제4장 임펄스 응답과 컨벌루션

[개념 정리]

4.1 시스템의 응답에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 외부의 입력이 없더라도 시스템의 출력이 나올 수 있다.

㉯ 고유 응답과 과도 응답은 항상 일치한다.

㉰ 영상태 응답은 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션으로 구할 수 있다.

㉱ 외부 입력에 의해 시스템 고유 특성과 입력 고유 특성을 반영한 응답이 함께 만들어진다.

Ans) ㉯

고유 응답과 과도 응답은 대부분 일치하지만 그렇지 않을 수도 있다. 예를 들어 입력이 e^{-t}와 같이 감쇠 지수 함수이면 강제 응답 성분도 시간에 따라 사라지므로 과도 응답이 되고 정상상태 응답은 0이 된다.

4.2 LTI 시스템의 임펄스 응답에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 연속 시스템의 임펄스 응답은 물리적으로 구할 수 있다.

㉯ 임펄스 응답만으로는 시스템의 특성을 파악하기가 어렵다.

㉰ 시스템의 출력 속에는 임펄스 응답과 같은 꼴을 갖는 응답 성분들이 존재한다.

㉱ 수학적 모델 없이 임펄스 응답만 알면 입력에 대한 시스템의 출력을 구할 수 없다.

Ans) ㉰

4.3 이산 시스템의 임펄스 응답에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 임펄스 응답이 임펄스 함수가 될 수 있다.

㉯ 이산 시스템의 임펄스 응답은 물리적으로 얻을 수 있다.

㉰ 임펄스 응답의 길이가 무한하면 시스템은 불안정해진다.

㉱ 임펄스 응답의 길이와 차분 방정식의 형태 사이에는 연관 관계가 존재한다.

Ans) ㉰

4.4 컨벌루션에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 컨벌루션 연산은 한 번에 계산될 수 있다.

㉯ 컨벌루션 연산은 두 신호를 모두 이동시켜가며 계산하게 된다.

㉰ 컨벌루션은 비선형 시스템의 표현에도 사용할 수 있다.

㉱ $x(t)=1,\ 0 \le t \le 10$의 자신과의 컨벌루션은 $t=10$에서 최댓값을 가진다.

Ans) ㉱

$x(t)=1,\ 0 \le t \le 10$의 자신과의 컨벌루션을 미끄럼 방식으로 계산할 경우 $t=10$ 순간에 두 신호가 완전히 겹치므로 최댓값을 갖는다.

4.5 시스템 입출력 관계의 컨벌루션 표현에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 비선형 시스템의 출력도 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션으로 나타낼 수 있다.

㉯ 컨벌루션 형태로 입출력 표현을 얻는 데 중첩의 원리가 활용된다.

㉰ 컨벌루션에 의한 입출력 표현은 시변 시스템에서도 성립한다.

㉱ 컨벌루션을 이용한 인과 시스템의 출력 계산에서 $n<0$에서의 입력은 무시된다.

Ans) ㉯
인과 시스템은 입력이 들어오기 전에 출력이 나오지 않는 시스템이지, $n<0$에서의 입력에 대해 반응하지 않는 시스템이라는 의미는 아니다.

4.6 컨벌루션과 관련한 다음의 설명 중 틀린 것은?
㉮ 두 시스템을 종속 연결한 연결 순서를 바꾸면 같은 입력에 대해 출력이 달라진다.
㉯ 어떤 시스템과 역 시스템을 종속 연결한 전체 시스템의 임펄스 응답은 $\delta(t)$이다.
㉰ 신호를 t_0만큼 시간 이동시키려면 $\delta(t-t_0)$와 컨벌루션하면 된다.
㉱ 컨벌루션 계산을 직접 하지 않고서도 컨벌루션 결과 신호의 길이와 존재 구간을 알 수 있다.
Ans) ㉮

4.7 $x[n]=1,\ -3\le n\le 3$과 $h[n]=-n+6,\ 1\le n\le 5$의 컨벌루션 $y([n]=x[n]*h[n]$에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?
㉮ 두 신호 중 어느 신호를 반전시켜 이동시켜 계산하더라도 같은 결과를 얻는다.
㉯ 컨벌루션 결과 $y[n]$은 유효 구간 내의 시간 n에 대해 양의 값이 된다.
㉰ 컨벌루션 결과 $y[n]$은 $-2\le n\le 8$ 구간에 존재한다.
㉱ 컨벌루션 결과 $y[n]$의 길이는 $N=12$이다.
Ans) ㉱

4.8 임펄스 응답에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?
㉮ 현재의 출력을 만들려면 임펄스 응답의 길이보다 더 이전의 과거 입력이 필요하다.
㉯ 임펄스 응답의 길이가 유한하면 그 시스템은 안정하다.
㉰ 임펄스 응답이 $h(t)=e^{-t}u(t+1)$인 시스템은 시정수 1인 인과 안정 시스템이다.
㉱ 계단 응답이 계단 함수인 시스템은 동적(기억) 시스템이다.
Ans) ㉯
$h(t)=e^{-t}u(t+1)$은 비인과 시스템이며, 임펄스 응답이 $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=\delta(t)$가 되므로 순시적 시스템이다.

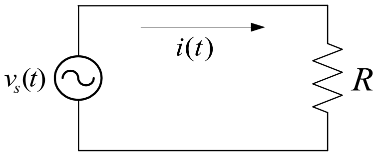
4.9 다음 중에서 임펄스 응답이 $h[n]=(n+1)(u[n+1]-u[n-5])$인 이산 시스템이 만족하지 않는 성질을 모두 골라라.
㉮ 인과 시스템 ㉯ 불안정 시스템 ㉰ 동적 시스템 ㉱ IIR 시스템 ㉲ $|s[n]|<\infty$
Ans) ㉯, ㉱

4.10 시스템 모드의 영향을 받지 않는 시스템 특성을 모두 골라라.
㉮ 안정도 ㉯ 공진 ㉰ 시정수 ㉱ 이득 ㉲ 과도 응답 ㉳ 인과성
Ans) ㉱, ㉳
과도 응답은 시스템 모드의 시간에 따른 변화를 반영한 것이다.

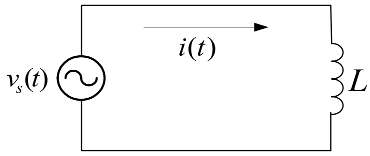
[기초 문제]

4.11 다음 그림의 전기회로에서 전원 전압 $v_s(t)$를 입력, 회로 전류 $i(t)$를 출력이라고 할 때, (a) 회로의 임펄

스 응답을 구하고, (b) 컨벌루션 표현을 이용하여 직류 전압 $v_s(t)=u(t)$에 대한 출력, 즉 계단 응답을 구하라.



( ) R



( ) L

(ㄱ) 저항 회로

Ans) (a) 임펄스 응답

$$h(t)=\frac{1}{R}\delta(t)$$

(b) 계단 응답

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\cdot\frac{1}{R}\delta(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{R}u(t)$$

(ㄴ) 인덕터 회로

Ans) (a) 임펄스 응답

$$h(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}u(t)$$

(b) 계단 응답

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\cdot\frac{1}{L}u(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}t\,u(t)$$

4.12 이산 LTI 시스템의 입력 $x[n]$과 출력 $y[n]$이 다음과 같을 때, 임펄스 응답 $h[n]$을 구하라.

