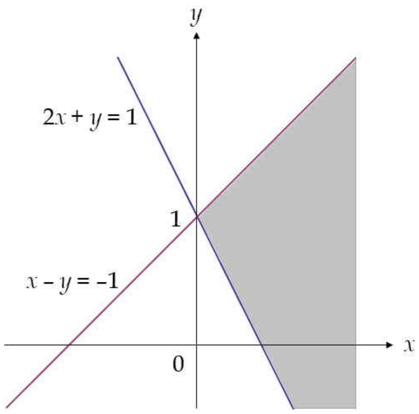
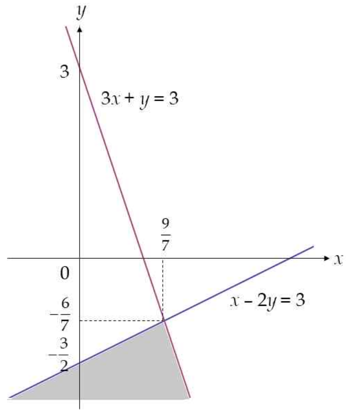
5장_최적화이론 연습문제 풀이

01.

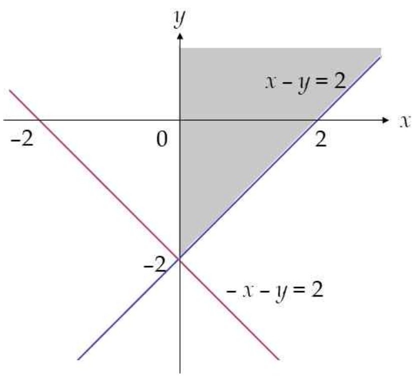
(a)



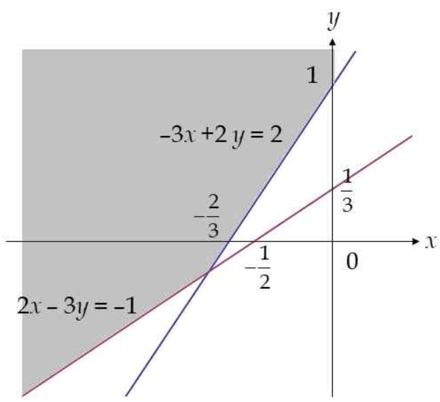
(b)



(c)



(d)



03.

(a) 라그랑주 함수는 다음과 같다.

$$L(x,\, y,\, \lambda) = f(x,\, y) + \lambda g(x,\, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4 + \lambda(x - 2y + 8)$$

라그랑주 함수의 1계 편도함수를 구한다.

$$L_x = 2x + 2 + \lambda, \quad L_y = 2y - 2\lambda, \quad L_\lambda = x - 2y + 8$$

$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$를 만족하는 λ, x, y를 구한다. 우선 식 $L_x = 0$, $L_y = 0$에서

$x = -\dfrac{2+\lambda}{2}$, $y = \lambda$

x, y를 $L_\lambda = 0$에 대입하면 $\lambda = \dfrac{14}{5}$이고, $x = -\dfrac{12}{5}$, $y = \dfrac{14}{5}$를 얻는다.

$f(x,\, y)$의 1계, 2계 편도함수를 구한다.

$$f_x(x,\, y) = 2x + 2, \quad f_y(x,\, y) = 2y$$

$$f_{xx}(x,\, y) = 2, \quad f_{xy}(x,\, y) = 0, \quad f_{yx}(x,\, y) = 0, \quad f_{yy}(x,\, y) = 2$$

$x = -\dfrac{12}{5}$, $y = \dfrac{14}{5}$에서 $f(x, y)$의 헤시안 행렬식과 첫 번째 주소행렬식을 구한다.

$$|H_1| = -\frac{14}{5},\ |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$이므로 극댓값(최댓값) $f\left(-\dfrac{12}{5}, \dfrac{14}{5}\right) = \dfrac{64}{5}$을 갖는다.

