한빛아카데미 Hanbit Academy, Inc.

2장_행렬과 행렬식 연습문제 풀이

01.

(a) $\|\mathrm{a}\| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

(b) $\|\mathrm{b}\| = \sqrt{2^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{38}$

(c) $\|\mathrm{c}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$

(d) $\|\mathrm{d}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2+2^2} = \sqrt{10}$

03.

(a) $A-2B=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&-1&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&5\\0&3&0\\-4&-4&-7\end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{2}A-B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&-1&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\\0&\frac{3}{2}&0\\-2&-2&-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

(c) $2A-\frac{1}{2}B=2\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&-1&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&5&\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}\\-1&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$

(d) $-A+\frac{1}{2}B=-\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&-1&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$

05.

(a) $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = (-1, 0, -2) \cdot (1, 4, -2) = (-1)(1) + (0)(4) + (-2)(-2) = 3$

(b) $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = (1, 3, -1) \cdot (1, 2, 1) = (1)(1) + (3)(2) + (-1)(1) = 6$

07.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 이므로 $\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3$은 일차독립이다.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$ 이므로 $\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3$은 일차종속이다.

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 17$ 이므로 $\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3$은 일차독립이다.

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 이므로 $\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3$은 일차종속이다.

09.

(a) $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_{13}(-2)]{R_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_{23}]{R_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_{23}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_{31}(-3)]{R_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 9 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $(B|\,I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{13}(-4)]{R_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

B^{-1}가 존재하지 않는다.

11.

(a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4,\quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4,\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad C^t = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,\quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad C^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix},\quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

13.

(a) 계수행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-3&1\\2&1&2\end{pmatrix}$, 계수행렬의 역행렬 $A^{-1}=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}-7&-1&11\\4&-4&-4\\5&3&-1\end{pmatrix}$

상수항 벡터 $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, 해벡터 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\mathrm{b}=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}-7&-1&11\\4&-4&-4\\5&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-3\\-4\\9\end{pmatrix}$

해 $x=-\dfrac{3}{8}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{9}{8}$

(b) 계수행렬 $A=\begin{pmatrix}4&-3&2\\1&2&-4\\-1&3&-2\end{pmatrix}$, 계수행렬의 역행렬 $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}8&0&8\\6&-6&18\\5&-9&11\end{pmatrix}$

상수항 벡터 $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$, 해벡터 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\mathrm{b}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}8&0&8\\6&-6&18\\5&-9&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}56\\42\\-1\end{pmatrix}$

해 $x=\dfrac{7}{3}$, $y=\dfrac{7}{4}$, $z=-\dfrac{1}{24}$

(c) 계수행렬 $A=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\2&-3&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$, 계수행렬의 역행렬 $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-7&-9&-10\\-5&-9&-8\\1&3&4\end{pmatrix}$

상수항 벡터 $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$, 해벡터 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\mathrm{b}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-7&-9&-10\\-5&-9&-8\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix}$

해 $x=0$, $y=-1$, $z=0$

(d) 계수행렬 $A=\begin{pmatrix}2&-4&3\\-1&3&-1\\4&1&-2\end{pmatrix}$, 계수행렬의 역행렬 $A^{-1}=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}5&5&5\\6&16&1\\13&18&-2\end{pmatrix}$

상수항 벡터 $\mathrm{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$, 해벡터 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\mathrm{b}=\begin{pmatrix}5&5&5\\6&16&1\\13&18&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-20\\-14\\3\end{pmatrix}$

해 $x=-\dfrac{4}{5}$, $y=-\dfrac{14}{25}$, $z=\dfrac{3}{25}$

15.

(a) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda=0;\ \lambda=0,5$

$\lambda=0$ 이면 $(A-0I)\mathrm{x}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\\mathrm{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2\\2\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 $2x_1+x_2=0$ 이다. $x_2=2$ 이면

$x_1=-1$ 이고 고유벡터는 $\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda = 5$ 이면 $(A+5I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+2x_2 \\ 2x_1-4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $-x_1+2x_2=0$ 이다.

$x_2=1$ 이면 $x_1=2$ 이고 고유벡터는 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

(b) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-2=0;\ \lambda=1,\ -2$

$\lambda=1$ 이면 $(A-I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1+2x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $x_1-x_2=0$ 이다.

$x_2=1$ 이면 $x_1=1$ 이고 고유벡터는 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda=-2$ 이면 $(A+2I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $x_1+2x_2=0$ 이다.

