제13장 z 변환

[개념 문제]

13.1 z 변환에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ z 변환은 단순히 이산 데이터의 수학적 표현과 취급을 위해 고안된 변환으로 처음부터 주파수 영역 해석을 목적으로 만들어진 것은 아니다.

㉯ z 변환 $X(z)$로부터 항상 유일한 $x[n]$을 구할 수 있다.

㉰ 이산 시간 푸리에 변환은 z 변환의 특수한 경우로 생각할 수 있다.

㉱ z 변환은 에너지 신호나 전력 신호가 아닌 신호들도 주파수 영역으로 변환해준다.

Ans) ㉯

13.2 z 변환의 수렴 영역에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 수렴 영역이 단위원($|z|=1$)을 포함하지 않는 신호는 이론적으로 DTFT를 할 수 없다.

㉯ 인과 유한 구간 신호는 $z=0$을 제외한 전 z 평면이 수렴 영역이다.

㉰ z 변환을 할 수 없는 신호는 존재하지 않는다.

㉱ 단방향 z 변환에서는 같은 $X(z)$에 2개의 수렴 영역이 대응되지 않는다.

Ans) ㉰

13.3 $x[n] \Leftrightarrow \dfrac{z}{(z-1)^2}$일 때 다음의 (단방향) z 변환쌍 중 틀린 것은?

㉮ $x[n+1]u[n] \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$

㉯ $x[n-1]u[n-1] \Leftrightarrow \dfrac{1}{(z-1)^2}$

㉰ $x[n-1]u[n] \Leftrightarrow \dfrac{z}{(z-1)^2}$

㉱ $x[n]u[n-1] \Leftrightarrow \dfrac{z}{(z-1)^2}$

Ans) ㉰

$x[n]=nu[n] \rightarrow x[n-1]u[n]=x[n-1]u[n-1],\ x[n+1]u[n]=x[n+1]u[n+1],\quad x[n]u[n-1]=x[n]$

13.4 z 변환의 성질에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 인과 신호 $x[n]$에 대해 $Z\{x[n-2]u[n]\}=z^{-2}X(z)$이다.

㉯ 주파수 척도조절 $X(\frac{z}{e^{j\Omega_0}})$은 z 평면에서 허축을 따라 각 Ω_0만큼 이동한 것이다.

㉰ $y[n]=x[n]\circledast h[n]$의 z 변환은 $Y(z)=X(z)H(z)$이다.

㉱ 양방향 z 변환과 단방향 z 변환은 동일한 성질을 지닌다.

Ans) ㉮

인과 신호는 $n<0$에서 값이 0이므로 $x[n-2]u[n]=x[n-2]u[n-2]$이다.

13.5 다음의 $X(z)$와 신호의 정상상태 값 $x[\infty]$의 짝 중에서 틀린 것은?

㉮ $X(z)=\dfrac{2z+4}{(z-1)(z^2+z+1)}$, $x[\infty]=2$　　㉯ $X(z)=\dfrac{2z-4}{(z-1)(z^2-z-1)}$, $x[\infty]=2$

㉰ $X(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z^2-z+1)}$, $x[\infty]=2$　　㉱ $X(z)=\dfrac{2z+4}{(z-1)^2(z^2+z+1)}$, $x[\infty]=2$

Ans) ㉱

13.6 z 역변환에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 정의식을 쓰지 않고 $X(z)$를 z 역변환하는 방법은 부분분수 전개법이 유일하다.

㉯ $X(z)$의 분모와 분자의 차수가 같으면 역변환으로 얻은 신호에 반드시 임펄스가 포함된다.

㉰ $X(z)$를 바로 부분분수로 전개해서는 $x[n]$을 z 역변환할 수 없다.

㉱ 복소극을 갖는 $X(z)$를 z 역변환한 신호는 항상 수렴한다.

Ans) ㉯

$X(z)$을 바로 부분분수로 전개해도 되지만, 그 경우 얻어진 결과를 시간 이동 성질을 이용해 다시 정리해야 한다.

13.7 z 변환에 의한 차분 방정식의 풀이에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ z 변환에 의해 차분 방정식은 z에 관한 대수 방정식으로 바뀌어 풀이가 수월하다.

㉯ z 변환의 시간 이동 성질을 이용하여 한 번에 완전해를 구할 수 있다.

㉰ 특성 방정식이 출력의 z 변환 $Y(z)$를 이루는 항들의 분모에 공통으로 들어 있다.

㉱ 반드시 $n>0$에서의 초기 조건이 주어져야만 풀이가 가능하다.

Ans) ㉱

반복 대입법에 의해 $n>0$에서의 초기 조건을 쉽게 얻을 수 있다.

13.8 전달 함수에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 차분 방정식의 계수에 의해 전달 함수는 완전히 결정된다.

㉯ z 평면의 단위원 상의 모든 점들에 대해 전달 함수의 값을 구한 것과 주파수 응답은 같다.

㉰ 서로 다른 임펄스 응답을 갖는 시스템이라도 같은 전달 함수를 가질 수도 있다.

㉱ 전달 함수의 극은 시스템 모드와 임펄스 응답의 형태를 결정한다.

Ans) ㉰

13.9 시스템의 극과 영점에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 극이 z 변환의 수렴 영역에 존재하면, 그 시스템은 안정하다.

㉯ 이득에 미치는 극과 영점의 영향을 크게 하려면 원점에 가깝게 위치시키는 것이 좋다.

㉰ z 평면의 단위원 위에 있는 위상이 Ω_0인 영점은 주파수가 Ω_0인 입력에 대해 출력을 0으로 만든다.

㉱ 원점에 위치한 극은 주파수 응답의 크기와 위상에 모두 영향을 미친다.

Ans) ㉰

13.10 z 변환과 라플라스 변환의 관계에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ z 변환은 라플라스 변환의 특수한 경우로 볼 수 있다.

㉯ s 평면을 z 평면으로 사상할 때, 시스템의 안정도는 보존되지 않는다.

㉰ 인과 신호에 대한 라플라스 변환의 수렴 영역은 인과 신호에 대한 z 변환의 수렴 영역으로 사상된다.

㉱ s 평면의 허축이 z 평면의 단위원으로 중복 사상되기 때문에 주파수 중첩이 발생한다.

Ans) ㉯

[기초 문제]

13.11 z 변환의 정의식을 이용하여 다음 신호의 z 변환을 구하라.