(b) 라그랑주 함수는 다음과 같다.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 + \lambda(2 - 3x - 4y)$$

라그랑주 함수의 1계 편도함수를 구한다.

$$L_x = 2x - 3\lambda, \quad L_y = 2y - 4\lambda, \quad L_\lambda = 2 - 3x - 4y$$

$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$를 만족하는 λ, x, y를 구한다. 우선 식 $L_x = 0$, $L_y = 0$에서

$x = \dfrac{3\lambda}{2}$, $y = 2\lambda$

x, y를 $L_\lambda = 0$에 대입하면 $\lambda = \dfrac{4}{25}$이고, $x = \dfrac{6}{25}$, $y = \dfrac{8}{25}$를 얻는다.

$f(x, y)$의 1계, 2계 편도함수를 구한다.

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

$x = \dfrac{6}{25}$, $y = \dfrac{8}{25}$에서 $f(x, y)$의 헤시안 행렬식과 첫 번째 주소행렬식을 구한다.

$$|H_1| = 2,\ |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$이므로 극솟값(최솟값) $f\left(\dfrac{6}{25}, \dfrac{8}{25}\right) = -\dfrac{621}{25}$을 갖는다.

(c) 라그랑주 함수는 다음과 같다.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x + y - 100)$$

라그랑주 함수의 1계 편도함수를 구한다.

$$L_x = y + \lambda, \quad L_y = x + \lambda, \quad L_\lambda = x + y - 100$$

$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$를 만족하는 λ, x, y를 구한다. 식 $L_x = 0$, $L_y = 0$에서

$x = -\lambda$, $y = -\lambda$

x, y를 $L_\lambda = 0$에 대입하면 $\lambda = -50$이고, $x = 50$, $y = 50$를 얻는다.

$f(x, y)$의 1계, 2계 편도함수를 구한다.

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x$$

$$f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = 1, \quad f_{yx}(x, y) = 1, \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

$x = 50$, $y = 50$에서 $f(x, y)$의 헤시안 행렬식과 첫 번째 주소행렬식을 구한다.

$$|H_1| = 0,\ |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$|H_1| = 0$, $|H_2| < 0$ 이므로 $x = 50$, $y = 50$ 에서 $f(x, y)$ 는 안장점이며, 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

(d) 라그랑주 함수는 다음과 같다.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 10 + \lambda(x + 2y - 1)$$

라그랑주 함수의 1계 편도함수를 구한다.

$$L_x = 4x + \lambda, \quad L_y = 2y + 2\lambda, \quad L_\lambda = x + 2y - 1$$

$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$ 를 만족하는 λ, x, y 를 구한다. 우선 식 $L_x = 0$, $L_y = 0$ 에서

$x = -\dfrac{\lambda}{4}$, $y = -\lambda$

x, y 를 $L_\lambda = 0$ 에 대입하면 $\lambda = -\dfrac{4}{9}$ 이고, $x = \dfrac{1}{9}$, $y = \dfrac{4}{9}$ 를 얻는다.

$f(x, y)$ 의 1계, 2계 편도함수를 구한다.

$$f_x(x, y) = 4x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

$x = \dfrac{1}{9}$, $y = \dfrac{4}{9}$ 에서 $f(x, y)$ 의 헤시안 행렬식과 첫 번째 주소행렬식을 구한다.

$$|H_1| = 4, \ |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$ 이므로 극솟값(최솟값) $f\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{4}{9}\right) = -\dfrac{88}{9}$ 을 갖는다.

05.

다음과 같이 의사결정변수를 정의한다.

$x_1 =$ 자정에 근무를 시작하는 소방관

$x_2 =$ 오전 4시에 근무를 시작하는 소방관

$x_3 =$ 오전 8시에 근무를 시작하는 소방관

$x_4 =$ 정오에 근무를 시작하는 소방관

$x_5 =$ 오후 4시에 근무를 시작하는 소방관

$x_6 =$ 오후 8시에 근무를 시작하는 소방관

그러면, 선형계획모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_6 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_2 + x_3 \geq 8 \\ & x_3 + x_4 \geq 8 \end{aligned}$$

$$x_4 + x_5 \geq 6$$
$$x_5 + x_6 \geq 5$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$$

07.