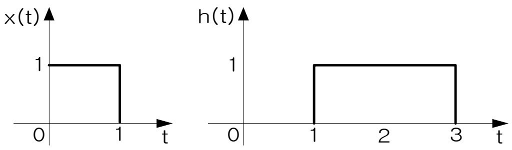
(a) $x[n]=2\delta[n-1]$, $\quad y[n]=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+8\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ans) $h[n]=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n,\quad n\ge 0$

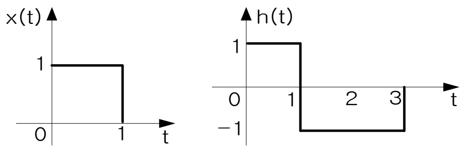
(b) $x[n]=3\delta[n-2]$, $\quad y[n]=3\left(\frac{1}{3}\right)^n+9\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Ans) $h[n]=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{6}\right)^n,\quad n\ge 0$

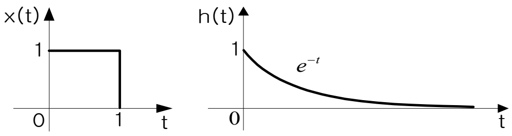
4.13 다음 그림의 $x(t)$와 $h(t)$에 대해 컨벌루션 연산을 수행하고, 그 결과를 그려라.



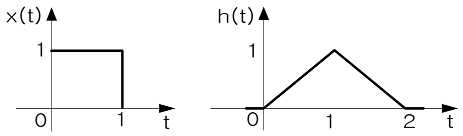
(a)



(b)



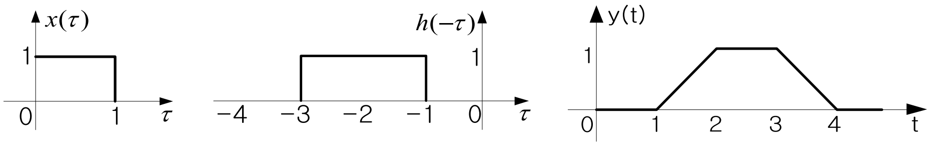
(c)



(d)

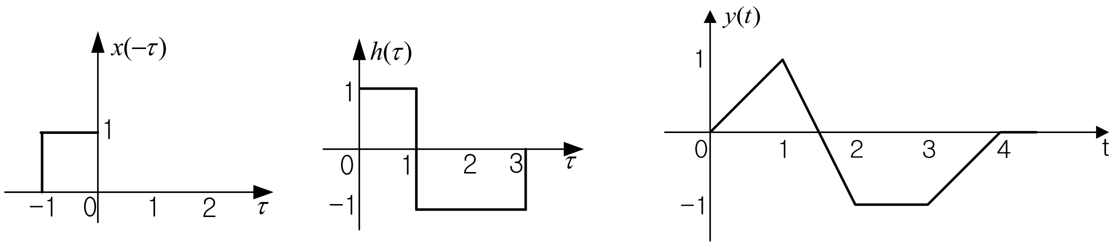
Ans)

(a) 시간축을 τ로 바꾸고 $h(\tau)$를 뒤집어 계산하면



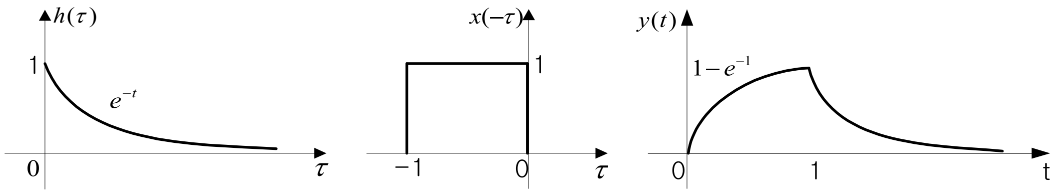
$$
\begin{aligned}
y(t) &= (t-1)[u(t-1)-u(t-2)]+[u(t-2)-u(t-3)]+(-t+4)[u(t-3)-u(t-4)] \\
&= (t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)
\end{aligned}
$$

(b) 시간축을 t에서 τ로 바꾸고 $x(\tau)$를 뒤집어 계산하면



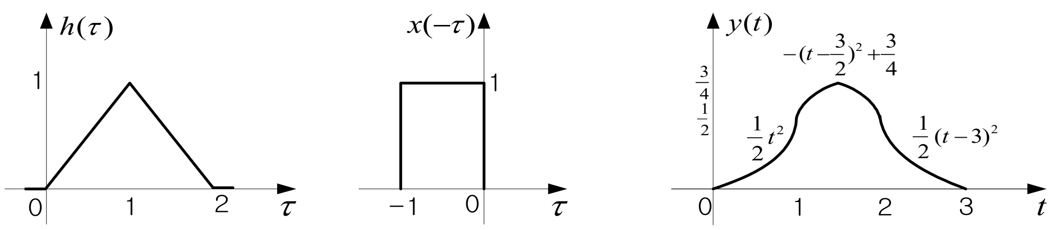
$$
\begin{aligned}
y(t) &= t[u(t)-u(t-1)]+(-2t+3)[u(t-1)-u(t-2)]-[u(t-2)-u(t-3)]+(t-4)[u(t-3)-u(t-4)] \\
&= tu(t)-3(t-1)u(t-1)+2(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)-(t-4)u(t-4)
\end{aligned}
$$

(c) 시간축을 τ로 바꾸고 $x(\tau)$를 뒤집어 계산하면



$$
y(t) = (1-e^{-t})[u(t)-u(t-1)]+e^{-t}(e-1)u(t-1)
$$

(d) 시간축을 τ로 바꾸고 $x(\tau)$를 뒤집어 계산하면



$$
y(t) = \frac{1}{2}t^2[(u(t)-u(t-1)] + (-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4})[u(t-1)-u(t-2)]+\frac{1}{2}(t-3)^3[u(t-2)-u(t-3)]
$$

4.14 임펄스 응답이 $h(t)=e^{-t}u(t)$인 연속 LTI 시스템에 입력 $x(t)$가 다음과 같을 때 출력 $y(t)$를 구하고 그려라.

(a) $x(t)=e^{-2t}u(t)$

Ans) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-t}e^{-\tau}d\tau = e^{-t}(1-e^{-t}), \quad t>0$

(b) $x(t) = e^{-2(t-3)}u(t)$

Ans) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-t}e^{-(\tau-6)}d\tau = e^{6}e^{-t}(1-e^{-t}), \quad t>0$

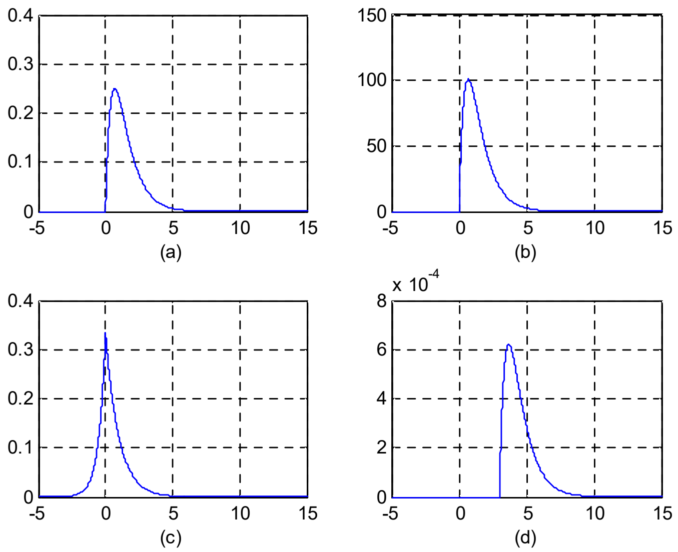
(c) $x(t) = e^{2t}u(-t)$

Ans) ① $t<0$: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-t}e^{3\tau}d\tau = \frac{1}{3}e^{2t}$

② $t>0$: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{-t}e^{3\tau}d\tau = \frac{1}{3}e^{-t}$

(d) $x(t) = e^{-2t}u(t-3)$

Ans) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{3}^{t} e^{-t}e^{-\tau}d\tau = -e^{-2t}+e^{-(t+3)}, \quad t>3$