(a) $x[n] = (0.5)^n(u[n] - u[n-5])$

Ans) $X(z) = \sum_{n=0}^{4}(0.5)^n z^{-n} = = \frac{z^4 + 0.5z^3 + (0.5)^2z^2 + (0.5)^3z + (0.5)^4}{z^4}$

(b) $x[n] = n(0.5)^n u[n]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(0.5)^n z^{-n} = 1\left(\frac{0.5}{z}\right) + 2\left(\frac{0.5}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{0.5}{z}\right)^3 + 4\left(\frac{0.5}{z}\right)^4 + \cdots$

$$\left(1 - \frac{0.5}{z}\right)X(z) = \frac{0.5}{z} + \left(\frac{0.5}{z}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{z}\right)^3 + \left(\frac{0.5}{z}\right)^4 + \cdots = \frac{0.5/z}{1 - \frac{0.5}{z}}$$

$$\therefore\ X(z) = \frac{0.5z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \ge 0\text{인 짝수} \\ 0, & n \ge 0\text{인 홀수} \end{cases}$

Ans) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^0 + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6} + z^{-8} + \cdots = \frac{z^2}{z^2 - 1}$

(d) $x[n] = \begin{cases} +1, & n \ge 0\text{인 짝수} \\ -1, & n \ge 0\text{인 홀수} \end{cases}$

Ans) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = \frac{z}{z+1}$

13.12 다음 신호의 양방향 z 변환과 수렴 영역(ROC)을 구하라.

(a) $x[n] = (0.5)^n u[-n]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(0.5)^n u[-n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$

수렴 영역 : $|z| < 0.5$

(b) $x[n] = (0.5)^{-n} u[-n-1]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(0.5)^{-n} u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(0.5)^n z^n = \frac{0.5z}{1-0.5z}$

수렴 영역 : $|z| < 2$

(c) $x[n]=(0.5)^{|n|}$

Ans) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(0.5)^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(0.5)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(0.5)^{n}z^{-n}=\frac{0.5z}{1-0.5z}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$\therefore$ ROC : $0.5<|z|<2$

(d) $x[n]=(0.5)^{-n}u[n]+(0.5)^{n}u[-n-1]$

Ans) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(0.5)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(0.5)^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-(2)z^{-1}}+\frac{2z}{1-(2)z}$

이 경우 수렴 영역은 $|z|>2$과 $|z|<0.5$를 동시에 만족해야 하는데, 모순이므로 z 변환은 존재 않는다.

13.13 다음의 신호 $x[n]$에 대해 $y[n]=x[n+3]$의 단방향 z 변환을 구하라.

(a) $x[n]=a^{n}u[n]$

Ans) $y[n]=x[n+3]=a^{n+3}u[n+3]$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+3}z^{-n}=\frac{a^3z}{z-a}$$

(b) $x[n]=n\,u[n]$

Ans) $y[n]=x[n+3]=(n+3)u[n+3]$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)z^{-n}=\frac{z(3z-2)}{(z-1)^2}$$

13.14 z 변환의 성질과 변환쌍표를 이용하여 다음 신호의 z 변환을 구하라.

(a) $x[n]=n^2u[n]$

Ans) $x'[n]=nu[n]$라 두면 $x[n]=nx'[n]$이므로, 주파수 미분 성질을 이용하여

$$X(z)=-z\frac{dX'(z)}{dz}=-z\frac{-(z^2-1)}{(z-1)^4}=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

(b) $x[n]=(0.5)^{n+1}u[n-1]$

Ans) z 변환의 성질과 변환쌍표에서

$$a^nu[n]\Leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

$$x[n-m]\Leftrightarrow z^{-m}X(z)$$

$x[n]=(0.5)^{n+1}u[n-1]=0.25(0.5)^{n-1}u[n-1]$이므로

$$x[n]=(0.5)^{n+1}u[n-1]\Leftrightarrow z^{-1}\frac{0.25z}{z-0.5}=\frac{0.25}{z-0.5}$$

(c) $x[n]=\sin(\frac{\pi}{8}n-\frac{\pi}{4})u[n-2]$

Ans) $x'[n]=\sin(\frac{\pi}{8}n)u[n]$이라 두면 $x[n]=x'[n-2]$이므로, 시간 이동 성질을 이용하여

$$X(z)=z^{-2}X'(z)=\frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{z(z^2-2\cos(\frac{\pi}{8})z+1)}$$

(d) $x[n] = u[n-2] * (\frac{2}{3})^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = u[n-2]$, $x_2[n] = (\frac{2}{3})^n u[n]$이라 두면 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{2}{3})}$$

(e) $x[n] = n\sin(\frac{\pi}{2}n)u[n]$

Ans) $x'[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n)u[n]$이라 두면 $x[n] = nx'[n]$이므로, 주파수 미분 성질에 의해

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}X'(z) = z\frac{(z^2-1)}{(z^2+1)^2}$$

(f) $x[n] = \left((0.5)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)u[n-1]$

Ans) $\left((0.5)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)u[n-1] = \left((0.5)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)u[n] - \delta[n]$

$$\cos(\Omega_0 n)u[n] \Leftrightarrow \frac{1-(\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}} \qquad \& \qquad \delta[n] \Leftrightarrow 1$$

주파수 척도조절 성질($a^n x[n] \Leftrightarrow X(a^{-1}z)$)에 의해

$$X(z) = \frac{1-(\cos\frac{\pi}{3})0.5z^{-1}}{1-2(\cos\frac{\pi}{3})0.5z^{-1}+0.25z^{-2}} - 1 = \frac{0.25(z-1)}{z^2-0.5z+0.25}$$

13.15 신호 $x[n]$의 z 변환이 다음과 같을 때, 주어진 신호들의 z 변환과 수렴 영역을 구하라.

$$X(z) = \frac{z}{(z+0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(a) $y[n] = x[n-1]$

Ans) 시간 이동 성질을 이용하면

$$Y(z) = z^{-1}X(z) = \frac{1}{(z+0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(b) $y[n] = (2)^n x[n]$

Ans) 주파수 척도조절 성질을 이용하면

$$Y(z) = X(\frac{z}{2}) = \frac{z/2}{(z/2+0.5)^2} = \frac{2z}{(z+1)^2}, \quad |z| > 1$$

(c) $y[n] = (-1)^n x[n]$

Ans) $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]z^{-n} = X(-z)$

$$\therefore\ Y(z) = -\frac{z}{(z-0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(d) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$

Ans) 시간 이동 성질과 선형성을 이용하면

$$Y(z) = zX(z) + z^{-1}X(z) = \frac{z^2+1}{(z+0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(e) $y[n] = x[n] * x[n-2]$

Ans) 시간 이동 성질과 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(z) = X(z) \cdot z^{-2}X(z) = \frac{1}{z(z+0.5)^4}, \quad |z| > 0.5$$

13.16 다음과 같은 단방향 z 변환에 대해 역변환을 하지 말고 초깃값과 최종값을 구하여라. 만약 값을 구할 수 없다면 그 이유를 설명하라.

