제5장 연속 시스템의 시간 영역 해석

[개념 정리]

5.1 연속 LTI 시스템의 미분 방정식 표현에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 시스템 $\dot{y}(t)+a(t)y(t)=x(t)$의 영상태 응답은 컨벌루션 적분으로도 구할 수 있다.

㉯ LTI 시스템을 나타낸 미분 방정식으로부터 영상태 응답을 구할 수 있다.

㉰ $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)y(t)+(t+1)y(t)=x(t)$는 선형 시스템도 아니고, 시불변 시스템도 아니다.

㉱ 미분 방정식은 입력이 없더라도 해(출력)를 가질 수 있다.

Ans) ㉮

$\dot{y}(t)+a(t)y(t)=x(t)$는 시변 시스템의 미분 방정식이므로 컨벌루션으로는 영상태 응답을 구할 수 없다.

5.2 미분 방정식과 시스템 구현도에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 시스템의 표준형 구현도는 미분 방정식으로부터 중간 과정 없이 바로 그릴 수 있다.

㉯ n차 미분 방정식으로 표현된 시스템의 표준형 구현도는 n개의 적분기가 필요하다.

㉰ 제1 직접형 구현도만 알고 있으면, 제2 직접형 구현도를 바로 그릴 수 있다.

㉱ 시스템의 표준형 구현도에 적분기 말고 미분기를 사용해도 무방하다.

Ans) ㉱

미분기는 안정도와 관련해 문제가 발생할 수 있으므로 시스템 구현에 사용하지 않는다.

5.3 미분 방정식의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

㉮ 초기 조건이 0이면 동차해도 0이 된다.

㉯ 입력의 꼴에 따라 동차해의 꼴도 달라진다.

㉰ $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{x}(t)+x(t)$의 계단 응답에 포함된 시스템 모드는 e^{-2t}뿐이다.

㉱ 초기 조건에 따라 특이해도 달라진다.

Ans) ㉰

$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{x}(t)+x(t)$의 전달 함수는 $H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+3s+2}=\dfrac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{s+2}$가 되어 분모, 분자간에 극-영점의 상쇄가 일어나 $\dfrac{1}{s+1}$에 해당되는 시스템 모드 e^{-t}는 나타나지 않는다.

5.4 미분 방정식의 풀이에 관한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 동차해보다 특이해를 먼저 구해도 아무런 문제가 없다.

㉯ 입력 $x(t)=e^{at}$일 때, 특이해를 항상 $y_p(t)=ce^{at}$로 둘 수 있는 것은 아니다.

㉰ $t=0^-$ 순간의 초기 조건을 특성 방정식으로부터 구한 동차해에 대입해 구한 동차해 성분과 같은 초기 조건을 완전해에 대입하여 구한 동차해 성분은 보통 다르다.

㉱ 강제 응답을 미분 방정식에 대입하면 식이 0이 된다. 즉 좌변과 우변이 같아진다.

Ans) ㉮

입력이 시스템 모드와 같은 꼴일 때, 동차해에서 시스템 모드가 구해져야만 특이해의 꼴을 어떻게 둘지 정할 수 있다. 예를 들어 입력이 e^{-t}일 때, 동차해를 구성하는 시스템 모드에 e^{-t}가 포함되어 있다면 특이해의 꼴을 $y_p(t)=cte^{-t}$라고 두어 미분 방정식에 대입해 특이해를 결정해야 한다.

5.5 시스템의 응답에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

㉮ 시스템 고유 특성을 들여다 볼 수 없는 응답은 강제 응답이다.

㉯ 미분 방정식의 해를 구할 때, $t=0^-$의 초기 조건을 사용하면 영상태 응답이 얻어진다.

㉰ 동차해로부터 구할 수 있는 시스템 응답은 고유 응답, 영입력 응답, 임펄스 응답이다.

㉱ 미분 방정식의 초기 조건이 0이라도 고유 응답과 강제 응답이 얻어진다.

Ans) ㉯

5.6 $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3}+4\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$, $x(t)=(e^{-t}+e^{-2t})u(t)$의 해에 포함되지 않는 항을 모두 골라라.

㉮ e^{-t}	㉯ te^{-t}	㉰ t^2e^{-t}	㉱ t^3e^{-t}
㉲ e^{-2t}	㉳ te^{-2t}	㉴ t^2e^{-2t}	㉵ t^3e^{-2t}

Ans) ㉱, ㉴, ㉵

특성 방정식이 $\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2=(\lambda+1)^2(\lambda+2)=0$이므로 동차해의 시스템 모드는 e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}이다. 그런데 입력이 시스템 모드와 같은 꼴이므로 $y_p(t)=at^2e^{-t}+bte^{-2t}$로 두고 특이해를 구해야 한다.

