

푸리에 변환의 응용

책의 ‘1절 필터링’과 관련해서는 입문 수준을 벗어나는 내용은 이 책의 커버 범위를 벗어나므로 추가적인 설명을 따로 제시하지 않았다.

책의 ‘2절 샘플링’과 관련하여 먼저 후처리 필터의 명칭과 기능에 대한 보충 설명을 덧붙였고, 양자화 및 양자화 오차와 부호화에 대해 상세한 설명을 추가하였다. 그리고 샘플링의 기능과 그로 인해 야기되는 문제들에 대한 설명을 보충하고, 샘플링의 임펄스 변조 모델의 결과 유도에 대한 다른 접근 방법을 보였다. 또한 주파수 중첩과 관련하여 상세한 설명과 함께 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기의 차이를 명확히 알 수 있도록 하였으며, 이해를 도울 수 있는 예제들을 추가로 제시하였다.

이를 통해 샘플링이 야기하는 문제점, 특히 주파수 중첩 및 복원 신호 사이의 관계에 대해 보다 잘 이해할 수 있을 것이다.

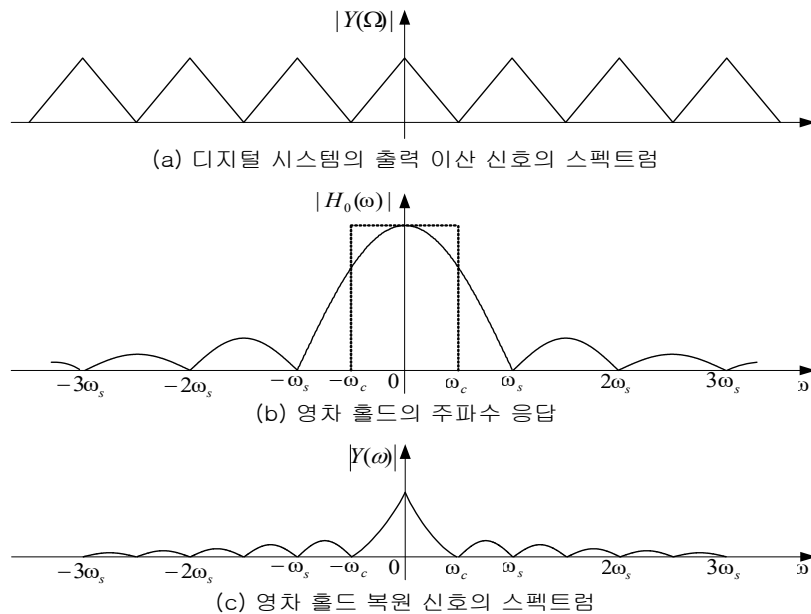
마지막으로 푸리에 변환이 활용되는 주요한 응용의 하나인 진폭 변조와 관련한 내용을 3절로 새롭게 추가하여 제시하였다. 더 상세한 내용을 알고 싶다면 통신 이론 서적을 참조하면 될 것이다.

9.2 샘플링

9.2.1 연속 신호의 디지털 처리 시스템

후처리 필터

후처리 필터는 영차 홀드를 이용해 복원된 연속 신호에 남아있는 고주파 성분을 제거한다. [그림 C9-1]에서 보면, 영차 홀드의 주파수 응답의 부엽^{side lobe}에 의해 (a)의 (샘플링 주파수 정수배에 위치한) 기저 대역 스펙트럼의 측대역 허상들이 (c)와 같이 완전히 제거되지 않는다. 이를 제거하여 파형을 평활화하므로 허상 제거^{anti-imaging} 또는 평활화 필터라고 한다. 후처리 필터 역시 전처리 필터와 마찬가지로 저역 통과 필터이다.

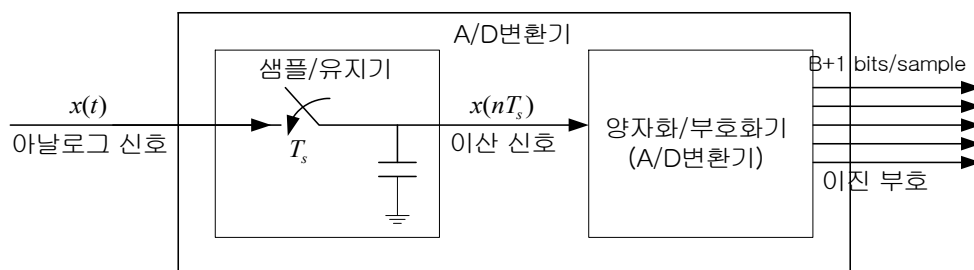


[그림 C9-1] 영차 홀드 복원 신호의 고주파 성분 허상

9.2.2 A/D 변환 - 디지털 신호의 생성

실제 A/D 변환기는 샘플링 동작을 담당하는 샘플/유지기(S/H)^{Sample-and-Hold}와 연속적인 값을 B 비트의 이진 부호로 바꾸는 양자화 및 부호화의 기능을 하나의 칩으로 만들거나 별도의 모듈로 분리하기도 하며, 카운터형 A/D 변환기, 시그마-델타 A/D 변환기 등 여러 가지 방식이 있다. A/D변환기의 기본적인 구성은 [그림 C9-2]와 같다.

