한빛아카데미 Hanbit Academy, Inc.

3장_미분법 연습문제 풀이

01.

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3)=3$

(b) $\lim_{x\to 1}(x^3-x)=0$

(c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{27}$

(d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}=\dfrac{5}{2}$

(e) $\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)=4$ 이므로 $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{4}=2$

(f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\lim_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-1}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(g) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\dfrac{1}{6}$

(h) $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}=\lim_{x\to 8}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\dfrac{1}{3}$

(i) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$

(j) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x/3}=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{1/9}=\ln e^{1/9}=\dfrac{1}{9}$

(k) $x=-t$ 라 하면, $x\to 0^-$ 일 때 $t\to 0^+$ 이고 $-x=t$ 이므로

$$\lim_{x\to 0^-}(1-x)^{1/x}=\lim_{t\to 0^+}(1+t)^{-1/t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(1+t)^{1/t}}=\frac{1}{e}$$

(l) $\lim_{x\to 1}e^{(1-x)/(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}e^{-1/(x+1)}=e^{-1/2}=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(m) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=(-1)\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}e^{(1-x)/(x^2-1)}=1$

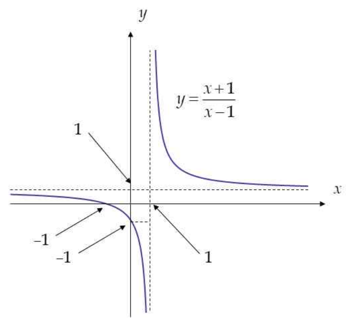
(n) $\lim_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x-2)]=\lim_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x+1}{x-2}=\ln 2$

(o) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+2}{2}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{2/x}\right]^{1/2}=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$$

03.

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ 이므로 함수 $y=f(x)$는 다음 그림과 같이 $y=\dfrac{2}{x}$를 y축의 양의 방향으로 1만큼 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프다.



(a) $x\to\infty$ 이면 $\dfrac{1}{x}\to 0$ 이므로 $\dfrac{x+1}{x-1}\to 1$ 이고 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ 이다.

(b) $x\to-\infty$ 이면 $\dfrac{1}{x}\to 0$ 이므로 $\dfrac{x+1}{x-1}\to 1$ 이고 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ 이다.

(c) $x\to 1^-$ 이면 $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ 이므로 $\dfrac{x+1}{x-1}\to-\infty$ 이고 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ 이다.

(d) $x\to 1^+$ 이면 $\dfrac{1}{x}\to\infty$ 이므로 $\dfrac{x+1}{x-1}\to\infty$ 이고 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$ 이다.

05.

(a) $f(x)=x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ 이므로 $f(3/2)=-\dfrac{1}{4}$, $f(-1)=6$, $f(3)=2$ 이다. 따라서 최댓값은 6이고 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$ 이다.

(b) $f(x)=-x^2-x+2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ 이므로 $f(1/2)=\dfrac{9}{4}$, $f(-4)=-10$, $f(4)=-18$ 이다. 따라서 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$ 이고 최솟값은 -18 이다.

07.

(a) $f(0)=0$ 이고 $x<0$ 이면 $|x|=-x$ 이므로 $f(x)=0$, $x>0$ 이면 $|x|=x$ 이므로 $f(x)=2x$ 이다.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0-0}{h}=0,\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h-0}{h}=2$$ 이므로

$x=0$ 에서 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(b) $f(0)=0$ 이고 $x<0$ 이면 $|x|=-x$ 이므로 $f(x)=-x^2$ 이고 $x>0$ 이면 $|x|=x$ 이므로 $f(x)=x^2$ 이다. $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-h)=0$, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}(h)=0$ 이므로 $x=0$ 에서 $f(x)$는 미분가능하다.

09.

(a) $f'(x)=2x-2$

(b) $f'(x)=3x^2+1$

(c) $f'(x)=(x^2+2)+(x-3)(2x)=3x^2-6x^2+2$

(d) $f'(x)=(3x^2)(x^2+2x+2)+(x^3-1)(2x+2)=5x^4+8x^3+6x^2-2x-2$

(e) $f'(x)=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-1)(1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

(f) $f'(x)=\dfrac{(1)(x^2+1)-(x-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

(g) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{(x^2-1)(x^4+1)}{x^3}$ 이므로

$$f'(x)=\frac{(6x^5-4x^3+2x)(x^3)-(x^2-1)(x^4+1)(3x^2)}{(x^3)^2}=\frac{(3x^4-4x^2+3)(x^2+1)}{x^4}$$

(h) $f'(x)=\dfrac{(8x^7+6x^5-2x)(x^4)-(x^2+1)(x^6-1)(4x^3)}{(x^4)^2}=\dfrac{2(2x^8+x^6+x^2+2)}{x^5}$

(i) $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x)(e^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(j) $f'(x)=2xe^{2x}+x^2(2e^{2x})=2x(x+1)e^x$

(k) $u=x^2-x+2$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=2x-1$ 이고 $y=e^u$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=e^u(2x-1)=(2x-1)e^{x^2-x+2}$$

(l) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$

(m) $u=\dfrac{x}{x^2+2}$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ 이고 $y=\ln u$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2+2}{x}\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{-x^2+2}{x(x^2+2)}$$

(n) $u = x^2 - 1$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = 2x$이고 $y = \sqrt{u}$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(o) $u = \dfrac{x+1}{x}$이라 하면 $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$이고 $y = \sqrt{u}$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

11.

