6장_적분법 연습문제 풀이

01.

(a) $\int (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C$

(b) $\int (2-4x)\,dx = -2x^2 + 2x + C$

(c) $\int (2x^3 + x - 4)\,dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

(d) $\int (5x^4 + 4x^2 - 2x)\,dx = x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + C$

(e) $u = 2x^2 + 1$ 이라 하면 $x\,dx = \frac{1}{4}du$ 이므로

$$\int \frac{x}{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$$

(f) $u = x^2 + 1$ 이라 하면 $2x\,dx = du$ 이므로

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{1}{u^3}du = \int u^{-3}du = -\frac{1}{2}u^{-2} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)^2} + C$$

(g) $u = x^2 - 2$ 이라 하면 $2x\,dx = du$ 이므로

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{x^2-2} + C$$

(h) $u = x^2 - x + 1$ 이라 하면 $(2x-1)dx = du$ 이므로

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{x^2-x+1} + C$$

(i) $u = 3x + 2$ 이라 하면 $dx = \frac{1}{3}du$ 이므로

$$\int (3x+2)^4 dx = \frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{1}{15}u^5 + C = \frac{(3x+2)^5}{15} + C$$

(j) $u = \frac{x}{4} - 1$ 이라 하면 $dx = 4du$ 이므로

$$\int \left(\frac{x}{4} - 1\right)^{11} dx = 4\int u^{11}du = \frac{1}{3}u^{12} + C = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4} - 1\right)^{12} + C$$

(k) $u = x^2 - 1$ 이라 하면 $x\,dx = \frac{1}{2}du$ 이므로

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

(l) $u = x^3 + 3x - 1$ 이라 하면 $(x^2+1)dx = \frac{1}{3}du$ 이므로

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-1| + C$$

(m) $u = x^3 - 2$이라 하면 $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$이므로

$$\int x^2(x^3-2)\,dx = \frac{1}{3}\int u\,du = \frac{1}{6}u^2 + C = \frac{1}{6}(x^3-2)^2 + C$$

(o) $u = x^2 - x + 2$라 하면 $(2x-1)\,dx = du$이므로

$$\int (2x-1)(x^2-x+2)^5\,dx = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(x^2-x+2)^6 + C$$

(p) $u = x^2 + x$라 하면 $(2x+1)\,dx = du$이므로

$$\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2+x} + C$$

(q) $u = -x^2 + 2x$라 하면 $(x-1)\,dx = -\frac{1}{2}\,du$이므로

$$\int (1-x)e^{-x^2+2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} + C$$

(r) $x^2 - 1$을 반복적으로 미분하면 $2x$, 2, 0이고 e^x을 반복적으로 적분하면 e^x, e^x, e^x이므로

$$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x = (x-1)^2e^x + C$$

(s) $x^2 + x + 1$을 반복적으로 미분하면 $2x+1$, 2, 0이고 e^{-x}을 반복적으로 적분하면 $-e^{-x}$, e^{-x}, $-e^{-x}$이므로

$$\begin{aligned}\int (x^2+x+1)e^{-x}\,dx &= (x^2+x+1)(-e^{-x}) - (2x+1)e^{-x} + 2(-e^{-x}) \\ &= -(x^2+3x+4)e^{-x} + C\end{aligned}$$

03.

(a) $f(x) = \int (2x^2+2x-1)\,dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + C$이므로 $f(1) = \frac{2}{3} + C = 1$, $C = \frac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 곡선은 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}$이다.

(b) $f(x) = \int (x^2-3x+2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$이므로 $f(2) = \frac{2}{3} + C = 1$, $C = \frac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 곡선은 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$이다.

(c) $f(x) = \int (x+e^x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$이므로 $f(0) = 1 + C = 2$, $C = 1$이다. 따라서 구하고자 하는 곡선은 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^x + 1$이다.

(d) $f(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ 이므로 $f(0) = C = 1$ 이다. 따라서 구하고자 하는 곡선은 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ 이다.

05.

(a) 교점의 x 좌표: $x^2 + 2x - 3 = x + 3$ 이면 $x = -3,\ 2$ 이다.

$$S = \int_{-3}^{2} [\,(x+3) - (x^2+2x-3)\,]\,dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

(b) 교점의 x 좌표: $-x^2 + 3x - 1 = x - 1$ 이면 $x = 0,\ 2$ 이다.

$$S = \int_{0}^{2} [\,(-x^2+3x-1) - (x-1)\,]\,dx = \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} = \frac{4}{3}$$

(c) 교점의 x 좌표: $x^2 + 2x - 3 = -x^2 + 1$ 이면 $x = -2,\ 1$ 이다.

$$S = \int_{-2}^{1} [\,(-x^2+1) - (x^2+2x-3)\,]\,dx = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} = 9$$

(d) 교점의 x 좌표: $2x^2 - 3x - 2 = x^2 + x + 3$ 이면 $x = -1,\ 5$ 이다.

$$S = \int_{-1}^{5} [(x^2+x+3) - (2x^2-3x-2)]\,dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5} = 36$$

07.

(a) $P(X \le 4) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{0}^{4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(b) $P(3 \le X \le 5) = \int_{3}^{5} \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x}{10}\right]_{2}^{5} = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$

(c) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{10} x f(x)\,dx + \int_{10}^{\infty} x f(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{10} \frac{x}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_{0}^{10} = 5$$

(d) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (x-5)^2 f(x)\,dx + \int_{0}^{10} (x-5)^2 f(x)\,dx + \int_{10}^{\infty} (x-5)^2 f(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{10} \frac{(x-5)^2}{10}\,dx = \left[\frac{1}{30}(x^3 - 15x^2 + 75x)\right]_{0}^{10} = \frac{25}{3}$$

09.

만약 $d < q$이면 비용은 $10q - 25d$이고 $d \geq q$이면 비용은 $10q - 25q$이다. 따라서, $c_0 = 10$(천 원)이고 $c_u = 15$(천 원)이다. 그러면 다음을 만족시키는 q^*를 주문해야 한다.

$$P(D \leq q^*) = \frac{15}{(10+15)} = 0.6$$

이 식을 표준화시키면,

$$P(Z \leq \frac{q^* - 100}{30}) = 0.6$$

결과적으로 $F(0.25) = 0.6$이기 때문에 $\frac{q^* - 100}{30} = 0.25$이며, $q^* = 107.5$(개)

11.

① 1잔에 50원씩 50잔 값을 지불하므로 실제 지불금액은 2,500원이다.

② 수요함수를 구한다. $x = 100 - p$ 이므로 수요함수는 $p(x) = 100 - x$ 이다.

$$CS = \int_0^{50} [p(x) - 50]\,dx = \int_0^{50} [(100 - x) - 50]\,dx$$

$$= \left[50x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{50} = 2500 - 1250 = 1250(\text{원})$$

결과적으로 실제 지불금액 $= 2{,}500$원이고 소비자 잉여 $= 1{,}250$원이다.