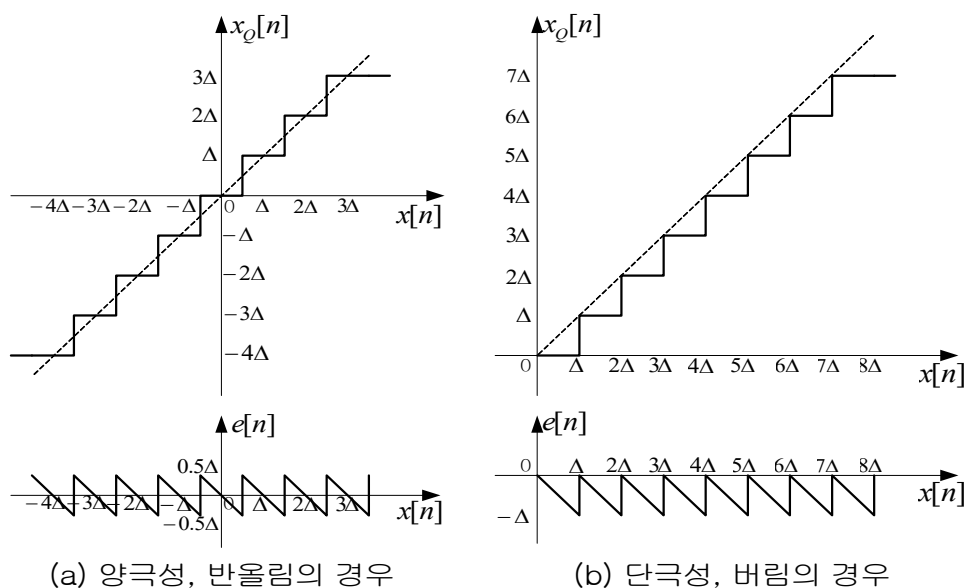
A/D변환기에서 만약 샘플/유지기가 없다면 최소한 양자화에 걸리는 시간의 반이 넘는 동안 아날로그 입력 신호의 값이 변하지 않아야 무리 없이 디지털 신호로 변환될 수 있는데, 이러한 제한은 비현실적이다. 따라서 샘플/유지기가 필요하다. 특히 대역폭이 큰 신호(이런 신호는 시간에 대한 값의 변화가 빠르다는 것을 상기하라!)를 큰 비트 수로 고해상도 A/D 변환을 할 경우에는 매우 치명적이다.



[그림 C9-2] A/D 변환기의 기본 구성

양자화

양자화는 [그림 C9-3]에 보인 것처럼 신호의 극성에 따라 단극성과 양극성, 자르기 근사 rounding 방식에 따라 반올림이나 버림 방식으로 구분된다.



[그림 C9-3] 신호의 3비트 균일 양자화 및 양자화 오차

일반적으로 양자화는 [그림 C9-3]과 같이 양자화 레벨이 균일한 간격으로 분포하는 균일 양자화(선형 양자화)가 일반적이지만, 신호의 특성에 따라 구간을 각기 다른 길이로 나누는 불균일(비선형) 양자화 방법이 사용되기도 한다. 신호 값의 전 범위가 R 인 이산 신호 $x[n]$ 을 균일 양자화에 의해 B 비트 디지털 신호로 변환하는 경우, 같은 양자화 레벨 값 $x_Q[n]$ 로 환산되는 $x[n]$ 값의 범위는 $\Delta = R/2^B$ 가 된다. Δ 는 양자화에 의해 구분될 수 있는 신호의 최소 구간 값으로 양자화 간격 또는 양자화 분해능(해상도) ^{resolution}이라고 한다.

양자화 오차

원 신호에 대한 양자화 오차의 영향은 **신호 대 잡음비(SNR)** ^{Signal to Noise Ratio}를 사용하여 정량적으로 분석할 수 있다. 신호 대 잡음비는 다음과 같이 dB로 표시된 신호와 잡음의 전력 비로 정의된다.

$$SNR = 10 \log \frac{P_x}{P_e} \quad (C9.1)$$

그런데 양자화 오차는 불규칙적일 뿐만 아니라 독립적이므로 확률 변수로 간주하여 양자화에 들어오는 잡음 모델로 표현할 수 있다. 그러면 양자화 오차는 양자화 잡음 모델의 평균, 분산, 확률밀도 함수 등과 같은 통계량을 이용하여 분석할 수 있게 된다. 한편 실제 실무에서 다루는 다수의 아날로그 신호는 그 값이 대부분 평균 부근에 몰려 있으며, 평균에서 멀어질수록 발생 빈도가 급격히 감소하는 추세를 보인다. 따라서 일반적으로 $\sigma_x = R/8$ 나 $\sigma_x = R/6$ 을 주로 사용한다. 여기서 R 은 신호가 값을 가질 수 있는 전 범위 구간이고, σ_x 는 아날로그 신호의 표준 편차이다. 그러면 양자화 오차의 SNR은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$SNR = \begin{cases} 6.02B - 1.25, & \sigma_x = R/8 \\ 6.02B + 1.25, & \sigma_x = R/6 \end{cases} \quad (C9.2)$$

식 (C9.2)에서 우변의 $\pm 1.25[\text{dB}]$ 항은 입력 신호의 특성에 의해 좌우되는 값이며, **양자화기의 성능과 직결되는 것은 바로 $6.02B[\text{dB}]$ 항**이라고 할 수 있다. 이 항은 1비트 늘어날 때마다 SNR이 6[dB] 정도 개선됨을 의미하는 것으로, **양자화기의 동적 구간** dynamic range이라고 부른다. 동적 구간은 양자화기의 성능을 표시할 때 널리 사용된다.

