한빛아카데미 Hanbit Academy, Inc.

1장_기초수학 연습문제 풀이

01.

(a) 0은 자연수가 아니므로 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

(b) $A=\{3,\ 6,\ 9\}$

(c) $A=\{-10,\ -5,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

(d) 제곱수가 1보다 크고 10보다 작은 정수는 $(\pm 2)^2=4$, $(\pm 3)^2=9$이므로 $A=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3\}$

03.

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $C=\{1,\ 4,\ 9\}$이므로 구하고자 하는 집합은 다음과 같다.

(a) $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$

(b) $A\cap C=\{4\}$

(c) $B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(d) $B\cap C=\varnothing$

(e) $(A\cup B)\cap C=\{4\}$

(f) $(A\cap B)\cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 9\}$

(g) $(A\cup B)^c=\{1,\ 9\}$

(h) $(A\cap C)^c=U$

05.

(a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)+1=\dfrac{1}{x^2-1}+1=\dfrac{x^2}{x^2-1}$이고, 정의역은 분모가 0이 될 수 없으므로 $x=-1$, 1이 아닌 모든 실수의 집합이다.

(b) $(g\circ g)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{[f(x)]^2-1}=\dfrac{1}{(x+1)^2-1}=\dfrac{1}{x(x+2)}$이고, 정의역은 분모가 0이 될 수 없으므로 $x=0$, -2가 아닌 모든 실수의 집합이다.

07.

(a) $x=0$이면 $y=-1$이고 $y=0$이면 $x^2-2x-1=0$으로부터 근의 공식에 의해 x를 구하면 $x=1\pm\sqrt{2}$를 얻는다. 따라서 x축 절편은 $x=1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$이고 y축 절편은 $y=-1$이다. 주어진 함수를 완전제곱식으로 변형하면 $y=(x-1)^2-2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -2)$이고 최솟값은 $f(1)=-2$이다.

(b) $x=0$이면 $y=4$이고 $y=0$이면 $x^2+4x+4=(x+2)^2=0$으로부터 $x=-2$를 얻는다. 따라서 x축 절편은 $x=-2$이고 y축 절편은 $y=4$이다. 주어진 함수를 완전제곱식으로 변형하면 $y=(x+2)^2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 0)$이고 최솟값은 $f(-2)=0$이다.

(c) $x=0$이면 $y=5$이고 $y=0$이면 $-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5)=0$으로부터 $x=-1$, $x=5$를 얻는다. 따라서 x축 절편은 $x=-1$, $x=5$이고 y축 절편은 $y=5$이다. 주어진 함수를 완전제곱식으로 변형하면 $y=-(x-2)^2+9$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, 9)$이고 최댓값은 $f(2)=9$이다.

(d) $x=0$이면 $y=-6$이고 $y=0$이면 $-2x^2+8x-6=-2(x-3)(x-1)=0$으로부터 $x=1$, $x=3$을 얻는다. 따라서 x축 절편은 $x=1$, $x=3$이고 y축 절편은 $y=-6$이다. 주어진 함수를 완전제곱식으로 변형하면 $y=-2(x-2)^2+2$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$이고 최댓값은 $f(2)=2$이다.

09.

(a) 분모와 분자를 n으로 나누면 일반항은 $a_n=\dfrac{2-5(1/n)}{1+(1/n)}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$이므로 주어진 수열은 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5(1/n)}{1+(1/n)}=2$이다.

(b) $(-2)^{n-1}$은 $+$ 부호와 $-$ 부호가 반복되면서 절댓값이 한없이 커지므로 발산한다.

(c) 분모와 분자를 n^2으로 나누면 일반항은 $a_n=\dfrac{1-3(1/n)+5(1/n^2)}{1+2(1/n)-(1/n^2)}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$이므로 주어진 수열은 수렴하고 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+5}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3(1/n)+5(1/n^2)}{1+2(1/n)-(1/n^2)}=1$$

(d) 무리수 e의 정의에 따라 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$이다. 지수법칙에 의해 주어진 수열의 일반항을 $\left\{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n/3}\right\}^3$으로 변형할 수 있다. 따라서 주어진 수열은 수렴하며, 그 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n/3}\right\}^3=e^3$$

(e) 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $r=\frac{1}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$이다. 따라서 주어진 수열은 수렴하며, $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$이다.

(f) $(-1)^n$은 $-$부호와 $+$부호가 반복되지만 절댓값이 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 주어진 수열은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$이다.

11.

(a) $\log_3 e+\ln 9-\log_9 4=\frac{\ln e}{\ln 3}+\ln 3^2-\frac{\ln 2^2}{\ln 3^2}=\frac{1}{\ln 3}+2\ln 3-\frac{\ln 2}{\ln 3}$

$$=\frac{1+2(\ln 3)^2-\ln 2}{\ln 3}=\frac{(1+2\ln 3)(-1+\ln 3)}{\ln 3}$$

(b) $\log_2 16+\log_9 27-\ln 4=\frac{\ln 2^4}{\ln 2}+\frac{\ln 3^3}{\ln 3^2}-\ln 2^2=4+\frac{3}{2}-2\ln 2=\frac{11}{2}-2\ln 2$

13.