$x_2=1$ 이면 $x_1=-2$ 이고 고유벡터는 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

(c) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+\lambda^2+2\lambda=0;\ \lambda=0,\ -1,\ 2$

$\lambda=0$ 이면 $(A-0I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $x_1+x_3=0$,

$x_2=0$ 이다. $x_3=1$ 이면 $x_1=-1$ 이고 고유벡터는 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda=-1$ 이면 $(A+I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $x_2+x_3=0$,

$x_1+x_2+x_3=0$, $2x_1+x_2+x_3=0$ 이다. $x_3=1$ 이면 $x_2=-1$, $x_1=0$ 이고 고유벡터는

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda=2$ 이면 $(A-2I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+x_2+x_3 \\ x_1-2x_2+x_3 \\ x_2-2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $x_2-2x_3=0$,

$-x_1+x_2+x_3=0$, $x_1-2x_2+x_3=0$ 이다. $x_3=1$ 이면 $x_2=2$, $x_1=3$ 이고 고유벡터는

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

(d) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-6=0;\ \lambda=1,\ \pm\sqrt{6}$

$\lambda=1$ 이면 $(A-I)\mathrm{x}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-3&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\\mathrm{x}_2\\\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_1-3\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 $x_2=0$,

$x_1-3x_2+2x_3=0, x_1+2x_3=0$ 이다. $x_3=1$ 이면 $x_1=-2$ 이고 고유벡터는 $\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda=\sqrt{6}$ 이면

$(A-\sqrt{6}I)\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{6}&0&2\\1&-2-\sqrt{6}&2\\0&1&1-\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\\mathrm{x}_2\\\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2-\sqrt{6})\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_1-(2+\sqrt{6})\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_2+(1-\sqrt{6})\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 이므로

$(2-\sqrt{6})x_1+2x_3=0,\ x_1-(2+\sqrt{6})x_2+2x_3=0,\ x_2+(1-\sqrt{6})x_3=0$ 이다. $x_3=1$ 이면

$x_2=-1+\sqrt{6},\ x_1=2+\sqrt{6}$ 이고 고유벡터는 $\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2+\sqrt{6}\\-1+\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$ 이다.

$\lambda=-\sqrt{6}$ 이면

$(A+\sqrt{6}I)\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2+\sqrt{6}&0&2\\1&-2+\sqrt{6}&2\\0&1&1+\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\\mathrm{x}_2\\\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+\sqrt{6})\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_1-(2-\sqrt{6})\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_3\\\mathrm{x}_2+(1+\sqrt{6})\mathrm{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 이므로

$(2+\sqrt{6})x_1+2x_3=0,\ x_1-(2-\sqrt{6})x_2+2x_3=0,\ x_2+(1+\sqrt{6})x_3=0$ 이다. $x_3=1$ 이면

$x_2=-1-\sqrt{6},\ x_1=2-\sqrt{6}$ 이고 고유벡터는 $\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{6}\\-1-\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$ 이다.

17.

각 행과 열이 A, B, C, D라면, 방향을 갖는 좌우대칭이 아닌 다음의 행렬이 정의된다.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

19.

다음의 절차를 따르면 된다.

① A의 고윳값을 구한다.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\frac{-60\lambda^3+180\lambda^2+49}{60}=0;\quad \lambda\approx 3.0857$$

② A의 가장 큰 고윳값을 선택한다. $\lambda_{\max}=3.0857$

③ $\lambda_{\max}=3.0857$에 대해 $|A-\lambda I|=0$을 만족하는 방정식을 구한다.

$$(A-3I)W=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ \frac{1}{5} & -2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$-2w_1+\frac{1}{4}w_2+\frac{1}{2}w_3=0,\ 4w_1-2w_2+2w_3=0,\ 2w_1+\frac{1}{2}w_2-2w_3=0$$

④ ③에서 얻은 방정식과 $w_1+w_2+w_3=1$을 만족하는 해를 구한다.

$$w_1\approx 0.6738,\ w_2\approx 0.1006,\ w_3\approx 0.2255$$

결과적으로 각 가중치 $w_1\approx 0.6738,\ w_2\approx 0.1006,\ w_3\approx 0.2255$이다.

21.

① 연립방정식을 다음과 같이 재배열한다.

$$Y-C=I_0+G_0,\ -bY+C=a$$

② 계수행렬식과 변수에 대응하는 행렬식을 구한다.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}=1-b,\ |A_y|=\begin{vmatrix} I_0+G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}=I_0+G_0+a,$$

$$|A_c|=\begin{vmatrix} 1 & I_0+G_0 \\ -b & a \end{vmatrix}=a+b(I_0+G_0)$$

③ 해를 구한다.

$$Y^*=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{I_0+G_0+a}{1-b},\ C^*=\frac{|A_c|}{|A|}=\frac{a+b(I_0+G_0)}{1-b}$$

결과적으로 $Y^*=2{,}000,\ C^*=1{,}700$이다.