부호화

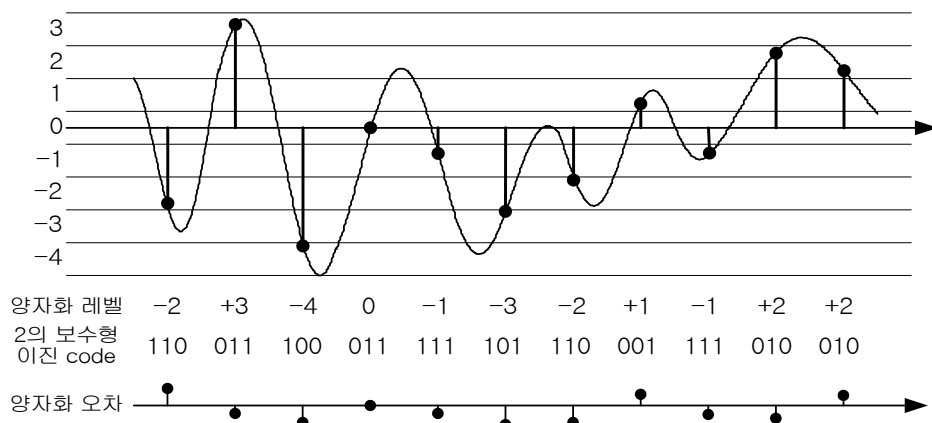
[표 C9-1]에 3비트 양극성 양자화 경우의 부호화 예를 나타냈다. 상세한 내용은 컴퓨터 개론이나 디지털 시스템 등의 관련 서적들을 참조하기 바란다.

[표 C9-1] 양극성 반올림 양자화에 의한 이진 코드

신호 값 ($-1 \leq x[n] < 1$)		양자화 레벨	부호부 크기	2의 보수형
반올림	버림			
$0.625 \leq x[n] < 1.000$	$0.75 \leq x[n] < 1.00$	+3(0.75)	0 1 1	0 1 1
$0.375 \leq x[n] < 0.625$	$0.50 \leq x[n] < 0.75$	+2(0.50)	0 1 0	0 1 0
$0.125 \leq x[n] < 0.375$	$0.25 \leq x[n] < 0.50$	+1(0.25)	0 0 1	0 0 1
$-0.125 \leq x[n] < 0.125$	$0.00 \leq x[n] < 0.25$	0(0.00)	0 0 0 1 0 0	0 0 0
$-0.375 \leq x[n] < -0.125$	$-0.25 \leq x[n] < 0.00$	-1(-0.25)	1 0 1	1 1 1
$-0.625 \leq x[n] < -0.375$	$-0.50 \leq x[n] < -0.25$	-2(-0.50)	1 1 0	1 1 0
$-0.875 \leq x[n] < -0.625$	$-0.75 \leq x[n] < -0.50$	-3(-0.75)	1 1 1	1 0 1
$-1.000 \leq x[n] < -0.875$	$-1.00 \leq x[n] < -0.75$	-4(-1.00)		1 0 0

[그림 C9-4]는 양극성 반올림 양자화와 3비트 2의 보수형 이진 코드 부호화를 이용하여 아날로그 신호를 디지털 신호로 A/D 변환하는 예를 보인 것이다. 그림에서 끝의 두 샘플은

똑같이 양자화 레벨 +2에 해당하는 010으로 양자화/부호화되지만 양자화 오차의 값은 서로 다르다.



[그림 C9-4] 양극성 반올림 3비트 2의 보수형 A/D 변환

■ 예제 C9-1 : 양극성 양자화를 이용한 2의 보수형 이진 부호화

$-10 \leq x[n] \leq 10$ 인 이산 신호 $x[n]$ 에 대해 다음의 값들을 양극성 반올림 양자화를 이용한 3비트 2의 보수형 2진 부호화를 하고 양자화 오차를 구하라.

$$x[n] = 4.5 \quad x[n] = 6.2 \quad x[n] = -8.4 \quad x[n] = -6.3$$

<풀이>

$x[n]$ 의 값을 10으로 나누어 규준화하면 [표 C9-1]을 그대로 활용할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} x[n] = 4.5 &\rightarrow x_Q[n] = 0.50 \text{ \& } x_b[n] = 010, & e[n] &= (0.50 - 0.45) \times 10 = 0.5 \\ x[n] = 6.2 &\rightarrow x_Q[n] = 0.50 \text{ \& } x_b[n] = 010, & e[n] &= (0.50 - 0.62) \times 10 = -1.2 \\ x[n] = -8.4 &\rightarrow x_Q[n] = -0.75 \text{ \& } x_b[n] = 101, & e[n] &= (-0.75 + 0.84) \times 10 = 0.9 \\ x[n] = -6.3 &\rightarrow x_Q[n] = -0.75 \text{ \& } x_b[n] = 101, & e[n] &= (-0.75 + 0.63) \times 10 = -1.2 \end{aligned}$$

실제 값이 달라도 같은 코드로 부호화되기도 하며, 이에 따라 양자화 오차 값도 차이가 날 수 있다. ■

9.2.4 샘플링의 수학적 분석과 샘플링 정리

임펄스 열 변조 모델

샘플링의 임펄스 샘플링 모델에서 얻은 결과인 (책)식 (9.21)은 책에서 제시한 것과 다른 방법으로 유도할 수 있다.