의사결정변수를 다음과 같이 정의한다.

x_{ij} : 창고 i에서 고객사 j로 보내는 부품의 단위 수$(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)$

$$\begin{aligned}
\min\ \ & z = 12x_{11} + 32x_{12} + 23x_{13} + 8x_{21} + 48x_{22} + 38x_{23} \\
\text{s.t.}\ \ & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 70 \quad \text{(공급제약)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100 \\
& x_{11} + x_{21} \geq 25 \quad \text{(수요제약)} \\
& x_{12} + x_{22} \geq 85 \\
& x_{13} + x_{23} \geq 60 \\
& x_{ij} \geq 0 \ \ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}$$

09.

선형계획법의 의사결정 변수로서 산출물 1, 2의 가중치를 u_1, u_2이라 하고 투입물 1, 2, 3의 가중치를 v_1, v_2, v_3라 하자.

[공항 1]

$$\begin{aligned}
\max\ \ & z = 8u_1 + 10u_2 \\
\text{s.t.}\ \ & 5v_1 + 13v_2 + 4v_3 = 1 \\
& -8u_1 - 10u_2 + 5v_1 + 13v_2 + 4v_3 \geq 0 \\
& -5u_1 - 9u_2 + 10v_1 + 8v_2 + 3v_3 \geq 0 \\
& -10u_1 - 12u_2 + 80v_1 + 30v_2 + 8v_3 \geq 0 \\
& u_1 \geq 0.000001 \\
& u_2 \geq 0.000001 \\
& v_1 \geq 0.000001 \\
& v_2 \geq 0.000001 \\
& v_3 \geq 0.000001
\end{aligned}$$

[공항 2]

$$
\begin{array}{llr}
\max & z = 5u_1 + 9u_2 & \\
\text{s.t.} & 10v_1 + 8v_2 + 3v_3 & = 1 \\
& -8u_1 - 10u_2 + 5v_1 + 13v_2 + 4v_3 & \geq 0 \\
& -5u_1 - 9u_2 + 10v_1 + 8v_2 + 3v_3 & \geq 0 \\
& -10u_1 - 12u_2 + 80v_1 + 30v_2 + 8v_3 & \geq 0 \\
& u_1 & \geq 0.000001 \\
& u_2 & \geq 0.000001 \\
& v_1 & \geq 0.000001 \\
& v_2 & \geq 0.000001 \\
& v_3 & \geq 0.000001
\end{array}
$$

[공항 3]

$$
\begin{array}{llr}
\max & z = 10u_1 + 12u_2 & \\
\text{s.t.} & 80v_1 + 30v_2 + 8v_3 & = 1 \\
& -8u_1 - 10u_2 + 5v_1 + 13v_2 + 4v_3 & \geq 0 \\
& -5u_1 - 9u_2 + 10v_1 + 8v_2 + 3v_3 & \geq 0 \\
& -10u_1 - 12u_2 + 80v_1 + 30v_2 + 8v_3 & \geq 0 \\
& u_1 & \geq 0.000001 \\
& u_2 & \geq 0.000001 \\
& v_1 & \geq 0.000001 \\
& v_2 & \geq 0.000001 \\
& v_3 & \geq 0.000001
\end{array}
$$

11.

힉스 수요함수를 구하기 위해서는 특정 효용 수준 $\bar{u}$에서 지출을 최소화해야 하기 때문에 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{l}
\min\ p_x x + p_y y \\
\text{s.t.}\quad xy^2 = \bar{u}
\end{array}
$$

이 문제를 해결하기 위해 라그랑주 함수 $L = p_x x + p_y y + \lambda(\bar{u} - xy^2)$에 대한 1계 편도함수를 구하면 다음과 같다.

$$p_x = \lambda y^2,\ p_y = 2\lambda xy$$

따라서 $2p_x x = p_y y$이고 제약조건을 이용하면, 다음의 힉스 수요함수가 도출된다.

$$x^H = \frac{1}{4^{1/3}} \bar{u}^{1/3} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{2/3},\ y^H = 2^{1/3} \bar{u}^{1/3} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/3} = \frac{2}{4^{1/3}} \bar{u}^{1/3} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/3}$$