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ X_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{0\pi}{2}\right) = 1 \qquad X_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{2}\right) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad X_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(b)

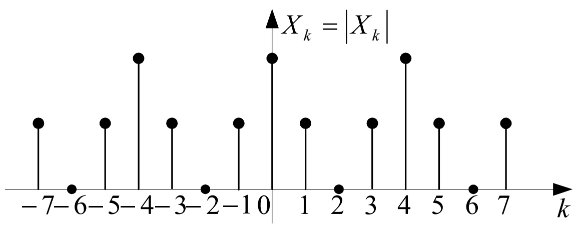
Ans) 주기 $N = 6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$X_k = \frac{1}{6}\sum_{n=-3}^{2} x[n]\,e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{k\pi}{3}\right)$$

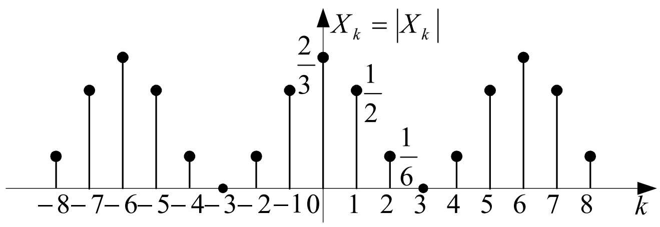
$$\therefore\ X_0 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{0\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \qquad X_3 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{3\pi}{3}\right) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad X_4 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$X_2 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{6} \qquad X_5 = \frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

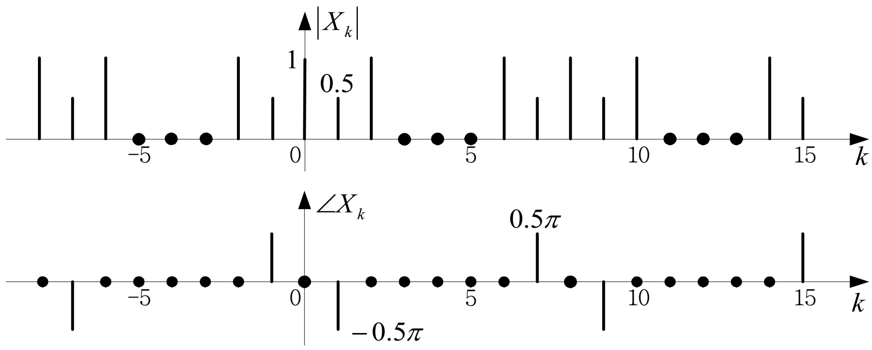


(a)

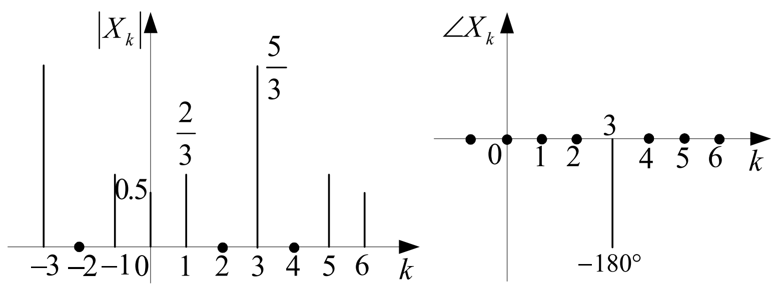


(b)

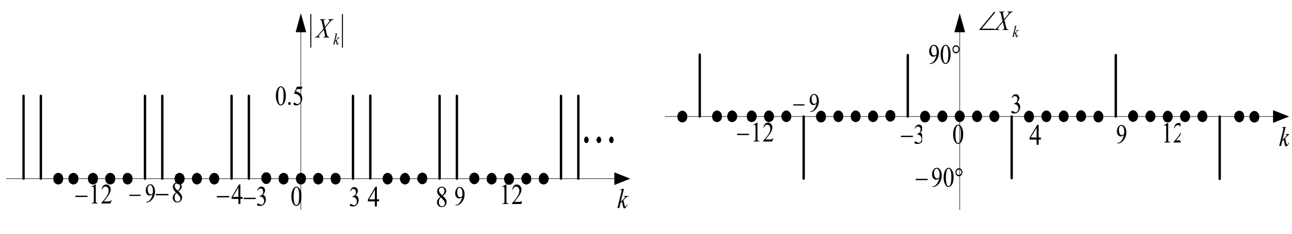
11.18 다음 그림과 같이 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 대응되는 이산 신호를 구하라.



(a)



(b)



(c)

(a)

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{4}$

$|X_0|=1\ \angle X_0=0,\ |X_1|=\frac{1}{2}\ \angle X_1=-\frac{\pi}{2},\ |X_2|=1\ \angle X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0$이므로

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0}+2|X_1|\cos(\Omega_0 n+\angle X_1)+2|X_2|\cos(2\Omega_0 n+\angle X_2) \\ &= 1+\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)+2\cos(\frac{\pi}{2}n) \end{aligned}$$

(b)

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{3}$

$X_0=\frac{1}{2},\ X_1=\frac{2}{3},\ X_2=0,\ X_3=\frac{5}{3}e^{-j\pi}$이므로

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0}+2|X_1|\cos(\Omega_0 n+\angle X_1)+|X_3|e^{j(3\Omega_0 n+\angle X_3)} \\ &= \frac{1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\cos(\frac{\pi}{3}n) \end{aligned}$$

(c)

Ans) 주기 $N=12$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{6}$

$X_3=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\ X_4=\frac{1}{2},\ X_8=\frac{1}{2},\ X_9=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$이므로

$$x[n]=2|X_3|\cos(3\Omega_0 n+\angle X_3)+2|X_4|\cos(4\Omega_0 n+\angle X_4)=\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{2\pi}{3}n)$$

11.19 다음 각 경우에 주기 $N=8$인 이산 주기 신호의 DTFS 계수가 주어져 있다. 이에 대응하는 신호 $x[n]$을 구하라.