임펄스 신호의 푸리에 급수 전개에 의한 푸리에 계수는 다음과 같고

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (\text{C9.3})$$

주기 신호 $x_{T_s}(s)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 되므로

$$X_{T_s}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C9.4})$$

(책)식 (9.17)에 쓰인 임펄스 열의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C9.5})$$

(책)식 (9.17)의 임펄스열 변조 모델은 주파수 영역에서 푸리에 변환의 성질에 의해 두 신호의 스펙트럼의 컨벌루션이 되므로, 샘플링 결과 얻어진 신호의 스펙트럼은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned} \quad (\text{C9.6})$$

샘플링 정리와 주파수 중첩

새넨의 샘플링 정리는 연속 신호에 대해 나이퀴스트 샘플링 주파수 이상으로 샘플링하게 되면 원래 신호의 복원이 가능하다고 말하고 있다. 이 조건을 정현파에 적용해보면 **한 주기에 2개 이상의 샘플을 취하면 원래 정현파를 복원할 수 있다**는 얘기가 된다. 샘플링 주기에 서 규정하는 충분한 빠르기로 샘플링을 하지 않으면 어떤 일이 생길까?

9.2.3절에서 보았듯이, 주파수가 $f_0 + lf_s$ 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링하면 모두 같은 이산 신호를 얻게 된다. 이는 거꾸로 하나의 이산 정현파 신호로부터 되돌아갈 수 있는 연속 정현파가 무수히 많다는 얘기가 된다. 그런데 (책)[그림 9-17]에서 보듯이, 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 하게 되면 원래 신호의 스펙트럼이 f_s 의 정수배마다 반복하여 나타나기 때문에, 저역 통과(LP) 필터를 이용하여 기저 대역에 있는 주파수가 가장 낮은 스펙트럼만 뽑아내는 것이 샘플링 정리에서 제시하는 신호의 복원 원리이다.

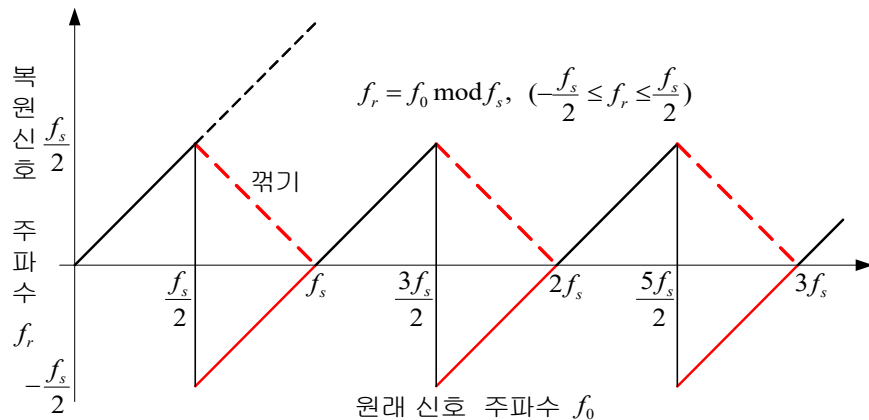
그러므로, 주파수 f_0 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 할 때 과연 어떤 주파수가 가장 낮은 주파수에 해당되는지 차근차근 따져보기로 하자.

먼저 샘플링 정리를 만족하는 경우($f_s \geq 2f_0$)를 살펴보자. $f_0 \leq f_s/2$ 이므로 $|f_0 + lf_s| \geq f_0$

($l = \dots -1, 0, 1 \dots$)가 되어 가장 낮은 주파수는 f_0 가 된다. 그러므로 LP 필터로 복원되는 정현파는 주파수가 f_0 인 원래의 정현파이다.

다음으로 샘플링 정리를 만족시키지 못하는 경우 중에서 $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 일 때를 살펴보자. 앨리어스 중에 $f_0 - f_s$ ($|f_0 - f_s| \leq f_s/2 \leq f_0$)가 기저 대역 내의 가장 낮은 주파수가 되므로 LP 필터를 이용하여 하나의 정현파만 뽑아내면 음의 주파수 $f_0 - f_s$ 를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다. 그런데 물리적으로 음의 주파수는 없으므로, 실제로는 $f_s - f_0$ 의 주파수를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다(단 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 에 의해 사인파는 부호가 바뀐다).