5.7 다음 중 미분 방정식으로 표현되는 연속 LTI 시스템의 시스템 모드가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

㉮ e^{-t}	㉯ e^{2t}	㉰ $e^{(-1+j1)t}$	㉱ t^2
㉲ te^{-2t}	㉳ e^{j2t}	㉴ $te^{(-1+j1)t}$	㉵ $\dfrac{1}{t}e^{-t}$

Ans) ㉱, ㉵

5.8 다음 중 시스템 모드 항을 포함하지 않은 응답을 모두 골라라.

㉮ 고유 응답	㉯ 강제 응답	㉰ 영입력 응답	㉱ 영상태 응답
㉲ 과도 응답	㉳ 정상상태 응답	㉴ 임펄스 응답	㉵ 계단 응답

Ans) ㉯, ㉳

정상상태 응답은 강제 응답 또는 0인 경우로서 시스템 모드와는 상관없다.

안정한 시스템의 시스템 모드 항들은 시간이 지나면 0으로 수렴한다. 따라서 과도 응답은 시스템 모드 항들을 포함한다.

5.9 연속 LTI 시스템의 미분방정식 표현에 대한 다음의 설명 중 옳은 것은?

㉮ 특성근이 $\lambda=-2\pm j1$인 시스템은 불안정한 시스템이다.

㉯ 임펄스 응답과 고유 응답은 그 형태가 같다.

㉰ 초기 조건이 달라지면 고유 응답과 강제 응답이 모두 달라진다.

㉱ 시스템 모드가 e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}인 시스템은 불안정하다.

Ans) ㉯

시스템 모드가 e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}이면 특성근 $\lambda=-1$이 복소평면의 좌반면에 있으므로 시스템은 안정하다.

5.10 시스템 모드의 영향을 받지 않는 시스템 특성을 모두 골라라.

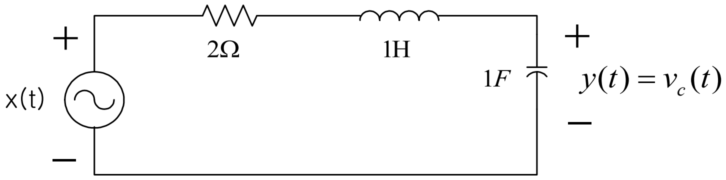
㉮ 안정도 ㉯ 공진 ㉰ 시정수 ㉱ 이득 ㉲ 과도 응답 ㉳ 인과성

Ans) ㉱, ㉳

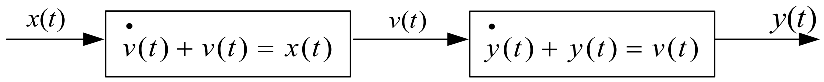
시스템 모드와 같은 주파수의 입력에 대해 시스템은 공진 현상을 나타낸다.

[기초 문제]

5.11 아래 그림 (a)와 같은 RLC 직렬회로를 그림 (b)에 나타낸 것처럼 같은 형태의 미분 방정식으로 표현되는 2개의 부시스템을 종속 연결한 시스템으로 등가화할 수 있음을 보여라.



a)



b)

Ans) 회로 방정식을 세우면

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+\frac{dy(t)}{dt}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dy(t)}{dt}+y(t)\right]+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$\therefore \begin{cases} v(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t) \\ x(t)=\dfrac{dv(t)}{dt}+v(t) \end{cases}$$

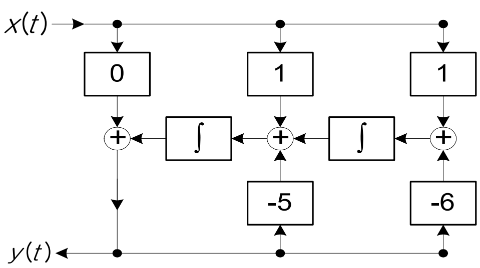
5.12 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템에 대해 제1 표준형 및 제2 표준형 구현도를 그려라. 그리고 특성 방정식을 구하고 안정도를 판별하라.

(a) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$

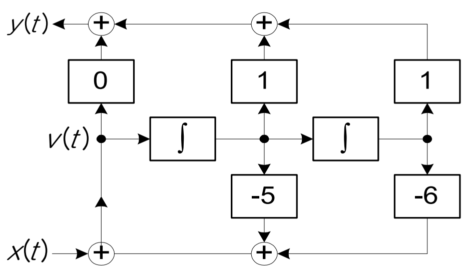
Ans) 특성 방정식 : $\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0$

특성근 : $\lambda=-2,\ -3$

안정도 : 특성근들이 복소평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.