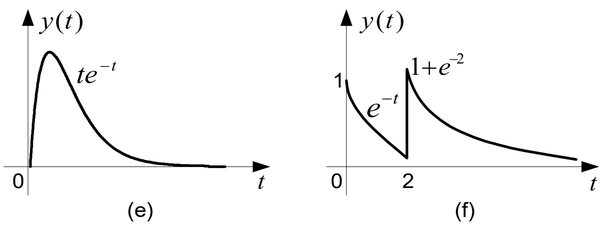


(e) $x(t) = e^{-t}u(t)$

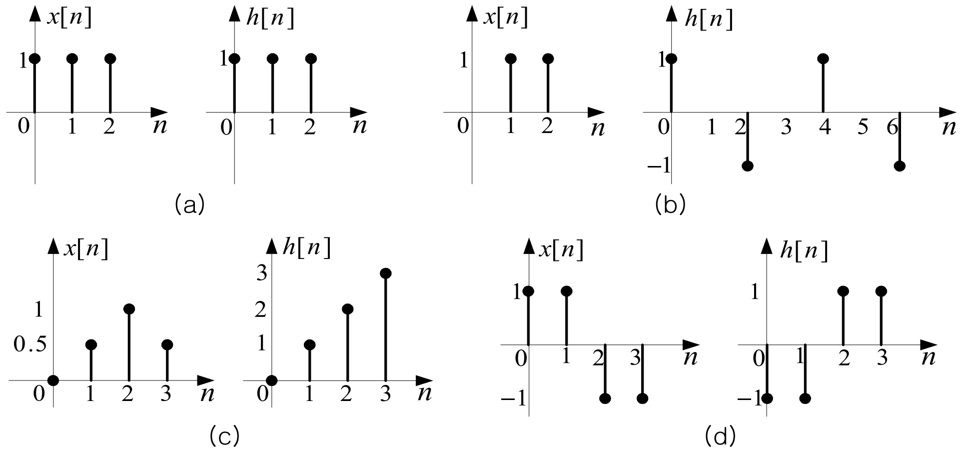
Ans) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-t}d\tau = te^{-t}, \quad t>0$

(f) $x(t) = \delta(t)+\delta(t-2)$

Ans) $y(t) = e^{-t}u(t)+e^{-(t-2)}u(t-2)$



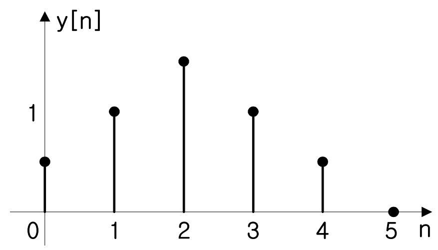
4.15 다음 그림의 $x[n]$와 $h[n]$에 대해 컨벌루션 $y[n] = x[n] * h[n]$을 구하라.



Ans)

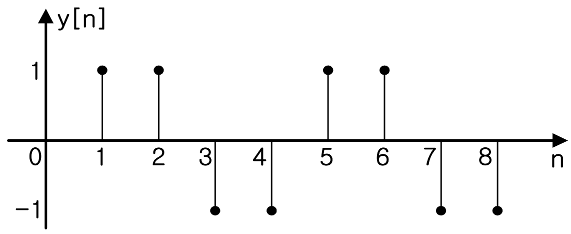
(a)

$x[n-k]$ \ $h[k]$		1	1	1	$y[n]$
$n=$	0	1			1
	1	1	1		2
	2	1	1	1	3
	3		1	1	2
	4			1	1



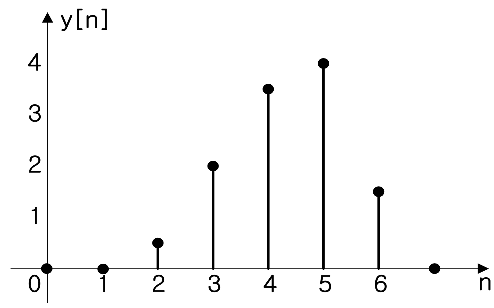
(b)

$h[n-k]$ \ $x[k]$		1	1	$y[n]$
$n=$	1	1		1
	2	0	1	1
	3	-1	0	-1
	4	0	-1	-1
	5	1	0	1
	6	0	1	1
	7	-1	0	-1
	8		-1	-1



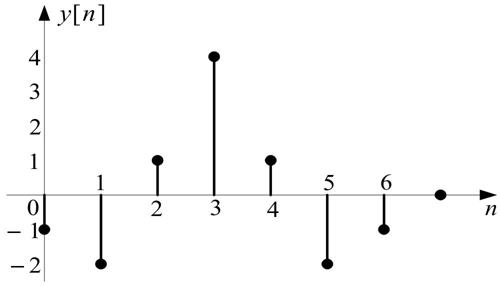
(c)

	n \ k	1	2	3	
$x[k]$		0.5	1	0.5	$y[n]$
$h[n-k]$	2	1			0.5
	3	2	1		2
	4	3	2	1	3.5
	5		3	2	4
	6			3	1.5



(d)

	n \ k	0	1	2	3	
$x[k]$		1	1	-1	-1	$y[n]$
$h[n-k]$	0	-1				-1
	1	-1	-1			-2
	2	1	-1	-1		1
	3	1	1	-1	-1	4
	4		1	1	-1	1
	5			1	1	-2
	6				1	-1



4.16 다음과 같은 함수 쌍에 대해 컨벌루션 $y[n] = x[n] * h[n]$을 구하고 그 결과를 그려라.

(a) $x[n] = (0.5)^n (u[n+2] - u[n-2])$, $h[n] = u[n]$

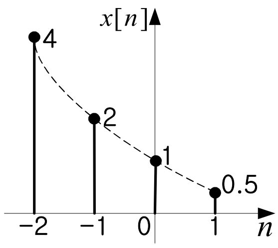
Ans)

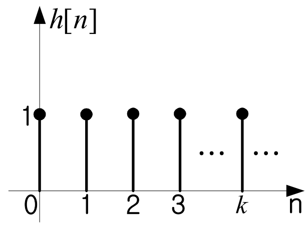
① $-2 \le n < 1$: $y[n] = \sum_{k=0}^{n+2} h[k]x[n-k]$

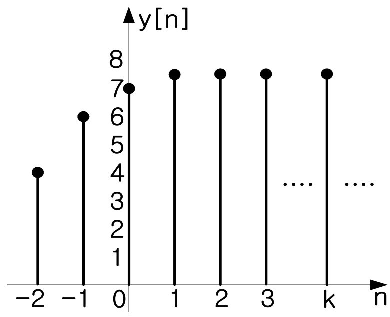
$$y[-2] = x[-2] = 4$$
$$y[-1] = x[-2] + x[-1] = 6$$
$$y[0] = x[-2] + x[-1] + x[0] = 7$$

② $n \ge 1$: $y[n] = \sum_{k=n-1}^{n+2} h[k]x[n-k]$

$$y[n] = x[-2] + x[-1] + x[0] + x[1] = 7.5$$



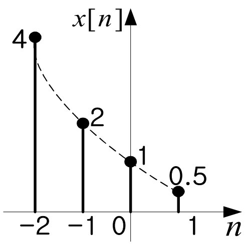


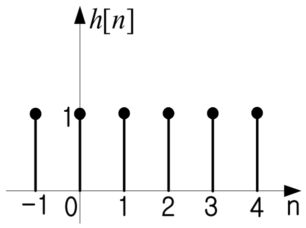


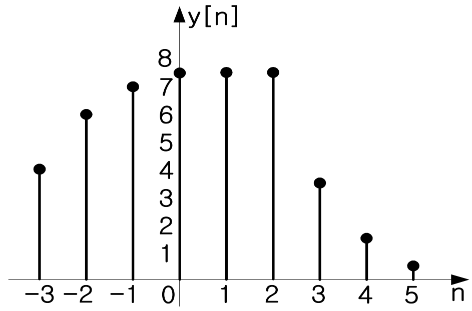
(b) $x[n] = (0.5)^n (u[n+2] - u[n-2])$, $h[n] = u[n+1] - u[n-5]$