(a) 양변을 x에 관해 미분하면 $y + xy' + 2yy' = 2x + 2y'$, $y' = \dfrac{2x-y}{2y+x-2}$이므로 $(0, 2)$에서 접선의 기울기는 $m = \left[\dfrac{2x-y}{2y+x-2}\right]_{\substack{x=0\\y=2}} = -1$이고 접선의 방정식은 $y = -x+2$이다.

(b) 양변을 x에 관해 미분하면 $2yy' + 6xy + 3x^2y' + 2x = 0$, $y' = -\dfrac{2x(1+3y)}{3x^2+2y}$이므로 $(1, -1)$에서 접선의 기울기는 $m = \left[-\dfrac{2x(1+3y)}{3x^2+2y}\right]_{\substack{x=1\\y=-1}} = 4$이고 접선의 방정식은 $y = 4x-3$이다.

(c) 양변을 x에 관해 미분하면 $2x + 2yy' = y + xy'$, $y' = \dfrac{2x-y}{x-2y}$이므로 $(1, -1)$에서 접선의 기울기는 $m = \left[\dfrac{2x-y}{x-2y}\right]_{\substack{x=1\\y=0}} = 2$이고 접선의 방정식은 $y = 2x+3$이다.

13.

(a) $y' = 3x^2$이므로 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2} = 1 = 3x^2$, 즉 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

(b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 $\dfrac{f(4)-f(0)}{4} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 즉 $x = 1$이다.

(c) $y' = -\dfrac{x}{(x+2)^2}$이므로 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{3} = \dfrac{1}{2} = -\dfrac{x}{(x+2)^2}$, 즉 $x = -3+\sqrt{5}$이다.

15.

(a) $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x+1)(x-3)$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = -1,\ 0,\ 3$이다.

(i) $x < -1$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

(ii) $-1 < x < 0$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(iii) $0 < x < 3$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

(iv) $x > 3$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(v) 극솟값 $f(-1) = -7$, $f(3) = -135$, 극댓값 $f(0) = 0$

(b) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12 = 6(x+1)(x+2)$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = -2,\ -1$이다.

(i) $x < -2$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $-2 < x < -1$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

(iii) $x > -1$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(iv) 극솟값 $f(-1) = -3$, 극댓값 $f(-2) = -2$

(c) 정의역은 $x = 0$을 제외한 모든 실수이다. $f'(x) = \dfrac{16}{x^2} + 2x = \dfrac{2(8+x^3)}{x^2}$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = -2$이다.

(i) $x < -2$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

(ii) $-2 < x < 0$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(iii) $x > 0$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(iv) 극솟값 $f(-2) = 12$

(d) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x) = 0$인 점은 $x = 0$이다.

(i) $x < 0$이면 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x > 0$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

(iii) 극댓값 $f(0) = 1$

17.

(a) 경제적주문량 모델에 의해 $D = 4{,}000$(개), $h = 1{,}000 \times 15\% = 150$(원), $K = 100$(원)이므로

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{(2)(100)(4{,}000)}{150}} \approx 73.02(\text{개})$$이다.

(b) $TC(q^*) = \dfrac{100 \times 4{,}000}{73.02} + (1{,}000 \times 4{,}000) + \dfrac{150 \times 73.02}{2} \approx 4{,}010{,}954$원이다.

19.

(a) 평균비용과 한계비용을 구하고 최솟값을 구한다.

[평균비용]

① 평균비용을 구한다. $AC = \dfrac{TC}{Q} = \dfrac{Q^3 - 24Q^2 + 600Q}{Q} = Q^2 - 24Q + 600$

② 임계점을 구한다. $\dfrac{dAC}{dQ} = 2Q - 24 = 2(Q - 12) = 0;\ Q = 12$

③ 2계 도함수판정법을 이용하여 극값을 구한다.