(a) $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 0.3z - 0.1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{z}{z^2-0.3z-0.1} = 0$

최종값 : $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\dfrac{z}{z^2-0.3z-0.1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\dfrac{z}{(z-0.5)(z+0.2)} = 0$

(b) $X(z) = \dfrac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{z(z-0.5)}{x^2-z+1} = 1$

최종값 : 없음 (∵ 신호의 극($z^2 - z + 1 = 0$의 근)은 $\dfrac{1\pm j\sqrt{3}}{2}$ 로서 단위원 상에 존재 → 순수 진동)

(c) $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 1.5z - 1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{z^2}{z^2+1.5z-1} = 1$

최종값 : 없음 (∵ 신호의 극($z^2 + 1.5z - 1 = 0$의 근)은 $z = -2,\ 0.5$로서 단위원 밖에 존재 → 불안정)

(d) $X(z) = \dfrac{z(z-0.25)}{z^2 - 0.5z + 0.25}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{z(z-0.25)}{z^2-0.5z+0.25} = 1$

최종값 : $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\dfrac{z(z-0.25)}{x^2-0.5z+0.25} = 0$

13.17 다음의 단방향 z 변환의 역변환 $x[n]$을 부분분수 전개법으로 구하라.

(a) $X(z)=\dfrac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$

Ans) $X(z)=\dfrac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}$

$\therefore\ x[n]=u[n]-(0.5)^n u[n]=(1-(0.5)^n)u[n]$

(b) $X(z)=\dfrac{0.5z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$

Ans) $X(z)=\dfrac{0.5z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{1.5z}{z-0.5}$

$\therefore\ x[n]=2u[n]-1.5(0.5)^n u[n]=(2-1.5(0.5)^n)u[n]$

(c) $X(z)=\dfrac{z(2z+3)}{(z-1)(z^2-5z+6)}$

Ans) $X(z)=\dfrac{z(2z+3)}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\dfrac{2.5z}{z-1}-\dfrac{7z}{z-2}+\dfrac{4.5z}{z-3}$

$\therefore\ x[n]=2.5u[n]-7\cdot(2)^n u[n]+4.5\cdot(3)^n u[n]$

(d) $X(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$

Ans) $X(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{z}{z+1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{(z-1)^2}$

$\therefore\ x[n]=\dfrac{1}{4}(-1)^n u[n]+\dfrac{3}{4}u[n]+\dfrac{1}{2}nu[n]=\dfrac{1}{4}((-1)^n+3+2n)u[n]$

(e) $X(z)=\dfrac{z(3z-1)}{(z+1)(z-1)^3}$

Ans) $X(z)=\dfrac{z(3z-1)}{(z+1)(z-1)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{z+1}+\dfrac{z}{(z-1)^3}+\dfrac{z}{(z-1)^2}-\dfrac{z}{z-1}$

$n^2a^nu[n]\Leftrightarrow\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$ 을 이용하여 역변환해야 하므로

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}+\frac{1}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}$$

$\therefore\ x[n]=\dfrac{1}{2}(-1)^n u[n]+\dfrac{1}{2}n^2u[n]+\dfrac{1}{2}nu[n]-u[n]=\dfrac{1}{2}((-1)^n+n^2+n-2)u[n]$

(f) $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-z+0.5}$

Ans) $X(z)=\dfrac{z(z-0.5)}{z^2-z+0.5}+\dfrac{0.5z}{z^2-z+0.5}$

$$\begin{cases}2a\cos\Omega=0.5\\ a^2=0.5\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \Omega=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\therefore\ x[n] = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n) + (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \sin(\frac{\pi}{4}n) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \cos(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4})$$

13.18 다음 차분 방정식으로 표현된 LTI 시스템의 출력을 z 변환을 이용하여 구하라.

(a) $y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 0, \quad x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

Ans) $Y(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) = 2X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z^2}{(z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{4}{5}z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{6}{5}z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ y[n] = \frac{4}{5}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

(b) $y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 1, \quad x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

Ans) $Y(z) - \frac{1}{3}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) = 2X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{3}y[-1]}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \frac{2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3}z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{5}z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{6}{5}z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ y[n] = \left[\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^n u[n]\right] + \left[\frac{4}{5}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n u[n]\right] = \frac{17}{15}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

※ (a)와 (b)를 통해 초기 조건의 유무에 따른 출력의 차이를 확인할 수 있다.

(c) $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = \frac{3}{8}x[n], \quad x[n] = u[n], \quad y[-1] = 1, \ y[-2] = 5$

Ans) $Y(z) - \frac{3}{4}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + \frac{1}{8}(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = \frac{3}{8}X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] - \frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} + \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}X(z)$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right] + \left[-\frac{3}{4}\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{z}{z - 1}\right]$$

$$\therefore \ y[n] = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \right] + \left[-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n] \right]$$
$$= \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 \right) u[n]$$

(d) $y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1],\ x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n],\ y[-1] = 1,\ y[-2] = 0$

Ans) $Y(z) - \frac{1}{6}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - \frac{1}{6}(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{6}y[-1] + \frac{1}{6}y[-2] + \frac{1}{6}y[-1]z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} + \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$
$$= \frac{\frac{3}{10}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{15}z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore \ y[n] = \left[\frac{3}{10}(\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{2}{15}(-\frac{1}{3})^n u[n] \right] + \left[\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n u[n] \right]$$
$$= \frac{3}{10}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{11}{30}(-\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n u[n]$$

(e) $y[n] - y[n-1] + y[n-2] = x[n],\quad x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n],\quad y[-1] = 1,\ y[-2] = 0$

Ans) $Y(z) - (z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$Y(z) = \frac{y[-1] - y[-2] - y[-1]z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} + \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$
$$= \frac{\frac{5}{3}z(z - \frac{1}{2})}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$\therefore \ y[n] = (\frac{5}{3}\cos\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n] u[n]$$

13.19 인과 LTI 시스템의 입출력이 다음과 같이 주어질 때, 이 시스템의 전달 함수, 임펄스 응답, 차분 방정식을 구하라.