(a) 제1 표준형



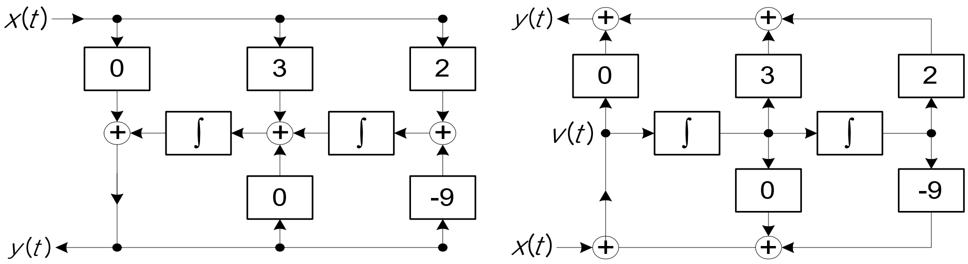
(b) 제2 표준형

(b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+9y(t)=3\dfrac{dx(t)}{dt}+2x(t)$

Ans) 특성 방정식 : $\lambda^2+9=(\lambda+j3)(\lambda-j3)=0,$

특성근　　　:　$\lambda = \pm j3$

안정도　　　:　특성근들이 복소평면의 허축 위에 존재하므로 이 시스템은 임계 안정(불안정)하다.



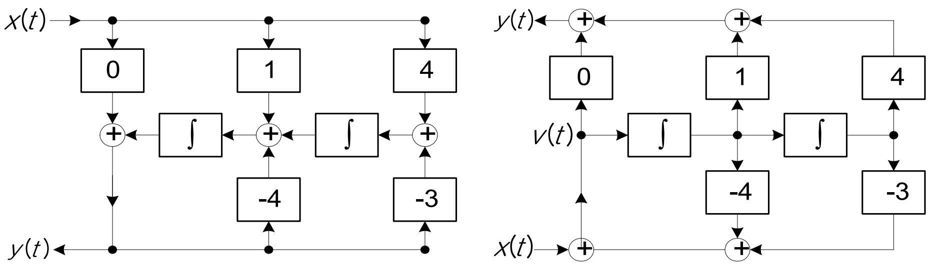
(a) 제1 표준형　　　(b) 제2 표준형

(c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$

Ans) 특성 방정식 :　$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

특성근　　　:　$\lambda = -1,\ -3$

안정도　　　:　특성근들이 복소평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.



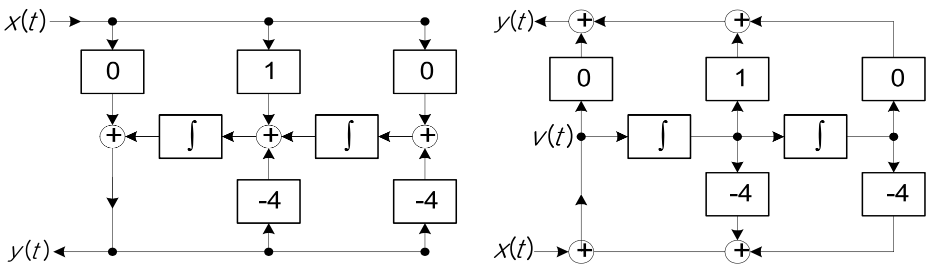
(a) 제1 표준형　　　(b) 제2 표준형

(d) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Ans) 특성 방정식 :　$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$

특성근　　　:　$\lambda = -2$ (중근)

안정도　　　:　특성근들이 복소평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.



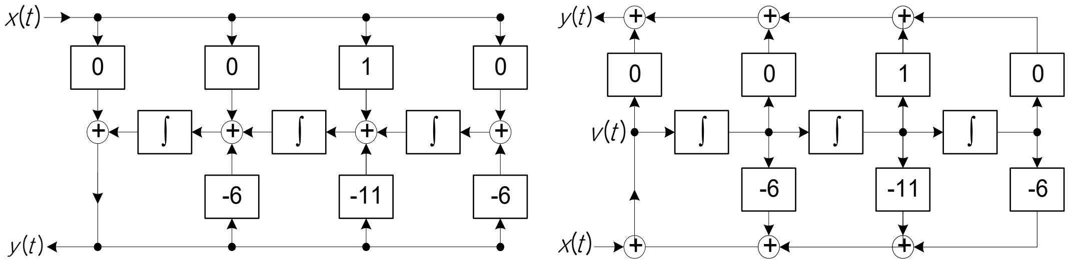
(a) 제1 표준형　　　(b) 제2 표준형

(e) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$

Ans) 특성 방정식 : $\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+6)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$

특성근 : $\lambda=-1,\ -2,\ -3$

안정도 : 특성근들이 복소평면의 좌반면에 존재하므로 이 시스템은 안정하다.