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(2Q - 24) = 2 > 0;\ Q = 12 \text{에서 극소(최소)}$$

④ 최솟값을 구한다. $AC(12) = (12)^2 - 24(12) + 600 = 456$

[한계비용]

① 한계비용을 구한다. $MC = \dfrac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 48Q + 600$

② 임계점을 구한다. $\dfrac{dMC}{dQ} = 6Q - 48 = 6(Q - 8) = 0;\ Q = 8$

③ 2계 도함수판정법을 이용하여 극값을 구한다.

$$\frac{d^2MC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(6Q - 48) = 6 > 0;\ Q = 8 \text{에서 극소(최소)}$$

④ 최솟값을 구한다. $MC(8) = 3(8)^2 - 48(8) + 600 = 408$

결과적으로 평균비용의 최솟값은 Q = 12일 때 456이고 한계비용의 최소값은 Q = 8일 때 408이다.

(b) ① 총수입함수를 구한다. $TR(Q) = QP = Q\left(6 - \dfrac{1}{2}Q\right) = 6Q - \dfrac{1}{2}Q^2$

② 임계점을 구한다. $TR'(Q) = 6 - Q = 0;\ Q = 6$

③ 2계 도함수판정법을 이용하여 극값을 구한다.

$$TR''(Q) = -1 < 0;\ Q = 6 \text{에서 극대(최대)}$$

④ 총수입을 구한다. $TR(6) = 6(6) - \dfrac{(6)^2}{2} = 36 - 18 = 18$

결과적으로 극대화 생산수준은 Q = 6에서 총수입이 18이다.

(c) 이익함수 $P(Q)$를 구하고, 극댓값을 구한다.

① 이익함수를 구한다.

$$P(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 100Q - 0.01Q^2 - 60Q - 10000$$

$$= -0.01Q^2 + 40Q - 10000$$

② 임계점을 구한다. $P'(Q) = -0.02Q + 40 = 0;\ Q = 2000$

③ 2계 도함수판정법을 이용하여 극값을 구한다.

$$P''(Q) = -0.02 < 0;\ Q = 2000 \text{에서 극대(최대)}$$

④ 총수입을 구한다. $P(2000) = -0.01(2000)^2 + 50(2000) - 10000 = 30000$(화폐단위)

결과적으로 생산량 = 2,000, 최대 이익 = 30,000이다.

(d) ① 임계점을 구한다.

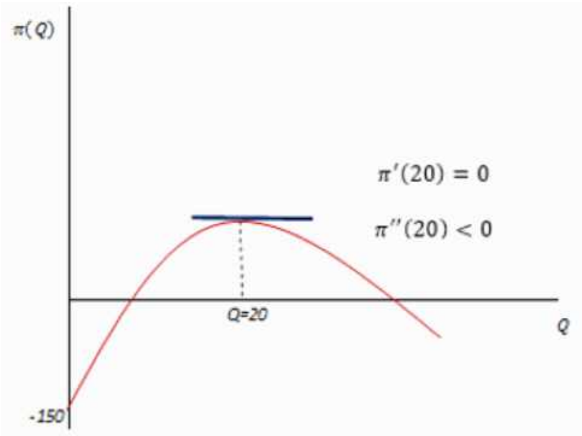
$$\pi'(Q) = -Q^2 - 4Q + 480 = -(Q+24)(Q-20) = 0;\ Q = -24,\ Q = 20;$$

$$Q > 0 \text{이므로 } Q = 20$$

② 2계 도함수판정법을 이용하여 극값을 구한다.

$$\pi''(Q) = -2Q - 4;\ \pi''(20) = -2(20) - 4 = -44 < 0;\ Q = 20 \text{에서 극대(최대)}$$

결과적으로 최적 생산량 = 20이다.



21.

변화가 발생하기 전 균형가격은 40이고 균형량은 $1{,}000$이다. 그러나 새로운 수요함수와 공급함수를 이용한 균형가격은 40, 균형량은 $1{,}600$이다. 결과적으로, 균형량은 600이 증가하였고 가격은 40으로 고정되었다. 결과적으로 새로운 균형가격은 40, 균형량은 $1{,}600$이다.

23.

(a) $\Delta I = 300 - 250 = 50$, $\Delta Q_d = 35 - 30 = 5$이므로 수요의 소득탄력성은 다음과 같다.

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta Q_d / Q_d}{\Delta I / I} = \frac{5/30}{50/250} \approx 0.83$$

따라서 수요의 소득탄력성이 0.83이고, 소득탄력성이 0과 1 사이에 존재하므로 이 재화는 필수재이다.

(b) ① 재화 B의 수요변화율과 재화 A의 가격변화율을 구한다.

재화 B의 수요변화율 : $\dfrac{-5}{50} = -0.1$

재화 A의 가격변화율 : $\frac{500}{10000} = 0.05$

② 재화 B의 수요의 교차탄력성을 구한다. $\varepsilon_c = \frac{-0.1}{0.05} = -2$

③ 수요의 교차탄력성이 음의 부호를 갖기 때문에 보완재이다.

결과적으로 재화 B의 수요의 교차탄력성 $\varepsilon_c = \frac{-0.1}{0.05} = -2$이므로 보완재이다.