(a) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2],\quad y[n] = \delta[n] - \frac{3}{4}\delta[n-1]$

Ans) $X(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}$

$Y(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{-1}$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z-\frac{3}{4}}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{-\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{5}{3}z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ h[n] = -\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{5}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] = \frac{1}{3}(5(-\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n)u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2})Y(z) = (1-\frac{3}{4}z^{-1})X(z)$$

$$\therefore\ y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

(b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z}{z-0.5}$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n z^{-n} = \frac{1}{1-0.25z^{-1}} = \frac{z}{z-0.25}$$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-1}} = \frac{z-0.5}{z-0.25}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n] = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-0.25} - \frac{0.5}{z-0.25}\right\} = (0.25)^n u[n] - 0.5(0.25)^{(n-1)}u[n-1] = \delta[n] - (0.25)^n u[n-1]$$

(3) 차분 방정식

$$(1-0.25z^{-1})Y(z) = (1-0.5z^{-1})X(z)$$

$$\therefore\ y[n] - 0.25y[n-1] = x[n] - 0.5x[n-1]$$

(c) $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n],\ y[n] = \left(3(-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n z^{-n} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(3(-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)z^{-n} = \frac{3}{1+z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{4z^2}{(z+1)(z-\frac{1}{3})}$$

(1) 전달 함수

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{4\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{4z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{(z+1)(z-\frac{1}{3})}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n]=Z^{-1}\left\{\frac{2z}{z+1}-\frac{2z}{z-\frac{1}{3}}\right\}=2(-1)^n u[n]+2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$(1+\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2})Y(z)=4\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z)$$

$$\therefore\ y[n]+\frac{2}{3}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]=4x[n]+\frac{4}{3}x[n-1]$$

(d) $x[n]=2u[n]$, $\quad y[n]=\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)u[n]$

Ans) $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}2z^{-n}=\frac{2}{1-z^{-1}}=\frac{2z}{z-1}$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)z^{-n}=\frac{4}{1-0.5z^{-1}}-\frac{3}{1+0.75z^{-1}}=\frac{z^2+4.5z}{(z-0.5)(z+0.75)}$$

(1) 전달 함수

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(0.5+2.25z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.75z^{-1})}=\frac{(0.5z+2.25)(z-1)}{(z-0.5)(z+0.75)}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n]=Z^{-1}\left\{6-\frac{2z}{z-0.5}-\frac{3.5z}{z+0.75}\right\}=6\delta[n]-(2(0.5)^n+3.5(-0.75)^n)u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$(1-0.25z^{-1}-0.375z^{-2})Y(z)=(0.5+1.75z^{-1}-2.25z^{-2})X(z)$$

$$\therefore\ y[n]-0.25y[n-1]-0.375y[n-2]=0.5x[n]+1.75x[n-1]-2.25x[n-2]$$

13.20 다음의 차분 방정식으로 표현되는 인과 LTI 시스템의 전달 함수와 임펄스 응답을 구하라. 그리고 시스템의 극과 영점을 구하고 안정도를 판별하라.

(a) $y[n]-0.3y[n-1]-0.1y[n-2]=x[n]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z)-0.3z^{-1}Y(z)-0.1z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$\therefore\ H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-0.3z^{-1}-0.1z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-0.3z-0.1}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.2)}=\frac{5}{7}\frac{z}{z-0.5}+\frac{2}{7}\frac{z}{z+0.2}$$

$$\therefore\ h[n]=\left(\frac{5}{7}(0.5)^n+\frac{2}{7}(-0.2)^n\right)u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z=0.5,\ -0.2$ & 영점 : $z=0,\ 0$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

(b) $y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z)-\frac{5}{6}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{6}z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$\therefore\ H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z)=\frac{9z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{8z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ h[n]=(9(\frac{1}{2})^n-8(\frac{1}{3})^n)u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ & 영점 : $z=0,\ -1$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

(c) $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2]=x[n]-2x[n-1]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{3}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)-2z^{-1}X(z)$$

$$\therefore\ H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{z^2-2z}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{3}{8}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z)=\frac{2z}{z+\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ h[n]=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$ & 영점 : $z=2$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

(d) $y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{9}{16}y[n-2]=2x[n]+x[n-1]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z)-\frac{3}{2}z^{-1}Y(z)+\frac{9}{16}z^{-2}Y(z)=2X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$\therefore\ H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2+z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{9}{16}z^{-2}}=\frac{2z^2+z}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{9}{16}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{\frac{5}{2}z}{(z-\frac{3}{4})^2} + \frac{2z}{z-\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ h[n] = (\frac{5}{2}n+2)(\frac{3}{4})^n u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z = \frac{3}{4}$(중극) & 영점 : $z = 0,\ -\frac{1}{2}$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

(e) $y[n]+2y[n-1]+2y[n-2] = x[n]+x[n-1]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$\therefore\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{z^2+z}{z^2+2z+2}$$

(2) 임펄스 응답

$$a^n\cos(\Omega_0 n)u[n] \Leftrightarrow \frac{1-a(\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2a(\cos\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{1-a\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{2},\quad \cos(\Omega_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \Omega_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore\ h[n] = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{3\pi}{4}n\right)u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z = -1 \pm j1$ & 영점 : $z = 0,\ -1$

안정도 : 단위원 밖에 극을 가지므로 불안정

(f) $y[n]-y[n-1]+0.5y[n-2] = x[n]$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$\therefore\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-z+0.5}$$

(2) 임펄스 응답

$$a^n\cos(\Omega_0 n)u[n] \Leftrightarrow \frac{1-a(\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2a(\cos\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$a^n\sin(\Omega_0 n)u[n] \Leftrightarrow \frac{a(\sin\Omega_0)z^{-1}}{1-2a(\cos\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{\alpha(1-a\cos(\Omega_0)z^{-1})+\beta(a\sin(\Omega_0)z^{-1})}{1-2a\cos(\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$\therefore\ a=\sqrt{0.5},\quad \cos(\Omega_0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin(\Omega_0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \Omega_0=\frac{\pi}{4},\quad \alpha=1,\quad \beta=1$$

$$\therefore\ h[n]=(\sqrt{0.5})^n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]+(\sqrt{0.5})^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]=\sqrt{2}(\sqrt{0.5})^n\cos\left(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{4}\right)u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z=\dfrac{1\pm j1}{2}$ & 영점 : $z=0$(중근)

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

[응용 문제]

13.21 다음의 $X(z)$에 대해 주어진 수렴 영역을 만족하는 역변환 $x[n]$을 구하라.

(a) $X(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z-0.75}$

(i) $|z|>1.5$, (ii) $0.5<|z|<1.5$ (iii) $|z|<0.5$

Ans) $X(z)=\dfrac{2z-1}{(z+0.5)(z-1.5)}=\dfrac{1}{z+0.5}+\dfrac{1}{z-1.5}$

(i) $|z|>1.5$: 두 신호 모두 인과 신호인 경우

$$X(z)=\frac{1}{z+0.5}+\frac{1}{z-1.5}=\frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}}$$

$$\therefore\ x[n]=\{(-0.5)^{(n-1)}+(1.5)^{(n-1)}\}u[n-1]=\left\{-2(-0.5)^n+\frac{2}{3}(1.5)^n\right\}u[n-1]$$

