4장_편미분 연습문제 풀이

01.

(a) $z_x = 2x+1$, $z_y = -2y+1$

(b) $z_x = 4x+y$, $z_y = 2y+x$

(c) $z_x = -\dfrac{2x}{(x^2+2y^2)^2}$, $z_y = -\dfrac{4y}{(x^2+2y^2)^2}$

(d) $z_x = -\dfrac{1}{(x-y)^2}$, $z_y = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

(e) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(f) $z_x = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}}$, $z_y = -\dfrac{1}{2y^2\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}}$

(g) $z_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z_y = 2ye^{x^2+y^2}$

(h) $z_x = (2x+1)e^{x^2+y^2+x-y}$, $z_y = (2y-1)e^{x^2+y^2+x-y}$

(i) $z_x = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2+xy}$, $z_y = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2+xy}$

(j) $z_x = \dfrac{x^2+y^2}{x(x^2-y^2)}$, $z_y = \dfrac{x^2+y^2}{y(y^2-x^2)}$

(k) $z_x = (x+y+1)e^{x+y}$, $z_y = (x+y+1)e^{x+y}$

(l) $z_x = \dfrac{y(e^y+e^x-xe^x)}{(e^x+e^y)^2}$, $z_y = \dfrac{x(e^x+e^y-ye^y)}{(e^x+e^y)^2}$

03.

(a) $f(x, y) = x^2y^2+2x-1$이므로 $f_x(x, y) = 2x+2$, $f_y(x, y) = 2y$, $f_x(1, 1) = 4$, $f_y(1, 1) = 2$이다. 접평면의 방정식 : $z-3 = 4(x-1)+2(y-1)$ 또는 $z = 4x+2y-3$

(b) $f(x, y) = x^2-y^2-2x+2y+1$이므로 $f_x(x, y) = 2x-2$, $f_y(x, y) = -2y+2$, $f_x(1, -1) = 0$, $f_y(1, -1) = 4$이다. 접평면의 방정식 : $z+3 = 0(x-1)+4(y+1)$ 또는 $z = 4y+1$

(c) $f(x, y) = 2x^2+3y^2-xy$이므로 $f_x(x, y) = 4x-y$, $f_y(x, y) = -x+6y$, $f_x(1, 1) = 3$, $f_y(1, 1) = 5$이다. 접평면의 방정식 : $z-4 = 3(x-1)+5(y-1)$ 또는 $z = 3x+5y-4$

(d) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + x + y + 1$ 이므로 $f_x(x, y) = 6x + 1$, $f_y(x, y) = -4y + 1$, $f_x(0, 1) = 1$, $f_y(0, 1) = -3$ 이다. 접평면의 방정식 : $z - 0 = 1(x-0) + (-3)(y-1)$ 또는 $z = x - 3y + 3$

05.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy + y^2)(2t) + (x^2 + 2xy)(2)$$

$$= [2(t^2)(2t) + (2t)^2](2t) + [(t^2)^2 + 2(t^2)(2t)](2) = 2t^3(5t + 8)$$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2t$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}(2t) + \frac{2y}{x^2 + y^2}(2t)$$

$$= \frac{2(t^2+1)(2t)}{(t^2+1)^2 + (t^2-1)^2} + \frac{2(t^2-1)(2t)}{(t^2+1)^2 + (t^2-1)^2} = \frac{4t^3}{1 + t^4}$$

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 2$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}(1) + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}(2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3t-1}} + \frac{1}{\sqrt{3t-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3t-1}}$$

(d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y}$, $\dfrac{dx}{dt} = 2$, $\dfrac{dy}{dt} = -2$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = e^{x-2y}(2) - 2e^{x-2y}(-2)$$

$$= 2e^{6t-7} + 4e^{6t-7} = 6e^{6t-7}$$

07.

(a) $f(x, y) = x^3y - xy^3 - x - y$ 이라 하면 $f_x(x, y) = 3x^2y - y^3 - 1$, $f_y(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 1$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{3x^2y - y^3 - 1}{x^3 - 3xy^2 - 1}$ 이다.

(b) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-x+y$이라 하면 $f_x(x,y)=\dfrac{x^2-x^2y-y^2}{x^2y}$, $f_y(x,y)=\dfrac{-x^2+xy^2+y^2}{xy^2}$이

므로 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{\dfrac{x^2-x^2y-y^2}{x^2y}}{\dfrac{-x^2+xy^2+y^2}{xy^2}}=\dfrac{y(x^2-x^2y-y^2)}{x(-x^2+xy^2+y^2)}$이다.

(c) $f(x,y,z)=xyz+x^2z+y^2z-x-y+z$이라 하면 $f_x(x,y,z)=yz+2xz-1$,

$f_y(x,y,z)=xz+2xz-1$, $f_z(x,y,z)=xy+x^2+y^2+1$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{yz+2xz-1}{xy+x^2+y^2+1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{xz+2xz-1}{xy+x^2+y^2+1}$$

(d) $f(x,y,z)=e^{xyz}-x-y-z$이라 하면 $f_x(x,y,z)=-1+yze^{xyz}$,

$f_y(x,y,z)=-1+xze^{xyz}$, $f_z(x,y,z)=-1+xye^{xyz}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=\dfrac{1-yze^{xyz}}{-1+xye^{xyz}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=\dfrac{1-xze^{xyz}}{-1+xye^{xyz}}$

09.