Ans)

$x[n-k]$ \ $h[k]$		1	1	1	1	1	1	$y[n]$
$n=$	-3	4						4
	-2	2	4					6
	-1	1	2	4				7
	0	0.5	1	2	4			7.5
	1		0.5	1	2	4		7.5
	2			0.5	1	2	4	7.5
	3				0.5	1	2	3.5
	4					0.5	1	1.5
	5						0.5	0.5





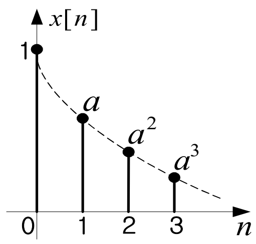


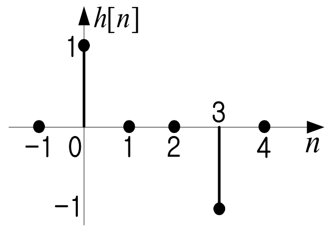
(c) $x[n] = a^n u[n],\ \ h[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$

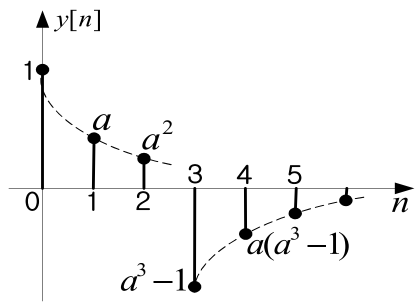
Ans) $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (\delta[n-k] - \delta[n-k-3]) = a^n u[n] - a^{(n-3)} u[n-3]$

① $0 \le n < 3$: $y[n] = a^n$

② $n \ge 3$: $y[n] = a^n - a^{(n-3)}$



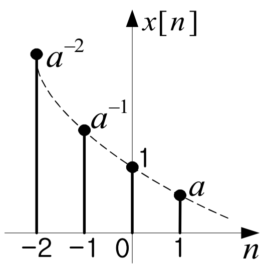


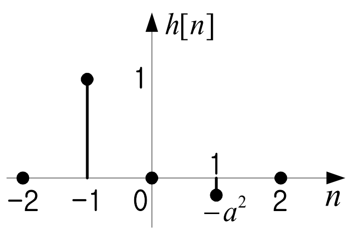


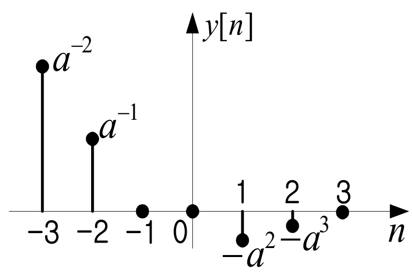
(d) $x[n] = a^n (u[n+2] - u[n-2]),\ \ h[n] = \delta[n+1] - a^2 \delta[n-1]$

Ans)

$h[n-k]$ \ $x[k]$		a^{-2}	a^{-1}	1	a	$y[n]$
$n=$	-3	1				a^{-2}
	-2	0	1			a^{-1}
	-1	$-a^2$	0	1		0
	0		$-a^2$	0	1	0
	1			$-a^2$	0	$-a^2$
	2				$-a^2$	$-a^3$

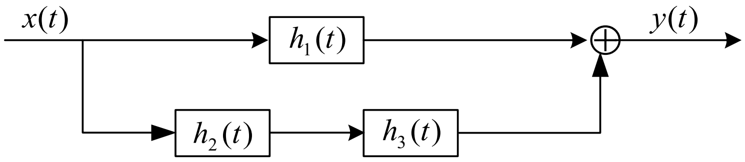






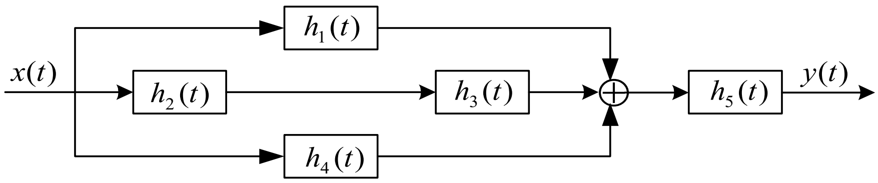
4.17 다음 그림의 연속 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

(a) $h_1(t)=e^{-3t}u(t),\quad h_2(t)=e^{-2t}u(t),\quad h_3(t)=\delta(t-1)$



Ans) $h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_3(t)=e^{-3t}u(t)+e^{-2(t-1)}u(t-1)$

(b) $h_1(t)=e^{-2t}u(t),\quad h_2(t)=e^{-2t}u(t),\quad h_3(t)=e^{-t}u(t),\quad h_4(t)=\delta(t),\quad h_5(t)=e^{-3t}u(t)$



Ans) $h(t)=(h_1(t)+h_2(t)*h_3(t)+h_4(t))*h_5(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$

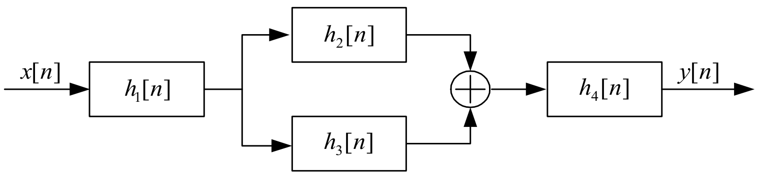
4.18 다음 그림과 같이 네 개의 이산 LTI 시스템을 연결하였다. 이때 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라. 단, 각 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같다.

(a) $h_1[n]=\delta[n]-3\delta[n-1]$, $\quad h_2[n]=nu[n]+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]$,

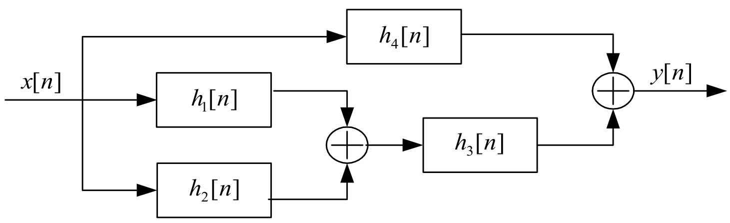
$h_3[n]=(1-n)u[n-1]$, $\quad h_4[n]=3^{n+1}u[n]$

(b) $h_1[n]=u[n]$, $\quad h_2[n]=-u[n]+u[n-2]$,

$h_3[n]=\delta[n-2]$, $\quad h_4[n]=a^n u[n]$



(a)



(b)

(a)

Ans) $h[n]=(h_2[n]+h_3[n])*h_1[n]*h_4[n]=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]+u[n-1]\right\}*3\delta[n]=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]+3u[n-1]$

(b)

Ans) $h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] + h_4[n] = u[n-4] + a^n u[n]$

4.19 다음의 임펄스 응답을 갖는 LTI 시스템의 인과성과 안정성을 판별하라.

(a) $h(t) = \delta(t-3)$

Ans) 인과성 : $h(t) = 0,\ t < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = 1 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(b) $h(t) = \mathrm{rect}(t/2)$

Ans) 인과성 : $h(t) \neq 0,\ t < 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = 2 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(c) $h(t) = u(t)$

Ans) 인과성 : $h(t) = 0,\ t < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(d) $h(t) = e^{-|t|}$

Ans) 인과성 : $h(t) \neq 0,\ t < 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = 2 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(e) $h(t) = e^{2t} u(1-t)$

Ans) 인과성 : $h(t) \neq 0,\ t < 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \frac{e^2}{2} < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(f) $h(t) = t e^{-2t} u(t)$

Ans) 인과성 : $h(t) = 0,\ t < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \frac{1}{4} < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(g) $h(t) = \cos(2t) u(t)$

Ans) 인과성 : $h(t) = 0,\ t < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(h) $h(t) = e^{-2t} \cos(2t) u(t)$

Ans) 인과성 : $h(t) = 0,\ t < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \frac{1}{3} < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

4.20 다음의 임펄스 응답을 갖는 이산 LTI 시스템의 인과성과 안정성을 판별하라.