(ii) $0.5<|z|<1.5$: 양방향 신호로서 앞의 신호는 인과 신호, 뒤의 신호는 비인과 신호인 경우

$$X(z)=\frac{1}{z+0.5}+\frac{1}{z-1.5}=\frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z}$$

$$\therefore\ x[n]=(-0.5)^{(n-1)}u[n-1]-\frac{2}{3}(1.5)^n u[-n]$$

(iii) $|z|<0.5$: 두 신호 모두 비인과 신호인 경우

$$X(z)=\frac{1}{z+0.5}+\frac{1}{z-1.5}=2\frac{1}{1+2z}-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z}$$

$$\therefore\ x[n]=\left\{2(-0.5)^n-\frac{2}{3}(1.5)^n\right\}u[-n]$$

(b) $X(z)=\dfrac{z^2-z-0.75}{2z-1}$

(i) $|z|>0.5$, (ii) $0<|z|<0.5$

Ans) $X(z)=\dfrac{z^2-z-0.75}{2z-1}=0.5z-0.25-\dfrac{1}{(2z-1)}$

(i) $|z|>0.5$: 분수항이 인과 신호인 경우

$$X(z)=\frac{z^2-z-0.75}{2z-1}=0.5z-0.25-\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\therefore\ x[n]=0.5\delta[n+1]+0.25\delta[n]-0.5(0.5)^{n-1}u[n-1]=0.5\delta[n+1]+0.25\delta[n]-(0.5)^n u[n-1]$$

(ii) $0<|z|<0.5$: 분수항이 비인과 신호인 경우

$$X(z) = 0.5z - 0.25 - \frac{1}{(2z-1)} = 0.5z - 0.25 + \frac{1}{1-2z}$$

$$\therefore\ x[n] = 0.5\delta[n+1] + 0.25\delta[n] + (0.5)^n u[-n]$$

(c) $X(z) = \dfrac{z^2+5z}{z^2-2z-3}$

(i) $|z|>3$　　　(ii) $1<|z|<3$　　　(iii) $|z|<1$

Ans) $X(z) = \dfrac{z(z+5)}{(z-3)(z+1)} = \dfrac{2z}{z-3} - \dfrac{z}{z+1}$

(i) $|z|>3$: 두 신호 모두 인과 신호인 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = 2\frac{1}{1-3z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\therefore\ x[n] = \{2\cdot 3^n - (-1)^n\}u[n]$$

(ii) $1<|z|<3$: 양방향 신호로서 첫 번째 항은 비인과 신호, 두 번째 항은 인과 신호의 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = -2\frac{\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\therefore\ x[n] = -2(3)^n u[-n-1] - (-1)^n u[n]$$

(iii) $|z|<1$: 두 신호 모두 비인과 신호인 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = -2\frac{\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{z}{1+z}$$

$$\therefore\ x[n] = \{-2(3)^n - (-1)^n\}u[-n-1]$$

13.22 신호 $x[n]$의 z 변환이 다음과 같다.

$$X(z) = \frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9}$$

(a) $x_1[n] = x[n-3]u[n-3]$의 z 변환을 구하여라.

Ans) 시간 이동(시간 지연) 성질을 이용하면

$$X_1(z) = z^{-3}\frac{z^3}{z^3-3z^2+5z-9} = \frac{1}{z^3-3z^2+5z-9}$$

(b) $x_2[n] = x[n+3]u[n]$의 z 변환을 구하여라.

Ans) 시간 이동(시간 선행) 성질을 이용하면

$$X_2(z) = \frac{z^6}{z^3-3z^2+5z-9} - (z^3x[0] + z^2x[1] + zx[2])$$

(c) 긴 나눗셈을 이용한 멱급수 형태의 역변환을 통해 $n=0,3$일 때의 $x[n]$ 값, $n=3$일 때의 $x_1[n]$ 값, $n=0$일 때의 $x_2[n]$ 값을 구하라.

Ans)

(ⅰ) $n=0, 3$ 일 때의 $x[n]$ 값

$$
\begin{array}{r l}
 & 1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3} + \cdots \\ \cline{2-2}
z^3-3z^2+5z-9 \;) & z^3 \\
 & z^3-3z^2+5z-9 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3z^2-5z+9 \\
 & \quad 3z^2-9z+15-27z^{-1} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 4z-6+27z^{-1} \\
 & \qquad 4z-12+20z^{-1}-36z^{-2} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 6+7z^{-1}+36z^{-2} \\
 & \qquad\quad 6-18z^{-1}+30z^{-2}-54z^{-3} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 25z^{-1}+6z^{-2}+54z^{-3} \\
 & \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

따라서

$$X(z)=1+3z^{-1}+4z^{-2}+6z^{-3}+\cdots$$

$$\therefore\; x[0]=1,\; x[3]=6$$

(ⅱ) $n=3$일 때의 $x_1[n]=x[n-3]u[n-3]$ 값

$$
\begin{array}{r l}
 & z^{-3} + 3z^{-4} + \cdots \\ \cline{2-2}
z^3-3z^2+5z-9 \;) & 1 \\
 & 1-3z^{-1}+5z^{-2}-9z^{-3} \\ \cline{2-2}
 & \quad 3z^{-1}-5z^{-2}+9z^{-3} \\
 & \quad 3z^{-1}-9z^{-2}+15z^{-3}-27z^{-4} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 4z^{-2}-6z^{-3}+27z^{-4} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

따라서

$$X_1(z)=z^{-3}+3z^{-4}+\cdots$$

$$\therefore\; x_1[3]=1$$

(ⅲ) $n=0$일 때의 $x[n+3]u[n]$ 값

$$X_2(z)=\frac{z^6}{z^3-3z^2+5z-9}-(z^3x[0]+z^2x[1]+zx[2])=\frac{6z^3+7z^2+36z}{z^3-3z^2+5z-9}$$

$$
\begin{array}{r l}
 & 6 + 25z^{-1} + \cdots \\ \cline{2-2}
z^3-3z^2+5z-9 \;) & 6z^3+7z^2+36z \\
 & 6z^3-18z^2+30z-54 \\ \cline{2-2}
 & \quad 25z^2+6z+54 \\
 & \qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

따라서

$$X_2(z)=6+25z^{-1}+\cdots$$

$$\therefore\; x_2[0]=6$$

(d) (c)의 결괏값들은 일치하는가? 그렇다면 이유를 설명하라.

Ans) $x_1[n]$은 인과 신호 $x[n]$을 $n=3$만큼 지연시킨 신호이므로 시간 이동에 의해 가감되는 샘플 성분이 없다. 따라서 이의 z 변환 $X_1(z)$을 역변환하더라도 $x_1[3]=x[0]$을 만족한다.

또한 $x_2[n]$은 $x[n]$을 $n=3$만큼 시간 선행하여 $n<0$에 해당되는 샘플 성분들을 버린 인과 신호이기 때문에 이의 z 변환 $X_2(z)$을 역변환하게 되면 $x_2[0]=x[3]$을 만족한다.