(a) 제1 표준형 (b) 제2 표준형

5.13 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템의 계단 응답을 구하라. ($y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$이다)

(a) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+1$

$\therefore\ y(t)=-e^{-2t}+1$

(b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=3x(t)$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+1$

$\therefore\ y(t)=-\dfrac{3}{2}e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-3t}+1$

(c) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+4y(t)=4x(t)$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+1$

$\therefore\ y(t)=-e^{-2t}-2te^{-2t}+1$

(d) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}+1$

$\therefore\ y(t)=-(1+t)e^{-t}+1$

5.14 미분방정식 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$으로 표현되는 연속 LTI 시스템에 대해 물음에 답하라.

(a) 계단 응답을 구하라(초기 조건은 $y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$이다).

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y(t)=-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}+\dfrac{1}{2}$

(b) 이 시스템의 임펄스 응답은 $h(t) = e^{-t} - e^{-2t}$이다. 컨벌루션을 이용하여 단위 계단 입력에 대한 응답을 구하여 (a)의 결과와 비교하라.

Ans) $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,d\tau = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$

컨벌루션에 의해 얻어진 결과와 미분 방정식을 풀어서 얻어진 결과가 같다.

5.15 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템에 대해 계단 신호 $x(t) = u(t)$를 입력으로 인가하였다. 주어진 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

(a) $y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 2$

$\therefore\ y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + 2$

(b) $y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 0$

Ans) (a)의 풀이 과정에서 구한 $y(t)$와 $\dot{y}(t)$에 주어진 초기 조건을 대입하여 정리하면

$\therefore\ y(t) = -e^{-t} + e^{-2t} + 2$

※ (a)의 결과와 비교하면, 같은 시스템에 같은 입력을 넣더라도 초기 조건이 달라지면 시스템의 응답이 달라짐을 알 수 있다. 이러한 차이는 결국 입력이 들어오는 순간에 시스템의 내부에 축적하고 있는 에너지(초기상태)가 달라서 발생한다.

5.16 미분방정식 $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

(a) $x(t) = u(t),\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 1$

$\therefore\ y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + 1$

(b) $x(t) = e^{-3t}u(t),\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + e^{-3t}$

$\therefore\ y(t) = 4e^{-t} - 4e^{-3t} + e^{-3t}$

※ (a)와 (b)의 결과를 비교하면 중요한 사실을 관찰할 수 있다. 초기 조건이 같다 하더라도 입력이 달라지면, 시스템 모드로 구성된 출력의 고유 응답 성분이 달라짐을 볼 수 있다. 이는 입력이 시스템 모드 성분과 강제 응답 성분을 함께 만들기 때문이다.

5.17 미분 방정식 $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음과 같은 입력이 인가될 때 시스템 출력을 구하라. 단 초기 조건은 공통으로 $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1$이다.

(a) $u(t)$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{6}$

$\therefore \; y(t) = \frac{1}{3} e^{-3t} - \frac{1}{2} e^{-4t} + \frac{1}{6}$

(b) $e^{-t} u(t)$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{-t}$

$\therefore \; y(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{2}{3} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{-t}$

(c) $e^{-2t} u(t)$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t}$

$\therefore \; y(t) = e^{-3t} - e^{-4t}$

(d) $e^{-3t} u(t)$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} - t e^{-3t}$

$\therefore \; y(t) = 2e^{-3t} - 2e^{-4t} - t e^{-3t}$

5.18 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템에 대해 주어진 입력과 초기 조건에 의한 출력을 구하라.

(a) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 10x(t), \quad x(t) = 0, \quad y(0^+) = 4, \quad \dot{y}(0^+) = 2$

Ans) $y(t) = y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

$\therefore \; y(t) = \frac{11}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-5t}$

(b) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t), \quad x(t) = e^{-2t} u(t), \quad y(0^+) = 0, \quad \dot{y}(0^+) = 1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t}$

$\therefore \; y(t) = e^{-3t} - e^{-4t}$

(c) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t), \quad x(t) = 4e^{-t} u(t), \quad y(0^+) = 1, \quad \dot{y}(0^+) = 1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + 6t e^{-t}$

$\therefore \; y(t) = -e^{-t} + 2e^{-3t} + 6t e^{-t}$

(d) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t), \quad x(t) = e^{-t} u(t), \quad y(0^+) = 1, \quad \dot{y}(0^+) = -1$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 2t e^{-t}$

$\therefore \; y(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 2t e^{-t}$

5.19 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템에 대해 영입력 응답 $y_s(t)$를 구하라.