(a) $h[n] = (-1)^n u[n]$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n] = 0, \quad n < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(b) $h[n] = (2)^n u[1-n]$

Ans)

(i)인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n < 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 4 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(c) $h[n] = (0.5)^{|n|}$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n < 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 3 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(d) $h[n]=(0.5)^{-n}u[-n]$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n \leq 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 2 < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(e) $h[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 100 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n]=0, \; n<0$

$\therefore$ 인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \dfrac{2^{101}-1}{2-1} < \infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(f) $h[n]=nu[-n]$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n \leq 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(g) $h[n]=\sin(\dfrac{\pi}{2}n)$

Ans)

(i) 인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n \leq 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(h) $h[n]=\sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-2k]$

Ans) $h[n]=\delta[n]+\delta[n-2]+\delta[n-4]+\cdots+\delta[n-2k]+\cdots$

(i) 인과성 : $h[n]=0, \; n<0$

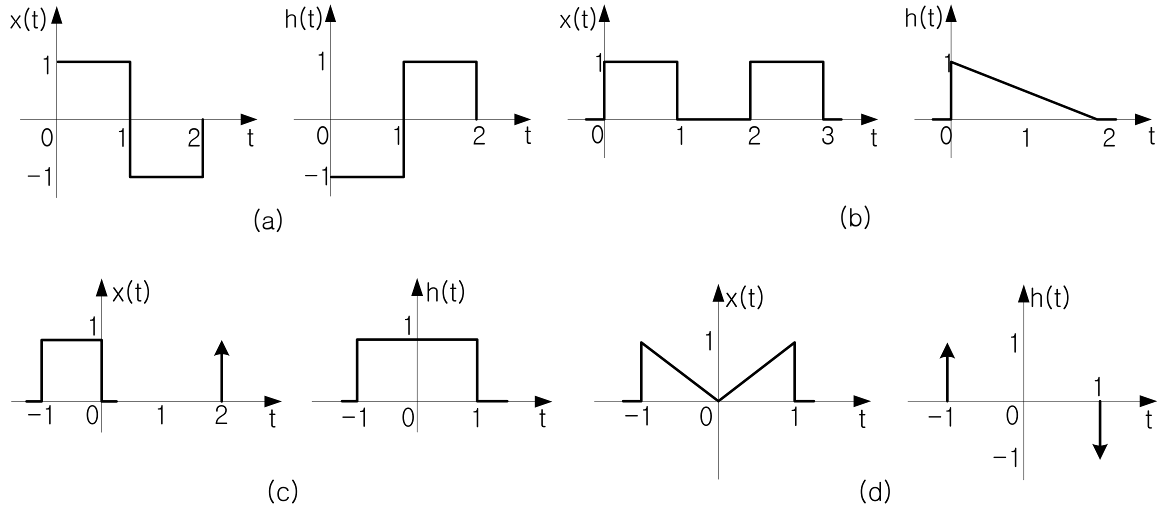
$\therefore$ 인과 시스템

(ii) 안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

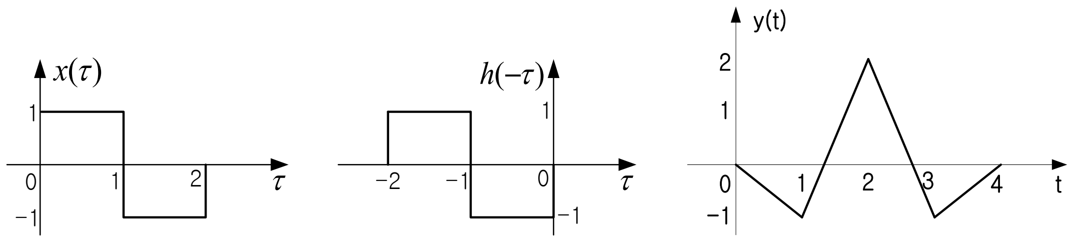
[응용 문제]

4.21 아래 그림의 $x(t)$와 $h(t)$에 대해 컨벌루션 연산을 수행하고 그 결과를 그려라.



(a)

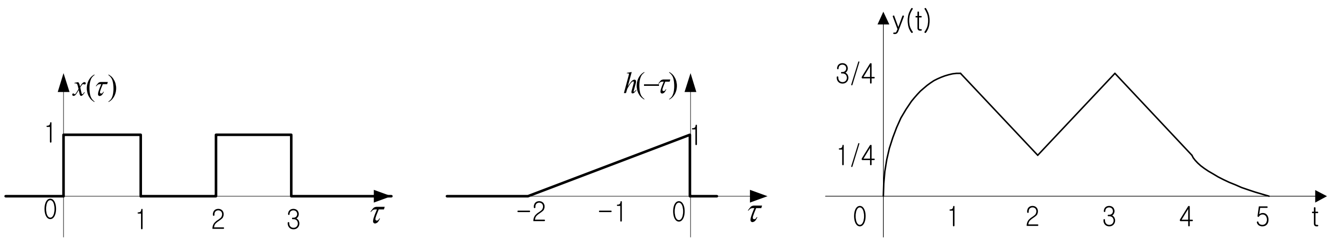
Ans) 시간축을 τ로 바꾸고 $h(\tau)$를 뒤집어 계산하면



$$y(t) = -t[u(t)-u(t-1)] + (3t-4)[u(t-1)-u(t-2)] + (-3t+8)[u(t-2)-u(t-3)] + (t-4)[u(t-3)-u(t-4)]$$

(b)

Ans) 시간축을 τ로 바꾸고 $h(\tau)$를 뒤집어 계산하면

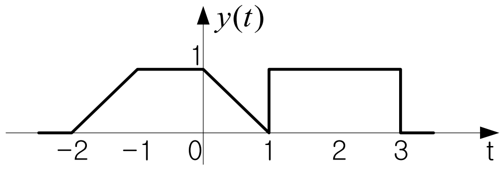


$$y(t) = (-\frac{1}{4}t^2 + t)[u(t)-u(t-1)] + (-\frac{1}{2}t + \frac{5}{4})[u(t-1)-u(t-2)] + (\frac{1}{2}t - \frac{3}{4})[u(t-2)-u(t-3)]$$
$$(-\frac{1}{2}t + \frac{9}{4})[u(t-3)-u(t-4)] + (\frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{25}{4})[u(t-4)-u(t-5)]$$

(c)

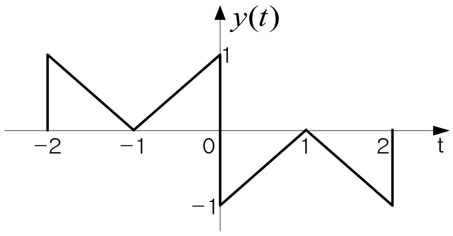
Ans) 시간축을 τ로 바꾸고 $h(\tau)$를 뒤집어 계산하면

$$y(t) = (t+2)[u(t+2)-u(t+1)] + [u(t+1)-u(t)] + (-t+1)[u(t)-u(t-1)] + [u(t-1)-u(t-3)]$$



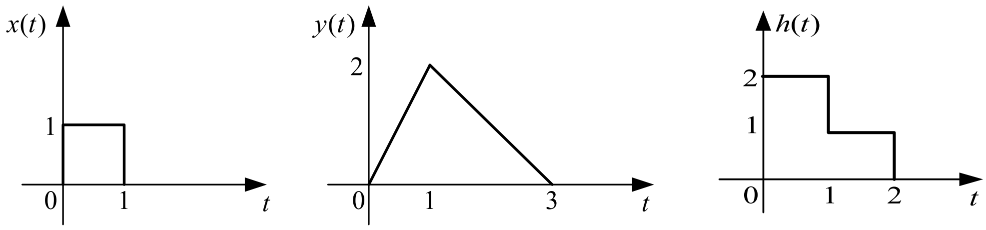
(d)

Ans) $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t+1) - x(t) * \delta(t-1) = x(t+1) - x(t-1)$



4.22 LTI 시스템의 입력 $x(t)$와 출력 $y(t)$가 그림과 같을 때 이 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$를 구하라.

(Hint : $\dot{x}(t)$가 임펄스만으로 이루어짐을 이용하라.)