13.23 $X(z)$가 신호 $x[n]=(0.5)^n u[n]$의 z 변환이라고 할 때, 다음의 z 변환에 대응되는 시간 신호를 구하라.

(a) $Y(z)=X(z^{-1})$

Ans) 시간 반전 성질을 이용하면

$$y[n]=x[-n]=(0.5)^{-n}u[-n]$$

(b) $Y(z)=X(-z)$

Ans) $Y(z)=X(-z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](-z)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]z^{-n}$

$$\therefore\ y[n]=(-1)^n x[n]$$

(c) $Y(z)=\dfrac{zX(z)}{z-1}$

Ans) $Y(z)=\dfrac{z}{z-1}\cdot X(z)$

z 변환의 시간 컨벌루션 성질과 [예제 13-14]의 결과(식 (13.44))로부터

$$y[n]=u[n]*x[n]=u[n]*(0.5)^n u[n]=\sum_{k=0}^{n}(0.5)^n$$

(d) $Y(z)=X^2(z)$

Ans) 시간 컨벌루션 성질로부터

$$y[n]=x[n]*x[n]=(0.5)^n u[n]*(0.5)^n u[n]=(n+1)(0.5)^n$$

13.24 다음 물음에 답하라.

(a) $y[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]$의 z 변환이 $Y(z)=\dfrac{z}{z-1}X(z)$임을 보여라.

Ans) $y[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]u[n-k]=x[n]*u[n]$

따라서 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(z)=X(z)U(z)=\frac{z}{z-1}X(z)$$

(b) (a)의 결과를 이용하여 $r[n]=nu[n]$의 z 변환을 구하라

Ans) $r[n]=\sum_{k=0}^{n}u[k-1]$

$$\therefore\ R(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

(c) $s[n]=\sum_{k=0}^{n}(u[k]-u[k-1])$의 z 변환을 구하라

Ans) $s[n]=\sum_{k=0}^{n}u[k]-\sum_{k=0}^{n}u[k-1]$

(a)와 (b)의 결과를 이용하여

$$S(z)=\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1}=\frac{z}{z-1}$$

13.25 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 z 변환을 이용하여 입력 $x[n]=u[n]$일 때 출력 $y[n]$을 '영입력 응답 + 영상태 응답', '고유 응답 + 강제 응답' 형태로 각각 구하라.

(a) $y[n]-0.25y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=1$

Ans) $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$$Y(z)-0.25(z^{-1}Y(z)+y[-1])=X(z)$$

$$\therefore\ Y(z)=\frac{0.25y[-1]}{1-0.25z^{-1}}+\frac{1}{1-0.25z^{-1}}X(z)=\frac{0.25z}{z-0.25}+\frac{z^2}{(z-0.25)(z-1)}$$

(i) 영입력 응답 + 영상태 응답

$$Y(z)=\left[\frac{0.25z}{z-0.25}\right]+\left[-\frac{1}{3}\frac{z}{z-0.25}+\frac{4}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n]=\underbrace{[0.25(0.25)^n u[n]]}_{\text{영입력응답}}+\underbrace{\left[-\frac{1}{3}(0.25)^n u[n]+\frac{4}{3}u[n]\right]}_{\text{영상태응답}}$$

(ii) 고유 응답+ 강제 응답

$$Y(z)=\left[-\frac{1}{12}\frac{z}{z-0.25}\right]+\left[\frac{4}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n]=\underbrace{\left[-\frac{1}{12}(0.25)^n u[n]\right]}_{\text{고유응답}}+\underbrace{\left[\frac{4}{3}u[n]\right]}_{\text{강제응답}}$$

(b) $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n],\quad y[-1]=-1,\ y[-2]=1$

Ans) $Y(z)-\frac{3}{4}(z^{-1}Y(z)+y[-1])+\frac{1}{8}(z^{-2}Y(z)+y[-1]z^{-1}+y[-2])=X(z)$

$$Y(z)=\frac{\frac{3}{4}y[-1]-\frac{1}{8}y[-2]-\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}+\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X(z)$$

$$=\frac{-\frac{1}{8}z(7z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}+\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}\frac{z}{z-1}$$

(i) 영입력 응답 + 영상태 응답

$$Y(z) = \left[-\frac{5}{4}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right] + \left[-2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{8}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n] = \underbrace{\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right]}_{\text{영입력응답}} + \underbrace{\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{8}{3}u[n]\right]}_{\text{영상태응답}}$$

(ii) 고유 응답+ 강제 응답

$$Y(z) = \left[-\frac{13}{4}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{17}{24}\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right] + \left[\frac{8}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n] = \underbrace{\left[-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{17}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right]}_{\text{고유응답}} + \underbrace{\left[\frac{8}{3}u[n]\right]}_{\text{강제응답}}$$

(c) $y[n] - 0.9y[n-1] + 0.2y[n-2] = x[n], \qquad y[-1] = 1,\ y[-2] = -4$

Ans) $Y(z) - 0.9(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + 0.2(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X(z)$

$$Y(z) = \frac{0.9y[-1] - 0.2y[-2] - 0.2y[-1]z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} + \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}}X(z)$$

$$= \frac{1.7z^2 - 0.2z}{(z-0.5)(z-0.4)} + \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.4)}\frac{z}{z-1}$$

(i) 영입력 응답 + 영상태 응답

$$Y(z) = \left[6.5\frac{z}{z-0.5} - 4.8\frac{z}{z-0.4}\right] + \left[-5\frac{z}{z-0.5} + \frac{8}{3}\frac{z}{z-0.4} + \frac{10}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n] = \underbrace{\left[6.5(0.5)^n u[n] - 4.8(0.4)^n u[n]\right]}_{\text{영입력응답}} + \underbrace{\left[-5(0.5)^n u[n] + \frac{8}{3}(0.4)^n u[n] + \frac{10}{3}u[n]\right]}_{\text{영상태응답}}$$

(ii)고유 응답+ 강제 응답

$$Y(z) = \left[1.5\frac{z}{z-0.5} - \frac{32}{15}\frac{z}{z-0.4}\right] + \left[\frac{10}{3}\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n] = \underbrace{\left[1.5(0.5)^n u[n] - \frac{32}{15}(0.4)^n u[n]\right]}_{\text{고유응답}} + \underbrace{\left[\frac{10}{3}u[n]\right]}_{\text{강제응답}}$$