(a) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t),\qquad y_s(0)=2,\ \dot{y}_s(0)=-1$

Ans) $\begin{cases} y_s(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t} \\ \dot{y}_s(t)=-2c_1e^{-2t}-3c_2e^{-3t}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=5 \\ c_2=-3\end{cases}$

$\therefore\ y_s(t)=5e^{-2t}-3e^{-3t}$

(b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+9y(t)=3\dfrac{dx(t)}{dt}+2x(t),\qquad y_s(0)=0,\ \dot{y}_s(0)=6$

Ans) $\begin{cases} y_s(t)=c_1e^{j3t}+c_2e^{-j3t} \\ \dot{y}_s(t)=j3c_1e^{j3t}-j3c_2e^{-j3t}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=-j \\ c_2=j\end{cases}$

$\therefore\ y_s(t)=-je^{j3t}+je^{-j3t}=-j(e^{j3t}-e^{-j3t})=2\sin(3t)$

(c) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt},\qquad y_s(0)=3,\ \dot{y}_s(0)=-4$

Ans) $\begin{cases} y_s(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t} \\ \dot{y}_s(t)=-2c_1e^{-2t}+c_2e^{-2t}-2c_2te^{-2t}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=3 \\ c_2=2\end{cases}$

$\therefore\ y_s(t)=3e^{-2t}+2te^{-2t}$

(d) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3}+6\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+11\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt},\qquad y_s(0)=2,\ \dot{y}_s(0)=-1,\ \ddot{y}_s(0)=5$

Ans) $\begin{cases} y_s(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{-3t} \\ \dot{y}_s(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}-3c_3e^{-3t} \\ \ddot{y}_s(t)=c_1e^{-t}+4c_2e^{-2t}+9c_3e^{-3t}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=6 \\ c_2=-7 \\ c_3=3\end{cases}$

$\therefore\ y_s(t)=6e^{-t}-7e^{-2t}+3e^{-3t}$

5.20 다음과 같은 미분 방정식으로 표현되는 전기회로에서 $t=0$ 순간에 스위치에 의해 전원이 분리되었을 때, 즉 $x(t)=0,\ t\geq 0$일 때, 이 회로의 영입력 응답을 구하라. 단 $y(0^-)=0,\ \dot{y}(0^-)=-2$이다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

Ans) 회로에 인가되는 전원이 없다면 영입력 응답만 나타나게 된다.

$y_h(t)=c_1e^{(-1+j1)t}+c_2e^{(-1-j1)t}$

$\therefore\ y_h(t)=j1e^{(-1+j1)t}-j1e^{(-1-j1)t}=2e^{-t}\sin(t)=2e^{-t}\cos(t+\frac{\pi}{2})$

[응용 문제]

5.21 다음에 주어진 (a)의 미분 방정식으로 표현되는 시스템의 계단 응답이 (b)의 시스템의 계단 응답과 같음을 보이라. 그리고 그 이유를 설명하라.

(힌트 : (a)는 $t=0$ 순간의 불연속 관계를 따져 $t=0^+$ 순간의 초기 조건을 구해야 함)

(a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$ (b) $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$

Ans) 시스템 (a)의 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \lambda=-2,\ -3$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{3}$$

계단 응답은 입력만의 출력을 구하는 것이므로 $t=0^-$ 순간의 초기 조건은 모두 0이다. 따라서 경계 조건 정합에 의해 $t=0^+$ 순간의 초기 조건을 구해야 한다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{du(t)}{dt}+2u(t)=\delta(t)+2u(t) \qquad \cdots \quad ①$$

$t=0$에서 우변에 $\delta(t)$가 포함되어 있으므로 좌변 최고차항에 $\delta(t)$가 포함되어야 한다. 즉

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\alpha\delta(t)+\beta u(t)$$

따라서

$$\frac{dy(t)}{dt}=\alpha u(t)+\beta r(t)$$

$y(t)=\alpha r(t)+\beta t^2u(t)$ → 불연속 또는 특이 함수를 포함하지 않음

이들을 ①에 대입하여 정리하면

$$(\alpha\delta(t)+\beta u(t))+5(\alpha u(t)+\beta r(t))+6(\alpha r(t)+\beta t^2u(t))=\delta(t)+2u(t)$$

$t=0$ 순간의 불연속 또는 특이 함수 관계만 고려하면

$$\alpha\delta(t)+(\beta+5\alpha)u(t)=\delta(t)+2u(t)$$

$$\therefore\ \alpha=1,\quad \beta=-3$$

이로부터

$$\begin{cases} y(0^+)-y(0^-)=0 \\ \dot{y}(0^+)-y(0^-)=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \therefore\ \begin{cases} y(0^+)=0 \\ \dot{y}(0^+)=1 \end{cases}$$

$$\therefore\ y(t)=-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$$

시스템 (b)의 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$\lambda+3=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \lambda=-3,$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-3t}+\frac{1}{3}$$

초기 조건은 0이므로

$$\therefore\ y(t)=-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$$

※ 주어진 미분 방정식을 라플라스 변환해서 전달 함수를 구해보면

(a) : $\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+2}{s^2+5s+6}=\frac{1}{s+3}$

(b) : $\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+3}$

즉 시스템 (a)에서는 전달 함수의 극과 영점이 상쇄되어 겉보기에는 $s=-3$의 극만 가지는 시스템이 된다. (다시 말해 e^{-2t}의 시스템 모드가 출력에는 나타나지 않는다.)
따라서 (a)와 (b)는 같은 전달 함수를 가지는 시스템이므로 계단 응답도 같아진다.