(a) ① 이익함수를 x와 y에 관해 편미분을 하여 0으로 놓자.

$$\frac{\partial\pi}{\partial x}=10+y-2x=0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial y}=10+x-2y=0$$

② x와 y에 대해 풀어 임계점을 구한다.

$$y=2x-10,\ x=2y-10$$

따라서 $x=10,\ y=10$이다.

③ 최댓값인지 최솟값인지를 확인하기 위해 2차 편미분을 한다.

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}=-2,\ \frac{\partial^2\pi}{\partial yx}=1,$$

$$D=\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial y\partial x}\right)^2=(-2)(-2)-(1)^2=3>0$$

결과적으로, $D>0$이고 $\dfrac{\partial^2\pi}{\partial x^2}=-2<0$이기 때문에 위의 값은 극댓값이다.

따라서 $x=10,\ y=10$이고 이차 편미분 값이 0보다 작기 때문에 이 값은 극댓값이다.

11.

① MP_L과 MP_K를 구한다.

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = -\frac{1}{\theta}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}-1}(1-\alpha)(-\theta)L^{-\theta-1}$$

$$= (1-\alpha)L^{-\theta-1}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{\frac{-1-\theta}{\theta}}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = -\frac{1}{\theta}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}-1}(\alpha)(-\theta)K^{-\theta-1}$$

$$= \alpha K^{-\theta-1}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{-\frac{1+\theta}{\theta}}$$

② $MRTS$를 구한다.

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{(1-\alpha)L^{-(\theta+1)}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{-\frac{1+\theta}{\theta}}}{\alpha K^{-\theta-1}\left[\alpha K^{-\theta} + (1-\alpha)L^{-\theta}\right]^{-\frac{1+\theta}{\theta}}}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{\theta+1}$$

③ $\dfrac{d(MRTS)}{d(K/L)}$를 구한다. $\dfrac{d(MRTS)}{d(K/L)} = (\theta+1)\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\theta}$

④ 대체탄력성을 구한다.

$$\sigma = MRTS\left(\frac{L}{K}\right)\frac{1}{d(MRTS)/d(K/L)}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{\theta+1}\frac{L}{K}\frac{1}{(\theta+1)\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\theta}}$$

$$= \left(\frac{K}{L}\right)^{\theta+1-\theta}\frac{L}{K}\frac{1}{\theta+1} = \frac{1}{\theta+1}$$

13.

위 함수의 균형가격과 양은 이미 아래와 같음을 알고 있다.

$$P^* = \frac{a+c}{b+d},\ Q^* = \frac{ad-bc}{b+d}$$

P^*를 a에 대해 편미분하면, $\dfrac{\partial P^*}{\partial a} = \dfrac{1}{b+d} > 0$이므로 a가 증가하면(감소하면) P^*는 증가한다(감소한다).

P^{*}를 b에 대해 편미분하면, $\frac{\partial P^{*}}{\partial b}=\frac{0(b+d)-1(a+c)}{(b+d)^{2}}=\frac{-(a+c)}{(b+d)^{2}}<0$이므로 b가 증가하면(감소하면) P^{*}는 감소한다(증가한다).

P^{*}를 c에 대해 편미분하면, $\frac{\partial P^{*}}{\partial c}=\frac{1}{b+d}>0$이므로 c가 증가하면(감소하면) P^{*}는 증가한다(감소한다).

이 P^{*}를 d에 대해 편미분하면, $\frac{\partial P^{*}}{\partial d}=\frac{0(b+d)-1(a+c)}{(b+d)^{2}}=\frac{-(a+c)}{(b+d)^{2}}<0$이므로 d가 증가하면(감소하면) P^{*}는 감소한다(증가한다).

15.

(a) $M_x=\frac{\partial u}{\partial x}=0.4x^{0.4-1}y^{0.6}=0.4x^{-0.6}y^{0.6}$, $M_y=\frac{\partial u}{\partial y}=0.6x^{0.4}y^{0.6-1}=0.6x^{0.4}y^{-0.4}$

(b)

(i) ① u_x, u_y를 구한다. $u_x=ax^{a-1}y^{b}$, $u_y=bx^{a}y^{b-1}$

② $\frac{dy}{dx}$를 구한다. $\frac{dy}{dx}=-\frac{u_x}{u_y}=-\frac{ax^{a-1}y^{b}}{bx^{a}y^{b-1}}=-\frac{ay}{bx}$

③ 한계대체율 $\left|\frac{dy}{dx}\right|$를 구한다. $MRS=\frac{ay}{bx}$이다.

(ii) ① u_x, u_y를 구한다. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b}{y}$

② $\frac{dy}{dx}$를 구한다. $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}=-\frac{a/x}{b/y}=-\frac{ay}{bx}$

③ 한계대체율 $\left|\frac{dy}{dx}\right|$를 구한다. $MRS=\frac{ay}{bx}$이다.

결과적으로 ① $MRS=\frac{ay}{bx}$, ② $MRS=\frac{ay}{bx}$