(d) $2y[n] - 3y[n-1] + y[n-2] = 4x[n] - 3x[n-1], \qquad y[-1] = 0,\ y[-2] = 1$

Ans) $2Y(z) - 3(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = 4X(z) - 3z^{-1}X(z)$

$$Y(z) = \frac{3y[-1] - y[-2] - y[-1]z^{-1}}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}(4 - 3z^{-1})X(z)$$

$$= \frac{-z^2}{(2z-1)(z-1)} + \frac{4z^3 - 3z^2}{(2z-1)(z-1)^2}$$

(i) 영입력 응답 + 영상태 응답

$$Y(z)=\left[0.5\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-1}\right]+\left[-\frac{z}{z-0.5}+\frac{z}{(z-1)^2}+3\frac{z}{z-1}\right]$$

$$\therefore\ y[n]=\underbrace{[\,0.5(0.5)^n u[n]-u[n]\,]}_{\text{영입력응답}}+\underbrace{[\,-(0.5)^n u[n]+(n+3)u[n]\,]}_{\text{영상태응답}}$$

(ii) 고유 응답+ 강제 응답

$$Y(z)=\left[-0.5\frac{z}{z-0.5}+2\frac{z}{z-1}\right]+\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

$$\therefore\ y[n]=\underbrace{[\,-0.5(0.5)^n u[n]+2u[n]\,]}_{\text{고유응답}}+\underbrace{[\,n\,u[n]\,]}_{\text{강제응답}}$$

13.26 이산 인과 LTI 시스템의 전달 함수가 다음과 같을 때, 주어진 입력에 대한 출력을 구하라.

$$H(z)=\frac{6(5z-1)}{6z^2-5z+1}$$

(a) $(4)^{-n}u[n]$

Ans) $X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(4)^{-n}z^{-n}=\frac{z}{z-0.25}$

$$Y_1(z)=X_1(z)H(z)=\frac{5z(z-\frac{1}{5})}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}=\frac{12z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{36z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{48z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ y_1[n]=\left(12\left(\frac{1}{4}\right)^n+36\left(\frac{1}{2}\right)^n-48\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]$$

(b) $(4)^{-(n-2)}u[n-2]$

Ans) $X_2(z)=z^{-2}X_1(z)$

$$Y_2(z)=X_2(z)H(z)=z^{-2}X_1(z)H(z)=z^{-2}Y_1(z)$$

$$\therefore\ y_2[n]=y_1[n-2]=\left(12\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}+36\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-48\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)u[n-2]$$

(c) $(4)^{-(n-2)}u[n]$

Ans) $x_3[n]=(4)^{-(n-2)}u[n]=4^2(4)^{-n}u[n]=16x_1[n]$

$$\therefore\ y_3[n]=16y_1[n]=16\left(12\left(\frac{1}{4}\right)^n+36\left(\frac{1}{2}\right)^n-48\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]$$

(d) $(4)^{-n}u[n-2]$

Ans) $x_4[n]=(4)^{-n}u[n-2]=4^{-2}(4)^{-(n-2)}u[n-2]=\frac{1}{16}x_2[n]$

$$\therefore\ y_4[n]=\frac{1}{16}y_2[n]=\frac{1}{16}\left(12\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}+36\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-48\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)u[n-2]$$

13.27 임펄스 응답이 $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$인 인과 LTI 시스템의 출력이 다음과 같을 때, 시스템에 인가된 입력을 구하라.

(a) $y[n] = 2\delta[n-4]$

Ans) $H(z) = \dfrac{z}{z - \frac{1}{2}}$

$$Y(z) = 2z^{-4}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{2z^{-4}(z - \frac{1}{2})}{z} = 2z^{-4} - z^{-5}$$

$$\therefore\ x[n] = 2\delta[n-4] - \delta[n-5]$$

(b) $y[n] = 2u[n] - (\frac{1}{2})^n u[n]$

Ans) $H(z) = \dfrac{z}{z - \frac{1}{2}}$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z^2}{(z-1)(z - \frac{1}{2})}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \frac{z - \frac{1}{2}}{z} = \frac{z}{z-1}$$

$$\therefore\ x[n] = u[n]$$

(c) $y[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$

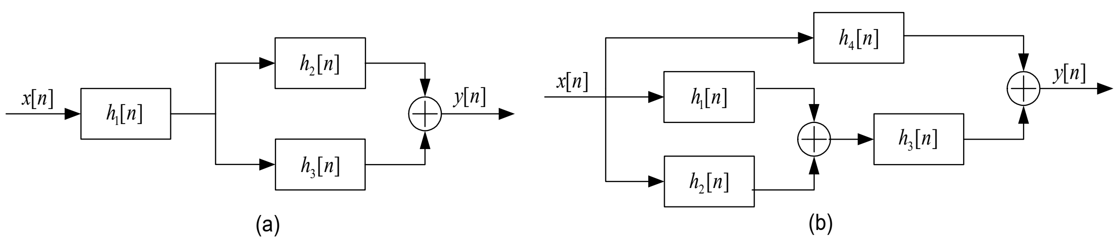
Ans) $H(z) = \dfrac{z}{z - \frac{1}{2}}$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{3}z}{z-1} + \frac{\frac{2}{3}z}{z + \frac{1}{2}} = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \frac{z - \frac{1}{2}}{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{6}z}{z-1} + \frac{\frac{4}{3}z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ x[n] = -\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{6}u[n] + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

13.28 다음 그림과 같이 연결된 이산 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라. 단, 각 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같다.



(a) (b)

(a) $h_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, $\quad h_2[n] = \delta[n]$, $\quad h_3[n] = u[n-1]$

Ans) $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$

$$H(z) = H_1(z)(H_2(z) + H_3(z))$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$H_2(z) = 1$$

$$H_3(z) = z^{-1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$\therefore\ H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{z-1}) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-1)} = -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2z}{z-1}$$

$$\therefore\ h[n] = -(\frac{1}{2})^n u[n] + 2u[n] = (2 - (\frac{1}{2})^n)u[n]$$

(b) $h_1[n] = 2\delta[n]$, $\quad h_2[n] = -2(0.5)^n u[n]$, $\quad h_3[n] = 0.5\delta[n] - 0.25\delta[n-1]$,
$h_4[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$

Ans) $h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] + h_4[n]$

$$H(z) = (H_1(z) + H_2(z))H_3(z) + H_4(z)$$

$$H_1(z) = 2$$

$$H_2(z) = -\frac{2z}{z-0.5}$$

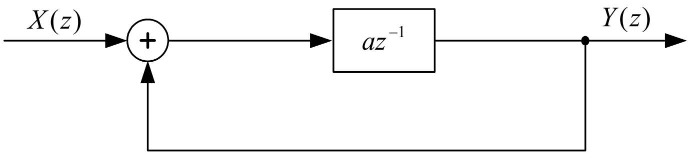
$$H_3(z) = 0.5 - 0.25z^{-1} = \frac{0.5z - 0.25}{z}$$

$$H_4(z) = 1 + 0.5z^{-1} = \frac{z+0.5}{z}$$

$$\therefore\ H(z) = (2 - \frac{2z}{z-0.5})\frac{0.5z-0.25}{z} + \frac{z+0.5}{z} = -\frac{0.5(z-05)}{z(z-0.5)} + \frac{z+0.5}{z} = 1$$

$$\therefore\ h[n] = \delta[n]$$

13.29 다음 그림과 같은 이산시간 시스템의 블록선도가 있다.