Ans) $y(t) = x(t) * h(t) = u(t) * h(t) - u(t-1) * h(t)$

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t) * h(t) - \dot{u}(t-1) * h(t) = h(t) - h(t-1) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t < 3 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

$\therefore\ h(t) = 2\{u(t) - u(t-1)\} + \{u(t-1) - u(t-2)\} = 2u(t) - u(t-1) - u(t-2)$

4.23 이산 LTI 시스템의 입력 $x[n]$에 대한 출력 $y[n]$가 다음과 같을 때, 임펄스 응답 $h[n]$을 구하라.

(a) $x[n] = [\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2]$, $\quad y[n] = [\underset{\uparrow}{1},\ -1,\ 3,\ -1,\ 6]$

Ans) $y[n] = x[n] * h[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$

$\therefore\ h[n] = [\underset{\uparrow}{1},\ -2,\ 3]$

(b) $x[n] = [\underset{\uparrow}{2},\ -1,\ 3]$, $\quad y[n] = [\underset{\uparrow}{2},\ 3,\ 5,\ 10,\ 3,\ 9]$

Ans) $y[n] = x[n] * h[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$

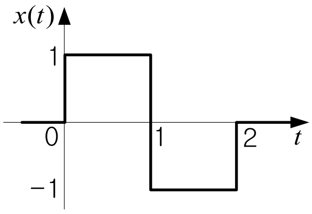
$\therefore\ h[n] = [\underset{\uparrow}{1},\ 2,\ 2,\ 3]$

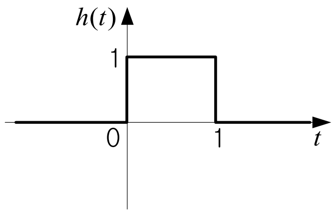
(c) $x[n]=[\underset{\uparrow}{2},\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots],\qquad y[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+x[2]h[n-2]+\cdots+x[k]h[n-k]+\cdots+x[n]h[0]$

$\therefore\ h[n]=[\underset{\uparrow}{0.5},\ 0.5]$

4.24 다음 그림의 신호 쌍에 대한 컨벌루션을 직접 계산하지 말고 컨벌루션의 성질을 이용하여 구하라.





Ans) $x(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2),\quad h(t)=u(t)-u(t-1)$

컨벌루션의 미분 성질과 임펄스와의 컨벌루션 성질을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)=(\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2))*h(t)=u(t)-3u(t-1)+3u(t-2)-u(t-3)$$

$$\begin{aligned}y(t)&=r(t)-3r(t-1)+3r(t-2)-r(t-3)\\&=tu(t)-3(t-1)u(t-1)+3(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)\end{aligned}$$

4.25 시스템의 입력 $x[n]$과 임펄스 응답 $h[n]$이 다음과 같을 때, 시스템의 출력 $y[n]$을 구하라.

(a) $x[n]=u[n],\quad h[n]=\delta[n]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}u[k]\delta[n-k]=u[n]$

(b) $x[n]=u[n],\quad h[n]=u[n]-u[n-10]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 9\\ 10, & n\ge 10\end{cases}$

(c) $x[n]=nu[n],\quad h[n]=u[n]-u[n-10]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}ku[k](u[n-k]-u[n-k-10])=\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{n-10}k$

$$=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}k, & 0\le n\le 10\\ \sum_{k=n-9}^{n}k, & n\ge 11\end{cases}$$

(d) $x[n]=u[n],\quad h[n]=u[n-3]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=\sum_{k=3}^{n}1=(n-2)u[n-3]$

(e) $x[n]=u[n],\quad h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^k=2-(\frac{1}{2})^n,\qquad n\ge 0$

(f) $x[n]=u[n], \quad h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n-2]$

Ans) $h[n]=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2]$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]=\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2})^k=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n, \qquad n\ge 2$$

(g) $x[n]=a^n u[n],\ h[n]=b^n u[n]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u[k]b^{n-k}u[n-k]=b^n\sum_{k=0}^{n}(\frac{a}{b})^k$

$$=\begin{cases}(n+1)b^n, & a=b \\ b^n\dfrac{1-(\frac{a}{b})^{n+1}}{1-\frac{a}{b}}=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}, & a\ne b\end{cases}, \qquad n\ge 0$$

(h) $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n], \quad h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+(\frac{1}{3})^n u[n]$

Ans) $y[n]=x[n]*h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]+(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]+6\left[(\frac{1}{2})^{n+1}-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]u[n]$

$$=4(\frac{1}{2})^n u[n]+(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]-2(\frac{1}{3})^n u[n]$$

4.26 임펄스 응답이 $h[n]=[\check{1},\ -1,\ 1,\ -1]$인 이산 LTI 시스템에 다음과 같은 입력 $x[n]$을 반으로 나누어 $x_1[n]$과 $x_2[n]$을 구성하였다.

$$x[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1]$$

(a) $y_1[n]=x_1[n]*h[n]$을 계산하라.

Ans) $x_1[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]$

	n \ k	0	1	2	3	4	
$x_1[k]$		1	2	3	4	5	$y_1[n]$
$h[n-k]$	0	1					1
	1	-1	1				1
	2	1	-1	1			2
	3	-1	1	-1	1		2
	4		-1	1	-1	1	2
	5			-1	1	-1	-4
	6				-1	1	1
	7					-1	-5

$\therefore\ y_1[n]=[\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -4,\ 1,\ -5]$

(b) $y_2[n]=x_2[n]*h[n]$을 계산하라.

Ans) $x_2[n]=[\underset{\uparrow}{5},\ 4,\ 3,\ 2,\ 1]$

	$n \backslash k$	0	1	2	3	4	
$x_2[k]$		5	4	3	2	1	$y_2[n]$
$h[n-k]$	0	1					5
	1	−1	1				−1
	2	1	−1	1			4
	3	−1	1	−1	1		−2
	4		−1	1	−1	1	−2
	5			−1	1	−1	−2
	6				−1	1	−1
	7					−1	−1

$$\therefore\ y_2[n] = [\underset{\uparrow}{5},\ -1,\ 4,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1]$$

(c) $y[n] = x[n] * h[n]$을 계산하라.

Ans) 컨벌루션을 계산하면

	$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$x[k]$		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1	$y[n]$
$h[n-k]$	0	1										1
	1	−1	1									1
	2	1	−1	1								2
	3	−1	1	−1	1							2
	4		−1	1	−1	1						2
	5			−1	1	−1	1					1
	6				−1	1	−1	1				0
	7					−1	1	−1	1			−1
	8						−1	1	−1	1		−2
	9							−1	1	−1	1	−2
	10								−1	1	−1	−2
	11									−1	1	−1
	12										−1	−1

$$\therefore\ y[n] = [\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1]$$

(d) $y_1[n]$과 $y_2[n]$으로부터 어떻게 $y[n]$을 구할 수 있는가?

Ans) $x[n] = x_1[n] + x_2[n-5]$

$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n] + y_2[n-5] \\ &= [\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -4,\ 1,\ -5] + [\underset{\uparrow}{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ -1,\ 4,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1] \\ &= [\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1] \end{aligned}$$

4.27 어떤 LTI 시스템의 임펄스 응답은 $h(t) = u(t)$이다.