원래 신호의 주파수와 복원되는 신호의 주파수 관계를 그래프로 그려보면, [그림 C9-5]에 나타난 것처럼 $0 \leq f_0 \leq f_s/2$ 구간에서는 복원 신호의 주파수 f_r 가 그대로 f_0 이 되지만, $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 구간에서는 복원 신호의 주파수는 $f_0 - f_s$ 로서 음인데도 붉은 점선으로 나타난 것처럼 양의 주파수 $f_s - f_0$ 로 복원된다. 그런데 이것은 원래 신호의 주파수 f_0 선을 $f_s/2$ 에서 꺾어서 접은 것과 같다. 그러므로 이를 주파수 꺾기(frequency folding)라고 한다. **주파수 꺾기는 음의 주파수를 갖는 앨리어스에 의한 주파수 중첩 현상으로서 위상 반전이 발생한다.**



[그림 C9-5] 주파수 중첩과 꺾기

$f_0 \geq f_s$ 의 경우에는 $|f_0 - lf_s| (\leq f_s/2)$ 를 만족하는 $f_0 - lf_s$ 가 기저 대역에 놓이는 가장 낮은 주파수의 앨리어스이므로 이 정현파로 복원된다. 따라서 그림에서 보듯이 $f_0 - lf_s$ 가 $f_s/2$ 보다 큰지 작은지에 따라 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기가 교대로 나타난다. 즉 $0 \leq f_0 \leq f_s$ 구간의 패턴이 f_s 주기로 반복된다.

이상의 결과를 정리하면, (책)식 (9.23)과 같이 복원 신호의 주파수 f_r 은 결국 다음과 같이 원래 신호 주파수 f_0 를 샘플링 주파수 f_s 로 나눈 나머지로 수식화되는 것이다.

$$f_r = f_0 \bmod f_s \quad -f_s/2 \leq f_r \leq f_s/2 \quad (\text{책})(9.23)$$

일반적으로 [그림 C9-5]의 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기를 모두 합하여 넓은 의미로 주파수 중첩 현상이라고 하며, 스펙트럼의 겹침에 의한 신호의 왜곡을 가져온다. 그러나 이를 자세히 분석해보면, 앞의 설명과 같이 두 가지 원인이 작용하는 결과인 것이다. 특히 주파수 꺾기의 경우에는 위상 반전이 발생한다는 사실은 (협의의) 주파수 중첩과는 차이는 성질로서 주의해야 한다.

(책)식 (9.23)과 [그림 C9-5]에서 알 수 있듯이, **복원 신호의 주파수는 결코 $f_s/2$ 보다 클 수 없다. 그러므로 샘플링 정리에 충실하게 샘플링 주파수를 신호 주파수의 2배 이상으로 선정해야만 주파수 중첩에 의한 혼란을 피하고 원래 신호로 복원할 수 있게 된다.**

■ 예제 C9-2 : 정현파의 복원 - 샘플링 주파수에 따른 주파수 중첩

정현파 $x(t) = \cos \pi t$ 를 샘플링한 후 이상적인 저역 통과 필터를 이용하여 연속 신호로 복원할 때, 샘플링 주파수에 따라 복원 신호가 어떻게 달라지는지 설명하라.

<풀이>

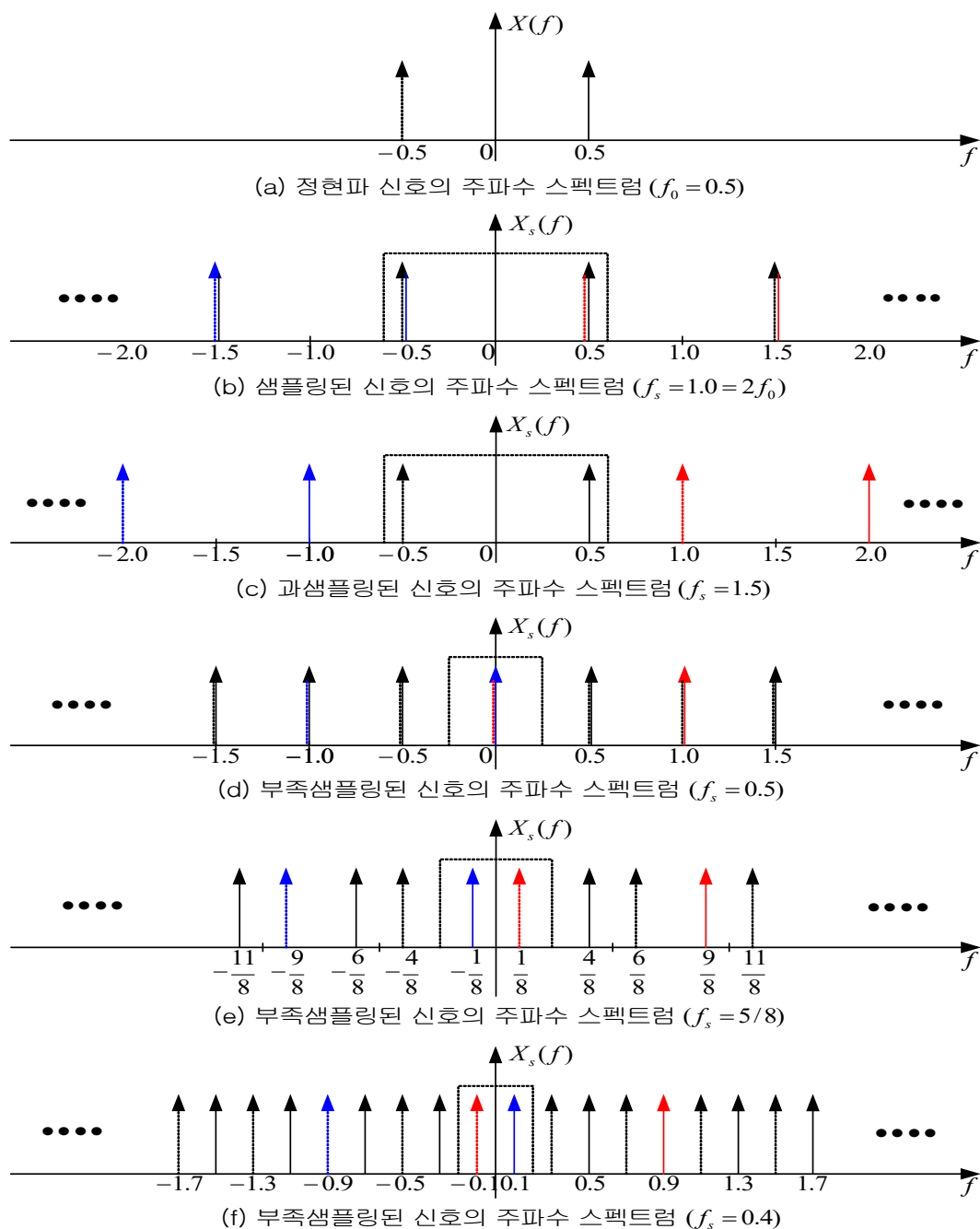
정현파 $x(t)$ 의 주파수는 $f_0 = 0.5[\text{Hz}]$ 이므로 주파수 스펙트럼이 [그림 C9-6(a)]와 같다. 그림에서 음의 주파수 스펙트럼 성분은 점선으로 나타내었다.