이 회사의 손익분기점은 공헌이익이 고정원가 1억 원이 되는 판매량이다.

① 단위당 공헌이익을 구한다. 즉, $1000-600=400$ (원)이다.

② 1억원의 공헌이익을 얻기 위한 손익분기점 판매량을 구한다.

$$\frac{10\text{억 원}}{400\text{원}}=250{,}000(\text{개})$$

③ 손익분기점 매출액을 구한다.

$$\frac{\text{고정원가}}{\text{공헌이익률}}=\frac{\text{고정원가}}{1-\text{변동비율}}=\frac{1\text{억 원}}{1-0.6}=2\text{억 }5\text{천만 원}$$

15.

(a) 3년 말 원리금은 $P(1+rn)$이므로 $40{,}000{,}000(1+(0.045\times 3))=45{,}400{,}000$이고 원금을 제외한 이자는 $45{,}400{,}000-40{,}000{,}000=5{,}400{,}000$원이다.

(b) 3년 말 원리금은 $P(1+rn)$이므로 $20{,}000{,}000(1+(0.15\times 3))=29{,}000{,}000$원이다.

17.

(a) 현재가치를 계산하는 $P = \frac{A(n)}{(1+r)^n} = \frac{FV}{(1+r)^n}$ 을 이용하면 $\frac{1{,}000{,}000}{(1+0.04)^3} \approx 888{,}996$원이다.

(b) 연복리는 1년에 한번 복리 이자율을 계산하지만 분기복리는 연 이자율을 4로 나눈 이자율을 복리 이자율로 해 1년에 4번 이자가 붙는 것으로 계산하는 방식이다. 따라서, $\frac{2{,}000{,}000}{(1+\frac{0.04}{4})^{(4\times 10)}} \approx 1{,}343{,}306$원이다.

19.

은행 A의 순현재가치는 $NPV = PV - P_0 = -P_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(1+r)^i}$ 을 적용하면,

$-1{,}000{,}000 + \frac{30}{1+0.05} + \frac{40}{(1+0.05)^2} + \frac{50}{(1+0.05)^3} = 80{,}444$원이고 은행 B의 순현재가치는

$-1{,}000{,}000 + \frac{40}{1+0.05} + \frac{40}{(1+0.05)^2} + \frac{40}{(1+0.05)^3} = 89{,}300$원이다. 따라서, 은행 B의 순현재가치가 투자원금을 제외하고 $89{,}300$원으로 은행 A의 순현재가치 $80{,}444$원보다 크기 때문에 은행 B에 투자해야 한다.

21.

(a) $PV = \frac{P}{r}$ 를 이용하면, $\frac{10{,}000{,}000}{0.07} \approx 142{,}857{,}142$원이다.

(b) 성장영구연금의 현재가치 계산식인 $\frac{\text{이자지급액}}{\text{복리} - \text{성장률}} = \frac{1{,}000{,}000}{0.15 - 0.06} \approx 11{,}111{,}111$원이다.

23.

(a) 전년 대비 성장률을 계산하면 아래 표와 같다.

년도	매출액	수익금	전년도 대비 성장률
2021	10		
2022	20	10	$\frac{10}{10}=1\,(100\%)$
2023	25	5	$\frac{5}{20}=0.25\,(25\%)$
2024	30	5	$\frac{5}{25}=0.2\,(20\%)$
2025	50	20	$\frac{20}{30}=0.67\,(67\%)$

(b) $\frac{1}{4}(1+0.25+0.2+0.67)=0.53$이므로 산술평균 $=53\%$이다.

(c) $CAGR=\sqrt[4]{(1+1)(1+0.25)(1+0.2)(1+0.67)}-1\approx 0.4954$로서 49.54%이다. 결론적으로 산술평균에 의한 평균 성장률이 $CAGR$에 비해 1.07배 과장된다.

25.

(a) 수요와 공급이 일치하는 식 $-2P+20=2P-10$에서 $P=30/4$, $Q_d=-2(\frac{30}{4})+20=5$이다. 따라서, 최적 시장가격 $=7.50$, 최적 수량 $=5$이다.

(b) 최적 시장가격이 7.50인데 $P=8$이면 최적 시장가격보다 높기 때문에 공급초과이다.

27.

(a) 5월의 단순이동평균법에 의한 예측치 = $\frac{5+4+4}{3}=4.3333$, 6월의 단순이동평균법에 의한 예측치 = $\frac{4.3333+4+5}{3}=4.4444$이다.

(b) 5월의 가중이동평균법에 의한 예측치 $=5\times0.4+4\times0.3+4\times0.2+3\times0.1=4.3$이고 6월의 가중이동평균법에 의한 예측치 $4.3\times0.4+5\times0.3+4\times0.2+4\times0.1=4.42$이다.

(c) $F_t=F_{t-1}+\alpha(X_{t-1}-F_{t-1})=100+0.3(110-100)=103$이다.