(a) 이 시스템의 차분 방정식 모델을 구하라.

Ans) $Y(z) = az^{-1}X(z) + az^{-1}Y(z)$

$$\therefore\ y[n] - ay[n-1] = ax[n-1]$$

(b) 이 시스템의 전달 함수를 구하라.

Ans) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{a}{z-a}$

(c) 이 시스템이 BIBO 안정일 경우 파라미터 a의 범위를 결정하라.

Ans) BIBO 안정하려면 극 $p_1 = a$이 z 평면에서 단위원 내에 존재해야 한다.

$\therefore\ |a| < 1$

(d) 이 시스템의 임펄스 응답을 구하라. (c)의 답은 임펄스 응답으로부터 명백한가? 그 이유는 무엇인가?

Ans) $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = a^n u[n-1]$

시스템이 BIBO 안정하기 위해서는 임펄스 응답이 절대 총합 가능해야 한다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

이는 임펄스 응답이 발산하지 않고 수렴해야 함을 의미하며, 따라서 $|a| < 1$을 만족해야 한다.

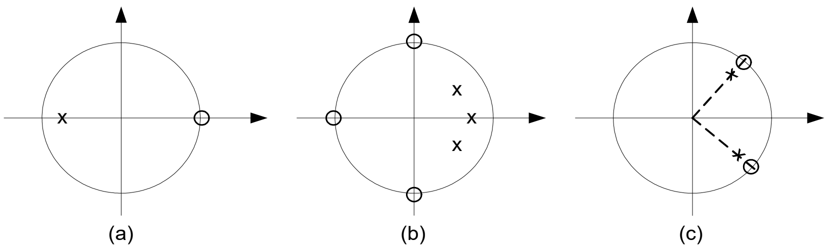
(e) $a = 0.5$일 때 이 시스템의 단위 계단 응답을 구하라.

Ans) $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{0.5}{z-0.5}\frac{z}{z-1} = -\frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-1}$$

$\therefore\ y[n] = u[n] - (0.5)^n u[n]$

13.30 z 평면의 극과 영점을 이용한 주파수 응답의 계산을 이용하여 다음 그림과 같은 형태의 극-영점 분포를 갖는 시스템의 대략적인 진폭 응답 특성을 그려라. 이들 시스템은 어떤 종류의 필터인가?



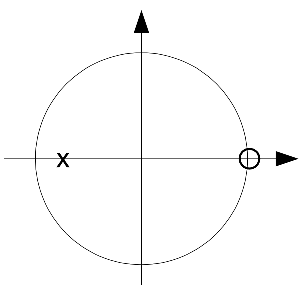
(a)

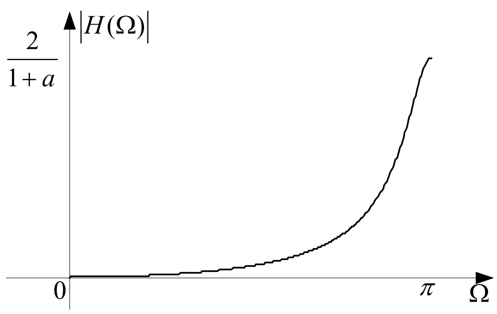
Ans) 시스템의 전달 함수는

$$H(z) = \frac{z-1}{z-a}, \qquad \text{단}\ -1 < a < 0$$

$$|H(\Omega)| = |H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{|e^{j\Omega}-1|}{|e^{j\Omega}-a|} = \frac{\sqrt{2-2\cos\Omega}}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}}$$

이 시스템은 일종의 고역 통과(HP) 필터로 볼 수 있다.





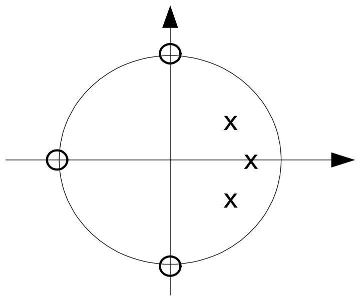
(b)

Ans) 시스템의 전달 함수는

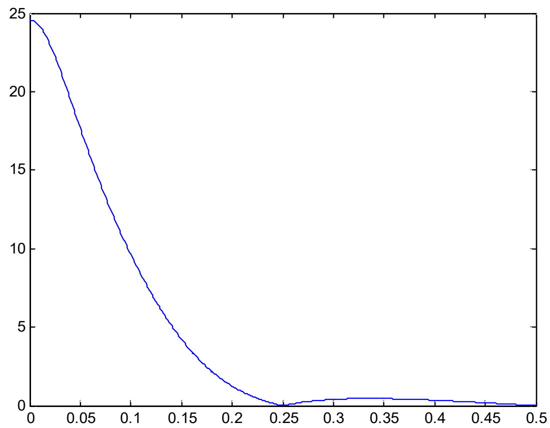
$$H(z)=\frac{(z+1)(z+j)(z-j)}{(z-re^{j\Omega_0})(z-re^{-j\Omega_0})(z-a)}, \qquad \text{단 } 0<r,\ a<1$$

$$|H(\Omega)|=|H(z)|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{|e^{j\Omega}+1|\,|e^{j\Omega}-e^{j\frac{\pi}{2}}|\,|e^{j\Omega}-e^{-j\frac{\pi}{2}}|}{|e^{j\Omega}-re^{j\Omega_0}|\,|e^{j\Omega}-re^{-j\Omega_0}|\,|e^{j\Omega}-a|}$$

이 시스템은 일종의 저역 통과 필터로 볼 수 있다.



(b)



$(a=0.7,\ r=0.5,\ \Omega_0=\frac{\pi}{4}$의 경우의 진폭 응답)

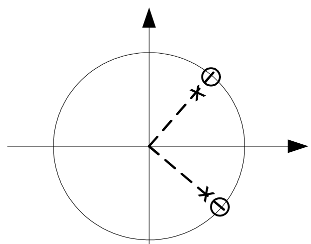
(c)

Ans) 시스템의 전달 함수는

$$H(z)=\frac{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}{(z-re^{j\Omega_0})(z-re^{-j\Omega_0})}, \qquad \text{단 } 0<r<1$$

$$|H(\Omega)|=|H(z)|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{|e^{j\Omega}-e^{j\Omega_0}|\,|e^{j\Omega}-e^{-j\Omega_0}|}{|e^{j\Omega}-re^{j\Omega_0}|\,|e^{j\Omega}-re^{-j\Omega_0}|}$$

이 시스템은 일종의 notch 필터로 볼 수 있다.



(c)