나이퀴스트 샘플링 주파수 $f_s = 1[\text{Hz}]$ 로 샘플링하면, [그림 C9-6(b)]와 같이 양과 음의 주파수 스펙트럼이 겹쳐지면서 반복되므로 기저대역에 다른 주파수 성분이 생기지 않는다. 그리고 더 높은 주파수 $f_s = 1.5[\text{Hz}]$ 로 샘플링하면, [그림 C9-6(c)]와 같이 주기 f_s 로 반복되는 주파수 스펙트럼이 겹쳐지지 않는다. 따라서 이 두 경우에는 저역 통과 필터를 이용하여 원래 신호를 그대로 걸러낼 수 있다. 즉, 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 높은 주파수로 샘플링하면($f_s \geq 2f_0$, 과샘플링), $|f_0 + lf_s| \geq f_0$ 이므로 통과대역 $f_s/2$ 내에 생기는 가장 낮은 주파수 성분은 원래 정현파의 주파수인 f_0 가 된다. 그러므로 이 경우에는 주파수 중첩에 의해 생기는 신호 왜곡을 피할 수 있다.

이제 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 낮은 주파수로 샘플링하는 부족샘플링의 경우를 생각해 보자. $f_s = f_0$ 가 되는 $f_s = 0.5[\text{Hz}]$ 로 샘플링을 할 경우, [그림 C9-6(d)]와 같이 중심 f_s 인 반복 스펙트럼의 음의 주파수 성분과 중심 $-f_s$ 인 반복 스펙트럼의 양의 주파수 성분이 모두 $0[\text{Hz}]$ 에 위치하여 전체 스펙트럼은 겉보기에 마치 직류(DC) 신호의 스펙트럼이 f_s 를 주기로 반복되는 것처럼 된다. 따라서 저역 통과 필터로 하나의 신호 성분만 걸러내면 원래의 정현파가 아니라 직류 성분만 뽑혀 나온다.

[그림 C9-6(e)]는 $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 의 경우인 $f_s = 5/8[\text{Hz}]$ 로 샘플링했을 때의 주파수 스펙트럼으로 다음과 같은 특이한 현상을 관찰할 수 있다. 스펙트럼의 중첩이 발생하여 더 낮은 주파수의 정현파 스펙트럼이 기저대역에 생기고, 겉보기에는 마치 이 스펙트럼이 f_s 주기로 반복되는 모양인 것은 앞의 경우와 다를 바가 없다. 하지만 **양의 주파수 성분이 점선이고 음의 주파수 성분이 실선으로 되어 위상 반전이 일어난다**는 점은 특별히 주목할 만하다. 이론적으로 해석하면, $|f_0 - f_s| \leq f_s/2 (\leq f_0)$ 이므로 앨리어스 중에 $f_0 - f_s = -1/8[\text{Hz}]$ 가