(a) $X_k=\delta[k+3]+2\delta[k]+\delta[k-3],\quad -4\le k\le 3$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} X_{-4} &= \delta[-1]+2\delta[-4]+\delta[-7]=0 & X_0 &= \delta[3]+2\delta[0]+\delta[-3]=2 \\ X_{-3} &= \delta[0]+2\delta[-3]+\delta[-6]=1 & X_1 &= \delta[4]+2\delta[1]+\delta[-2]=0 \\ X_{-2} &= \delta[1]+2\delta[-2]+\delta[-5]=0 & X_2 &= \delta[5]+2\delta[2]+\delta[-1]=0 \\ X_{-1} &= \delta[2]+2\delta[-1]+\delta[-4]=0 & X_3 &= \delta[6]+2\delta[3]+\delta[0]=1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ x[n]=\sum_{k=-4}^{3}X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}=2+2\cos(\frac{3\pi}{4}n)$$

(b) $X_k=\cos(\frac{\pi}{4}k)+2\sin(\frac{3\pi}{4}k),\quad 0\le k\le 7,\qquad N=8$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{4}$

$$X_k=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k}+je^{-j3\frac{\pi}{4}k}-je^{-j5\frac{\pi}{4}k}+\frac{1}{2}e^{-j7\frac{\pi}{4}k}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

한 주기의 $x[n]$ 값은

$x[0]=0$
$x[1]=4$
$x[2]=0$
$x[3]=j8$
$x[4]=0$
$x[5]=-j8$
$x[8]=0$
$x[7]=4$

$\therefore\ x[n]=[\cdots\ \underset{\uparrow}{0},\ 4,\ 0,\ j8,\ 0,\ -j8,\ 0,\ 4,\ 0,\ 4,\ 0,\ j8,\ 0,\ -j8,\ 0,\ 4,\ 0,\ \cdots]$

(c) $X_k=(-1)^k,\quad 0\le k\le 7$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

$X_0=+1 \qquad X_4=+1$
$X_1=-1 \qquad X_5=-1$
$X_2=+1 \qquad X_6=+1$
$X_3=-1 \qquad X_7=-1$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{7}X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}=1-e^{j\frac{\pi}{4}n}+e^{j\frac{\pi}{2}n}-e^{j\frac{3\pi}{4}n}+e^{j\pi n}-e^{j\frac{5\pi}{4}n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}-e^{j\frac{7\pi}{4}n}$$
$$=(1+(-1)^n)(1-2\cos(\frac{\pi}{4}n))+2\cos(\frac{\pi}{2}n)=\begin{cases}8, & n=4,\ 12,\ 20,\ 28,\cdots,\\ 0, & \text{그 외}\end{cases}$$

$\therefore\ x[n]=[\cdots\ \underset{\uparrow}{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots]$

(d) $X_k=\begin{cases}1, & -4\le k\le 3,\ k\ne\pm 2\\ 0, & k=\pm 2\end{cases}$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

$X_{-4}=1 \qquad X_0=1$
$X_{-3}=1 \qquad X_1=1$
$X_{-2}=0 \qquad X_2=0$
$X_{-1}=1 \qquad X_3=1$

$$x[n]=\sum_{k=-4}^{3}X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}=e^{-j\pi n}+1+(e^{-j\frac{3\pi}{4}n}+e^{j\frac{3\pi}{4}n})+(e^{-j\frac{\pi}{4}n}+e^{j\frac{\pi}{4}n})$$
$$=(1+(-1)^n)(1+2\cos(\frac{\pi}{4}n))$$

$\therefore\ x[n]=[\cdots\ \underset{\uparrow}{6},\ 0,\ 2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 6,\ 0,\ 2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 6,\ \cdots]$

11.20 주기 N인 이산 주기 신호 $x[n]$의 푸리에 계수를 X_k라고 할 때, 다음에 주어진 신호의 푸리에 계수를 X_k로 나타내라.

(a) $y[n]=x[n-n_0]$

Ans) 시간 이동 성질에 따라

$$Y_k=e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}X_k$$

(b) $y[n]=x[-n]$

Ans) 푸리에 변환 정의식으로부터

$$X'_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[-n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} = X_{-k}$$

(c) $x[n]-x[n-1]$

Ans) 시간 이동 성질에 따라

$$X'_k = X_k - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}X_k = (1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k})X_k$$

(d) $y[n]=x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$ (N=짝수)

Ans) 시간 이동 성질에 따라

$$X'_k = (1-e^{-j\pi k})X_k = (1-(-1)^k)X_k$$

(e) $y[n]=x[n]+x[-n]$

Ans) (b)의 결과를 이용하면

$$Y_k = X_k + X_{-k}$$

(f) $y[n]=x[n]+(-1)^n x[n]$

Ans) $x'[n]=(-1)^n x[n]$의 푸리에 계수는

$$X'_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{j\pi n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-\frac{N}{2})n} = X_{k-\frac{N}{2}}$$

$$\therefore\ Y_k = X_k + X_{k-\frac{N}{2}}$$