5.22 미분 방정식 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=4x(t)$로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

(a) $x(t)=u(t),\ y(0)=2,\ \dot{y}(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+1$

$\therefore\ y(t)=e^{-2t}+4te^{-2t}+1$

(b) $x(t)=e^{-t}u(t),\ y(0)=2,\ \dot{y}(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+4e^{-t}$

$\therefore\ y(t)=-2e^{-2t}+2te^{-2t}+4e^{-t}$

(c) $x(t)=e^{-2t}u(t),\ y(0)=2,\ \dot{y}(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+2t^2e^{-2t}$

$\therefore\ y(t)=2e^{-2t}+6te^{-2t}+2t^2e^{-2t}$

5.23 미분 방정식 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

(a) $x(t)=u(t),\ y(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+1$

$\therefore\ y(t)=e^{-2t}+1$

(b) $x(t)=e^{-t}u(t),\ y(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+2e^{-t}$

$\therefore\ y(t)=2e^{-t}$

(c) $x(t)=u(t)+e^{-t}u(t),\ y(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+2e^{-t}+1$

$\therefore\ y(t)=-e^{-2t}+2e^{-t}+1$

(d) $x(t)=u(t)+e^{-t}u(t),\ y(0)=4$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+2e^{-t}+1$

$\therefore\ y(t)=e^{-2t}+2e^{-t}+1$

※ (c)와 (d)의 결과를 비교하면 중요한 사실을 관찰할 수 있다. 주어진 입력은 (a)의 계단 입력과 (b)의 지수함수 입력을 더한 것이다. 선형성에 의해 이 입력에 대한 출력은 (a)의 출력과 (b)의 출력을 더한 것이 될 거

라고 예상하지만, (c)를 보면 그렇지 않다. (d)처럼 (a)의 초기 조건과 (b)의 초기 조건을 더한 것으로 초기 조건이 주어져야만 선형성을 이용하여 출력을 구할 수 있게 된다. 미분 방정식으로 표현된 LTI 시스템의 출력은 입력에 의한 것(영상태 응답)과 초기 조건에 의한 것(영입력 응답)이 더해진 것임을 주의해야 한다.

(e) $x(t)=e^{-2t}u(t),\ y(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+2te^{-2t}$

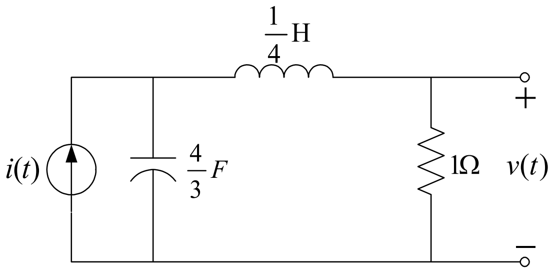
$\therefore\ y(t)=2e^{-2t}+2te^{-2t}$

(f) $x(t)=5\cos(t)u(t),\quad y(0)=2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=ce^{-2t}+4\cos(t)+2\sin(t)$

$\therefore\ y(t)=-2e^{-2t}+4\cos(t)+2\sin(t)$

5.24 다음 그림과 같은 전기회로에 대해 물음에 답하라.



(a) 입력$i(t)$와 출력 $v(t)$의 관계를 나타내는 회로 방정식(미분 방정식)을 구하라.

Ans) $\frac{LC}{R}\frac{d^2v(t)}{dt^2}+C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{R}v(t)=i(t)$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=3i(t)$$

(b) $i(t)=u(t)$이고 시스템이 초기 휴지initially at rest 상태에 있을 때, $v(t)$를 구하라. 초기 휴지 상태는 $t<0$에서 모든 초기 조건이 0임을 뜻한다.

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+1$

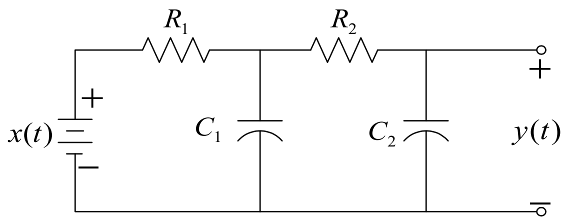
$\therefore\ v(t)=-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}+1$

(c) 시스템이 초기 휴지이고, $i(t)=2(u(t)-u(t-1))$일 때, $v(t)$를 구하라.