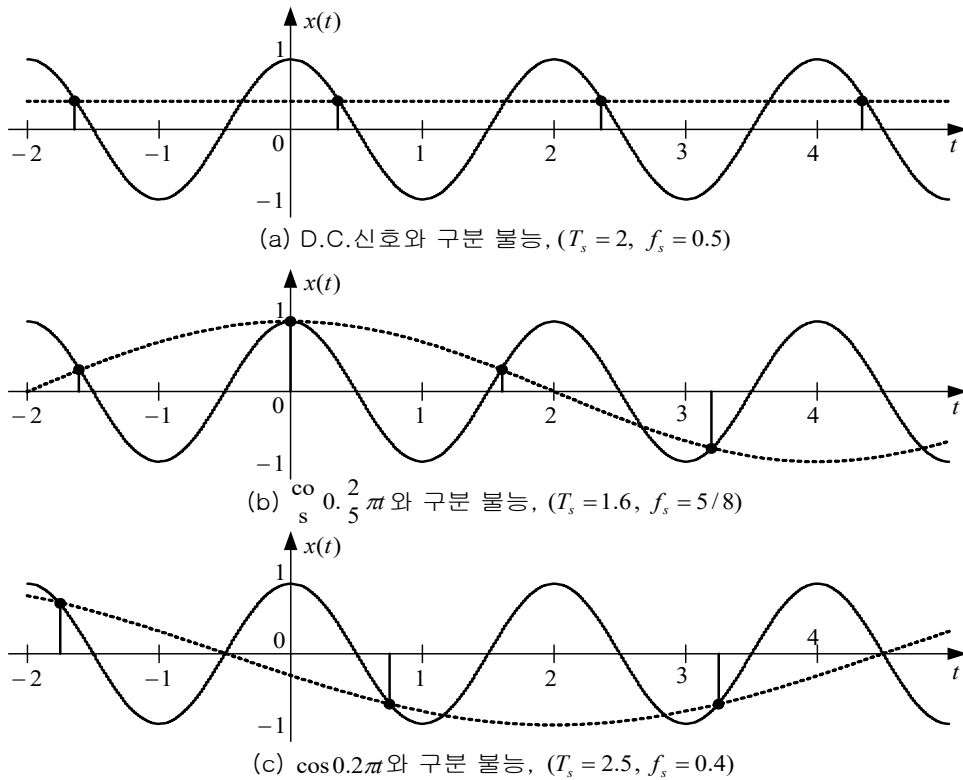
$f_s/2 = 5/16$ [Hz] 내의 가장 낮은 주파수가 된다. 따라서 이 음의 주파수를 갖는 정현파로 복원되어 위상 반전이 일어난다. 물리적으로 음의 주파수는 존재하지 않으므로 실제로는 $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 의 관계에 의해 $f_s - f_0$ 의 주파수를 갖는 정현파로 복원되고, 이때 보다시피 사인파는 부호가 바뀐다. 복원 신호의 스펙트럼 $1/8$ [Hz]는 꺾기 주파수 $5/16$ [Hz]을 축으로 원래 신호의 스펙트럼 $4/8$ [Hz]를 꺾어 접은 값과 같다는 것은 쉽게 확인할 수 있다.



[그림 C9-6] 주파수 스펙트럼을 이용한 샘플링과 주파수 중첩 현상 분석

마지막으로 [그림 C9-6(f)]는 $f_s = 0.4[\text{Hz}]$ 로 $f_s < f_0$ 인 부족샘플링의 경우이다. [그림 C9-6(e)]와 마찬가지로 스펙트럼의 겹침이 발생하여 f_s 와 $-f_s$ 를 중심으로 하는 스펙트럼에 의해 원래 신호의 주파수보다 낮은 $f_r = 0.1[\text{Hz}]$ 의 정현파 스펙트럼이 생기고, 겹쳐서 이 스펙트럼이 f_s 를 주기로 반복되는 양상을 보인다. 하지만 [그림 C9-6(e)]와 달리 위상 반전은 일어나지 않는데, 이는 $|f_0 - f_s| \leq f_s/2$ 로 $f_0 - f_s$ 가 가장 낮은 주파수의 앨리어스이기 때문이다.

지금까지 살펴본 것처럼 부족샘플링의 경우에는 주파수중첩이 발생하여 원래의 신호를 복원할 수 없다. [그림 C9-7]을 보면, 부족샘플링을 한 [그림 C9-6(d)], [그림 C9-6(e)], [그림 C9-6(f)]는 각각 그림에서 점선으로 나타낸 직류 신호, $\cos(-0.25\pi t) = \cos 0.25\pi t$, $\cos 0.2\pi t$ 를 샘플링한 것과 구분되지 않으며, 복원을 하게 되면 $\cos \pi t$ 보다 낮은 주파수를 갖는 이들 신호로 복원된다. ■



[그림 C9-7] 부족샘플링에 의한 이산 신호와 복원 신호

■ (책)[예제 9-6] 보충 설명

신호 $x(t)$ 를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 8/2 = 4$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1, f_2 = 3$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s, -f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	-3	-1	1

따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(-6\pi t) + \sin(-2\pi t) + \cos(2\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t) - \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) \\
 &= \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t)
 \end{aligned}$$

이번에는 $f_s = 12$ [Hz]로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 12/2 = 6$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 5$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s$, $-f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	5	-5	-3