(a) 이 시스템의 안정도를 판별하라.

Ans) $\displaystyle\int_0^\infty |h(t)|dt = \int_0^\infty |u(t)|dt = \infty$

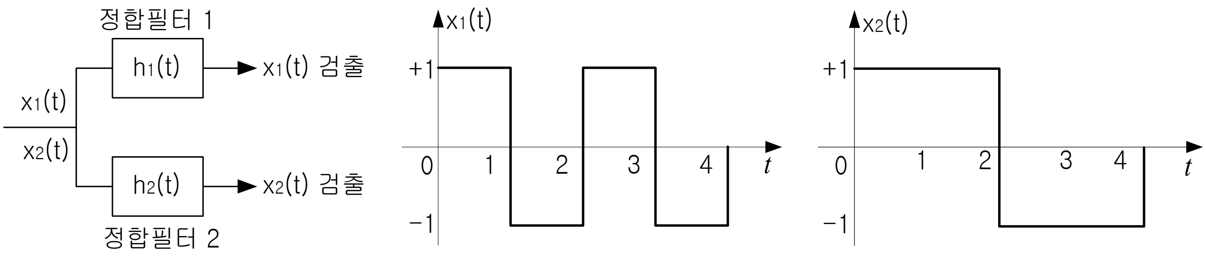
$\therefore$ BIBO 불안정

(b) 이 시스템의 입출력 관계식을 구하여 어떤 시스템인지 밝혀라.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t u(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

즉 이 시스템은 적분기이다.

4.28 정합 필터 matched filter는 특정 기호 파형이 수신되었을 때 최대 출력을 내보내는 장치로 통신에서 유용하게 쓰인다. 다음 그림 (a)에 간단한 정합 필터 시스템을 나타내었다. 정합 필터 1은 그림 (b)의 $x_1(t)$에 대해, 정합 필터 2는 그림 (b)의 $x_2(t)$에 대해 최대 출력을 내는 필터이다. 따라서 수신 신호에 대한 두 필터의 출력을 관측하여 비교하게 되면 둘 중 어떤 신호인지를 판별할 수 있게 된다.

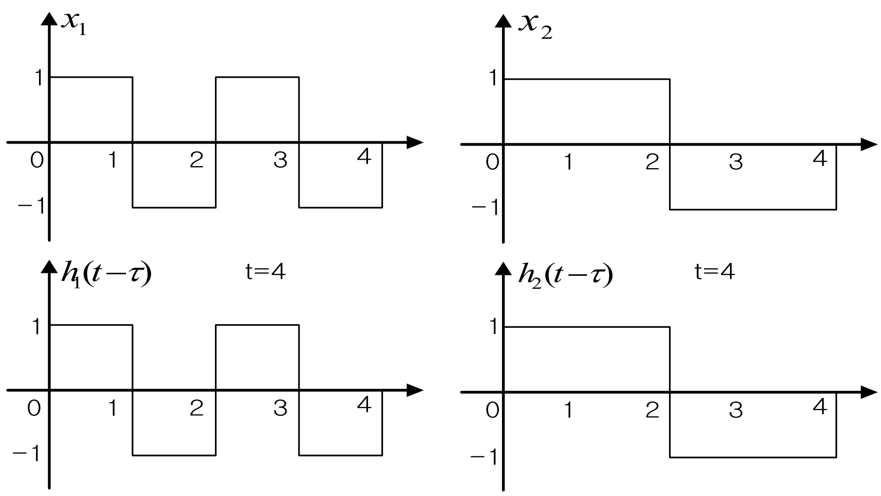


(a) (b)

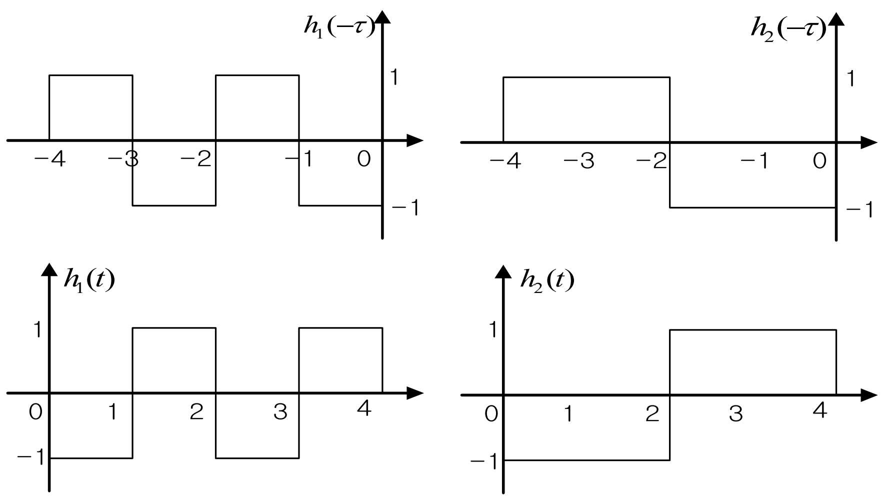
(a) 정합필터 1과 2가 $t=4$에서 각각 입력 $x_1(t)$와 $x_2(t)$에 대해 최대의 출력을 낼 때 정합 필터들의 임펄스 응답 $h_1(t)$와 $h_2(t)$를 구하라. 단, 임펄스 응답은 다음의 조건을 만족한다.

i) $h(t)=0, \quad t<0$ ii) $|h(t)| \leq 1, \quad \forall t$

Ans) $t=4$에서 $x_1(t)*h_1(t)$가 최대가 되려면 $t=4$에서 두 파형($x_1(\tau)$와 $h_1(4-\tau)$)이 일치해야 하므로



위의 두 파형이 일치해야 출력이 최대



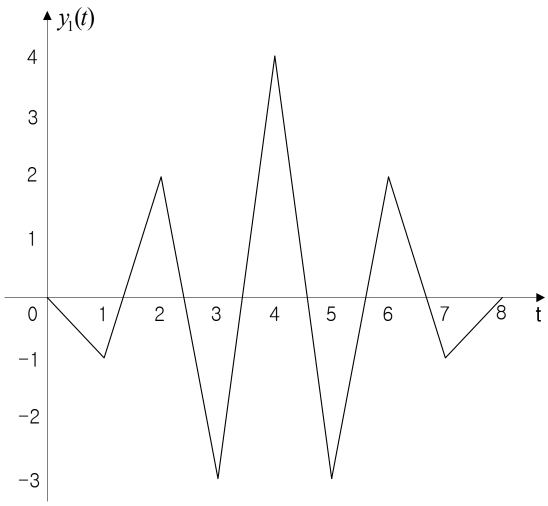
(b) (a)에서 구한 임펄스 응답에 대해 신호가 정합된 경우의 각 필터의 출력을 구하라.