Ans) $i(t)=2(u(t)-u(t-1))=2u(t)-2u(t-1)$이므로 중첩의 원리에 의해

$$y(t)=2v(t)u(t)-2v(t-1)u(t-1)$$
$$=\begin{cases}-3e^{-t}+e^{-3t}+2, & 0\le t<1\\ -3(1-e)e^{-t}+(1-e^3)e^{-3t}, & t\ge 1\end{cases}$$

5.25 다음 그림과 같은 전기회로에 대해 물음에 답하라.



(a) 입력 전압 $x(t)$와 출력 전압 $y(t)$의 관계를 나타내는 미분 방정식을 구하라.
단 $R_1R_2C_1C_2=0.5$, $R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2=1.5$이다.

Ans) 키르히호프의 전류 법칙(KCL)을 적용하면

$$\frac{x(t)-v_{C_1}(t)}{R_1}=C_1\frac{dv_{C_1}(t)}{dt}+\frac{v_{C_1}(t)-y(t)}{R_2}$$

$$\frac{v_{C_1}(t)-y(t)}{R_2}=C_2\frac{dy(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad v_{C_1}(t)=R_2C_2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

위 식을 첫 번째 식에 대입하여 정리하면

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$\therefore \ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$$

(b) 입력을 인가하기 직전에 두 커패시터가 각각 10[V]로 충전되어 있다고 한다. 영입력 응답을 구하라.

Ans) $y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

$v_{C_1}(0^-)=10$, $v_{C_2}(0^-)=y(0^-)=10$이므로

$$\frac{v_{C_1}(t)-y(t)}{R_2}=C_2\frac{dy(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \dot{y}(0^-)=0$$

$$\therefore \ y_s(t)=20e^{-t}-10e^{-2t}$$

(c) 두 커패시터 모두 전혀 충전되어 있지 않은 상태에서 입력 전압 10[V]를 인가할 때 출력 전압을 구하라.

Ans) 입력 인가 전의 모든 초기 조건이 0이므로 영상태 응답을 구하는 문제이다.

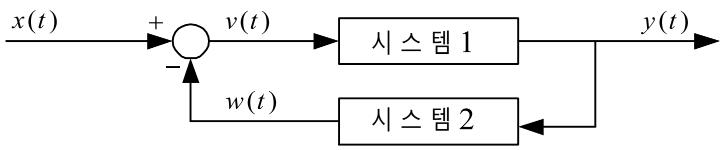
$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+10$$

$$\therefore \ y(t)=-20e^{-t}+10e^{-2t}+10$$

5.26 2개의 시스템이 다음 그림과 같이 서로 연결되어 있다.

시스템 1 : $\frac{dy(t)}{dt}=-3y(t)+v(t)$ ⋯ ①

시스템 2 : $\frac{dw(t)}{dt}=-w(t)+y(t)$ ⋯ ②



(a) 전체 시스템의 입출력 관계를 나타내는 미분 방정식을 구하여라.

Ans) 입력단에서 $v(t)=x(t)-w(t) \quad \rightarrow \quad w(t)=x(t)-v(t)$

$$\therefore \quad \frac{d^2y(t)}{dt}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

(b) 계단 입력($x(t)=u(t)$)에 대한 시스템 출력을 구하라. 단 $y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{5}{2}te^{-2t}+\frac{1}{4}$$

5.27 미분 방정식 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대해 출력을 '영입력 응답+ 영상태 응답' 형태로 구하라.

(a) $x(t)=u(t),\ y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+1$

$$\dot{y}(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}$$

$$\therefore \quad y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+1$$

영상태 응답은 모든 초기 조건을 0이라 두고 미분 방정식의 해를 구하면 된다.

$$\therefore \quad y_i(t)=-2e^{-t}+e^{-2t}+1$$

따라서 앞에서 구한 완전해는 다음과 같이 영입력 응답 + 영상태 응답 형태로 나타낼 수 있다.

$$\therefore \quad y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+1=y_s(t)+y_i(t)=[3e^{-t}-2e^{-2t}]+[-2e^{-t}+e^{-2t}+1]$$

(b) $x(t)=e^{-3t}u(t),\ y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+e^{-3t}$

$$\dot{y}(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}-3e^{-3t}$$

$$\therefore \quad y(t)=4e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t}$$

영상태 응답은 모든 초기 조건을 0이라 두고 미분 방정식의 해를 구하면 된다.

$$\therefore \quad y_i(t)=e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}$$

따라서 앞에서 구한 완전해는 다음과 같이 영입력 응답 + 영상태 응답 형태로 나타낼 수 있다.

$$\therefore \quad y(t)=4e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t}=y_s(t)+y_i(t)=[3e^{-t}-2e^{-2t}]+[e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}]$$

※ 같은 시스템에 같은 초기 조건이 주어졌기 때문에 (a)와 (b)의 영입력 응답은 같고, 입력에 의한 영상태 응답만 달라짐을 알 수 있다.