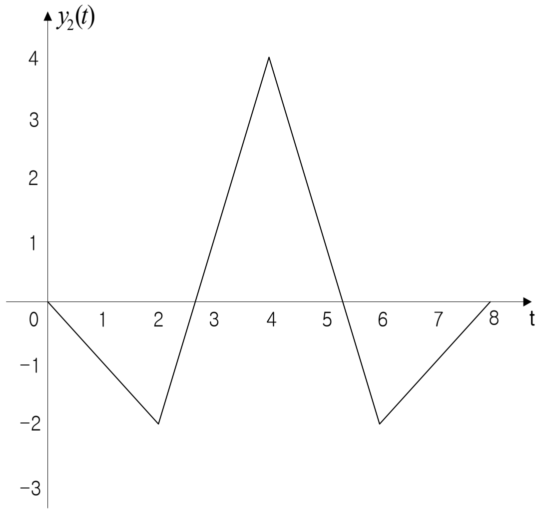
Ans) $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$

$$\begin{aligned} y_1(t) =& -t[u(t)-u(t-1)] + (3t-4)[u(t-1)-u(t-2)] + (-5t+12)[u(t-2)-u(t-3)] \\ &+ (7t-24)[u(t-3)-u(t-4)] + (-7t+32)[u(t-4)-u(t-5)] + (5t-28)[u(t-5)-u(t-6)] \\ &+ (-3t+20)[u(t-6)-u(t-7)] + (t-8)[u(t-7)-u(t-8)] \end{aligned}$$

$y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$

$$\begin{aligned} y_2(t) =& -t[u(t)-u(t-2)] + (3t-8)[u(t-2)-u(t-4)] \\ &+ (-3t+16)[u(t-4)-u(t-6)] + (t-8)[u(t-6)-u(t-8)] \end{aligned}$$





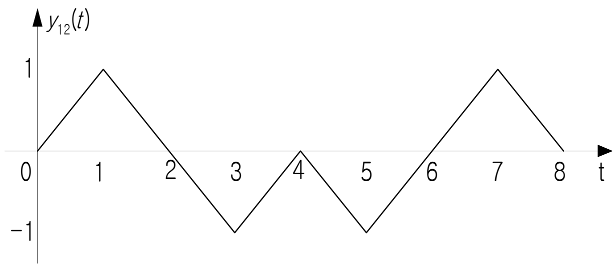
(c) (b)의 경우와 반대로 $x_1(t)$가 필터 2에, $x_2(t)$가 필터 1에 인가되었을 경우 각 필터의 출력은 어떻게 되겠는가?

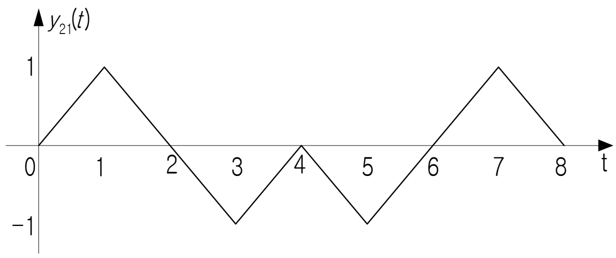
Ans) $y_{12}(t) = x_1(t) * h_2(t)$

$$\begin{aligned} y_{12}(t) =& t[u(t)-u(t-1)] + (-t+2)[u(t-1)-u(t-3)] + (t-4)[u(t-3)-u(t-4)] \\ &+ (-t+4)[u(t-4)-u(t-5)] + (t-6)[u(t-5)-u(t-7)] + (-t+8)[u(t-7)-u(t-8)] \end{aligned}$$

$y_{21}(t) = x_2(t) * h_1(t)$

$$\begin{aligned} y_{21}(t) =& t[u(t)-u(t-1)] + (-t+2)[u(t-1)-u(t-3)] + (t-4)[u(t-3)-u(t-4)] \\ &+ (-t+4)[u(t-4)-u(t-5)] + (t-6)[u(t-5)-u(t-7)] + (-t+8)[u(t-7)-u(t-8)] \end{aligned}$$





4.29 LTI 시스템의 입출력 관계가 다음과 같이 주어질 때 시스템의 임펄스 응답을 구하라. 그리고 이를 이용하여 시스템의 인과성과 안정도를 판별하라.

(a) $y(t)=x(t-3)$

Ans) $h(t)=\delta(t-3)$

인과성 : $h(t)=0,\ t<0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=1<\infty$

$\therefore$ 안정한 시스템

(b) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau-3)d\tau$

Ans) $h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-3)d\tau=\begin{cases}1, & t\geq 3\\ 0, & t<3\end{cases}=u(t-3)$

인과성 : $h(t)=0,\ t\leq 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(c) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\sigma}x(\tau-3)d\tau]d\sigma$

Ans) $h(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\sigma-3)d\sigma=\begin{cases}t-3, & t\geq 3\\ 0, & t<3\end{cases}=r(t-3)$

인과성 : $h(t)=0,\ t\leq 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(d) $y(t)=\int_{0}^{\infty}e^{\tau}x(t-\tau-1)d\tau$

Ans) $h(t)=\int_{0}^{\infty}e^{\tau}\delta(t-\tau-1)d\tau=\begin{cases}e^{t-1}, & t\geq 1\\ 0, & t<1\end{cases}$

인과성 : $h(t)=0,\ t\leq 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(e) $y[n]=x[n-3]$

Ans) $h[n]=\delta[n-3]$

인과성 : $h[n]=0,\ n<0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1$

$\therefore$ 안정한 시스템

(f) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-3]$

Ans) $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k-3] = u[n-3]$

인과성 : $h[n] = 0,\ n < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(g) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \sum_{m=-\infty}^{k} x[m-3]$

Ans) $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \sum_{m=-\infty}^{k} \delta[m-3] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k-3] = (n-2)u[n-3]$

인과성 : $h[n] = 0,\ n < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) = \infty$

$\therefore$ 불안정한 시스템

(h) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n} x[k-3]$

Ans) $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n} \delta[k-3] = (\frac{1}{2})^{n-3} u[n-3]$

인과성 : $h[n] = 0,\ n < 0$

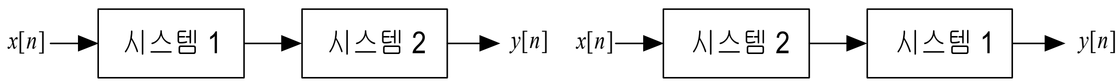
$\therefore$ 인과 시스템

안정성 : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k} = 2$

$\therefore$ 안정한 시스템

4.30 두 개의 이산 시스템을 다음과 같이 두 가지 경우로 종속 연결하였다.

시스템 1과 2가 각각 다음과 같을 때, 입력 $x[n] = 2(0.5)^n u[n]$에 대한 두 연결의 출력을 구하라. 이때 두 출력은 동일한가? 그렇다면 그 이유를 설명하라.



(a) 시스템 1 : $y[n] = x^2[n]$, 시스템 2 : $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$

Ans) 왼쪽 그림의 경우 입력 $x[n] = 2(0.5)^n u[n]$에 대한 시스템 1의 출력 $y_1[n]$은

$$y_1[n] = 4(0.5)^{2n}u[n]$$

$$h_2[n] = (0.5)^n u[n]$$

$$y[n] = y_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=0}^{n} 4(0.5)^{2k}(0.5)^{(n-k)} = 8[(0.5)^n - (0.5)^{2n+1}]u[n]$$

오른쪽 그림의 경우 입력 $x[n] = 2(0.5)^n u[n]$에 대한 시스템 2의 출력 $y_2[n]$은

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n] = \sum_{k=0}^{n} 2(0.5)^k (0.5)^{(n-k)} = 2(n+1)(0.5)^n u[n]$$

$$y[n] = y_2^2[n] = 4(n+1)^2(0.5)^{2n}u[n]$$

이 문제의 경우 시스템 1이 비선형 시스템이므로 두 부시스템의 순서를 바꾸어 종속 연결하면 출력이 달라진다.

(b) 시스템 1 : $y[n] = x[n] - x[n-1]$, 시스템 2 : $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$

Ans) 이 경우는 시스템 1과 시스템 2 모두 선형 시스템이므로 컨벌루션의 성질로부터

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$$

따라서 그림의 어느 쪽으로 연결하더라도 출력은 같다.

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad \& \quad h_2[n] = (0.5)^n u[n]$$

$$h[n] = h_2[n] * h_1[n] = (0.5)^n u[n] - (0.5)^{n-1}u[n-1]$$

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] &= \sum_{k=0}^{n} 2((0.5)^k u[k] - (0.5)^{k-1}u[k-1])(0.5)^{(n-k)} \\ &= 2(n+1)(0.5)^n u[n] - 2n(0.5)^{n-1}u[n-1] \end{aligned}$$