5.28 다음의 미분 방정식으로 표현된 연속 LTI 시스템에 대해 시스템 응답을 고유 응답+강제 응답 형태로 구하라.

(a) $\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=u(t), \quad y(0)=-2$

Ans) $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=Ce^{-10t}+\frac{1}{10}$

$$\therefore \ y(t) = -\frac{21}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10}$$

(b) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0) = 2$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-10t} + \frac{1}{9}e^{-t}$

$$\therefore \ y(t) = \frac{17}{9}e^{-10t} + \frac{1}{9}e^{-t}$$

(c) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\dfrac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 10u(t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t} + 2$

$$\therefore \ y(t) = -\frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t} + 2$$

(d) $\dfrac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 20\cos(t)u(t), \quad y(0) = -10$

Ans) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-10t} + \frac{200}{101}\cos(t) + \frac{20}{101}\sin(t)$

$$\therefore \ y(t) = -\frac{1210}{101}e^{-10t} + \frac{200}{101}\cos(t) + \frac{20}{101}\sin(t)$$

5.29 다음의 미분 방정식으로 나타낸 연속 시스템의 안정도를 판별하고 그 근거를 밝혀라.

(a) $(D^2 + 7D + 12)y(t) = (D+1)x(t)$

Ans) $\lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda+3)(\lambda+4) = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -3, \ \ \lambda = -4$

특성근이 복소평면의 좌반면에 위치 → 이 시스템은 안정

(b) $(D^2 + D - 2)y(t) = (D-1)x(t)$

Ans) $D-1$항이 약분이 일어나서 입출력 관계는 겉보기에 $(D+2)y(t) = x(t)$인 것처럼 나타난다.

$\lambda + 2 = 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 = -2$

특성근이 복소평면의 좌반면에 위치 → 이 시스템은 안정

(c) $(D+1)(D^2 + 2D + 5)^2y(t) = x(t)$

Ans) $(\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2 = (\lambda+1)(\lambda+1+j2)^2(\lambda+1-j2)^2 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1, \ \ \lambda = -1 \pm j2$

특성근이 복소평면의 좌반면에 위치 → 이 시스템은 안정

(d) $(D+1)(D^2 + 9)y(t) = (D+3)x(t)$

Ans) $(\lambda+1)(\lambda^2 + 9) = (\lambda+1)(\lambda+j3)(\lambda-j3) = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1, \ \ \lambda = \pm j3$

공액 복소근인 특성근이 복소평면의 허축상에 위치 → 이 시스템은 불안정(임계 안정)

(e) $(D+1)(D^2 - 6D + 5)y(t) = (D+1)x(t)$

Ans) $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \ \rightarrow \ \lambda = 1, \ \ \lambda = 5$

특성근이 복소평면의 우반면에 위치 → 이 시스템은 불안정

5.30 다음의 회로 방정식으로 표현되는 LC 공진회로의 임펄스 응답을 구하라.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}y(t)=\frac{1}{L}\frac{dx(t)}{dt}$$

Ans) 입력이 임펄스일 경우 회로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}h(t)=\frac{1}{L}\frac{d\delta(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{1}{L}\dot{\delta}(t), & t=0\\ 0, & t>0\end{cases}$$

먼저 특성 방정식과 특성근을 구하면

$$\lambda^2+\frac{1}{LC}=0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \lambda=\pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}=\pm j\omega_r$$

따라서 임펄스 응답은 다음과 같은 꼴이 된다.

$$h(t)=c_1e^{j\omega_r t}+c_2e^{-j\omega_r t}$$

$t=0$일 때 우변에 $\dot{\delta}(t)$가 있으므로, 좌변에도 $\ddot{h}(t)$에 $\dot{\delta}(t)$가 포함되어야 한다. 이는 $\dot{h}(t)$에 $\delta(t)$가 포함되어야 함을 의미하고, 이는 다시 $h(t)$에 $u(t)$가 포함되어야 함을 의미한다.

$u(t)$는 $t=0$에서 1만큼 불연속을 가진다. 따라서 $h(o^+)-h(0^-)=1/L$이 되고, 이로부터 $h(0^+)=1/L$을 얻는다. 같은 논리를 $\dot{h}(t)$에 적용하면 $\dot{h}(o^+)-\dot{h}(0^-)=0$으로 $\dot{h}(0^+)=0$을 얻게 된다. 이로부터

$$\begin{cases}h(0^+)=c_1+c_2=\frac{1}{L}\\ \dot{h}(0^+)=j\omega_r c_1-j\omega_r c_2=j\omega_r(c_1-c_2)=0\end{cases} \quad \rightarrow \quad c_1=c_2=1/2L$$

$$\therefore\ h(t)=\frac{e^{j\omega_r t}+e^{-j\omega_r t}}{2L}=\frac{1}{L}\cos(\omega_r t)$$