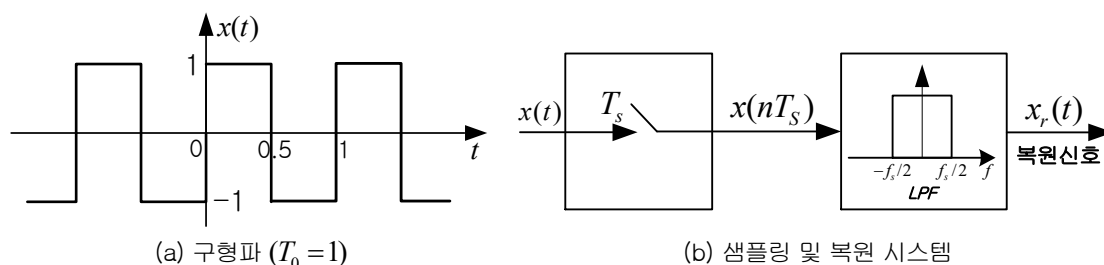
따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) + \sin(-10\pi t) + \cos(-6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) - \sin(10\pi t) + \cos(6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + 2\cos(6\pi t)
 \end{aligned}$$

다시 한번 강조하지만, 사인파의 주파수 꺾기에 의한 복원 신호는 위상 반전이 발생하여 부호가 바뀌게 된다는 것을 주의해야 한다. ■

■ 예제 C9-3 : 사각 펄스 신호의 샘플링과 복원

[그림 C9-8(a)]의 사각 펄스 신호 $x(t)$ 를 (b)에 나타낸 것처럼 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링한 뒤 다시 저역 통과 필터로 복원하려고 한다. 샘플링 주파수를 $f_s = 4$ [Hz], $f_s = 8$ [Hz]로 할 경우 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구하라.



[그림 C9-8] 사각 펄스 신호의 샘플링 및 복원 시스템

<풀이>

사각 펄스 신호 $x(t)$ 는 주기 $T_0 = 1$ 인 주기 신호이므로 푸리에 급수로 전개하여 정현파들의 일차 결합으로 나타낼 수 있고, 따라서 정현파의 앨리어스와 주파수 중첩에 대해 지금까지 살펴보았던 결과들을 손쉽게 적용할 수 있을 것이다.

그림에서 보듯이 주어진 신호는 기함수 대칭이며 반파 대칭이므로 푸리에 급수로 전개하면 홀수의 \sin 항만 존재한다. 즉

$$\begin{aligned} x(t) &= b_1 \sin(2\pi t) + b_3 \sin(6\pi t) + \dots + b_m \sin(2m\pi t) + \dots \\ &= \sum_{m=\text{odd}} b_m \sin(2\pi m t) = \sum_{m=\text{odd}} b_m \cos(2\pi m t - \pi/2) \end{aligned} \quad (\text{C9.7})$$

여기서 b_m 은 다음과 같이 구해지는 푸리에 계수이다.

$$b_m = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(m\pi t) dt = \frac{4}{m\pi}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

이 사각 펄스 신호는 주파수 $f_1 = f_0$, $f_3 = 3f_0$, $f_5 = 5f_0$, \dots 인 무한개의 주파수 성분을 포함하므로 대역 제한 신호가 아니다. 따라서 샘플링을 하게 되면 무한개의 주파수 성분 때문에 어떤 경우이든 주파수 중첩이 발생하게 될 것이며, 다만 샘플링 주파수를 높임에 따라 중첩되는 영역이 줄어들 것이다.

먼저 샘플링 주파수를 $f_s = 4[\text{Hz}]$ 로 할 경우에 대해서 살펴보자. 식 (C9.7)에서 $f_1 = 1[\text{Hz}]$ 인 기본파만 $f_s \geq 2f_1$ 로 샘플링 정리를 만족시킬 뿐 나머지 모든 고조파들에 대해 샘플링 주파수가 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 낮게 된다.

그러므로 샘플링한 이산 신호를 저역 통과 필터로 복원을 하면, 기본파만 그대로 복원되고 모든 고조파들은 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수를 갖는 앨리어스들로 복원이 될 것이다. 우선 $3, 7, 11, \dots, -1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{-1+4l} = -1 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수의 앨리어스가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 된다. 그리고 $5, 9, 13, \dots, 1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{1+4l} = 1 + lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수를 갖는 앨리어스가 된다. 따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(-2\pi t - \frac{\pi}{2})$$

그런데, 물리적으로 존재하지 않는 음의 주파수 정현파를 삼각함수의 성질을 이용하여 바꾸게 되면 **주파수 꺾기에 해당되는 고조파들에 대해서는 복원 신호의 위상 반전이 이루어져** 복원 신호는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \sin(2\pi t) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+4l} - b_{3+4l}) \sin(2\pi t) = A \sin(2\pi t)
\end{aligned}$$

위 식의 결과는 낮은 샘플링 주파수 때문에 구형파가 정현파로 완전히 왜곡되어 복원이 이루어지는 것을 보여주고 있다.

위 식의 마지막 등식 관계로부터 직접 복원 신호의 계수 A 를 구할 수도 있지만, 그보다는 각 샘플링 시각에서는 이산 신호와 복원 신호가 같다는 사실, 즉 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 임을 이용하는 것이 훨씬 간편하다. $T_s = 1/f_s = 1/4$ 이므로 $n=1$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$x_r(1/4) = A \sin(\pi/2) = x(1/4) = 1$$

이를 풀어 $A=1$ 을 얻고, 따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sin(2\pi t)$$

샘플링 주파수를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 올리게 되면 결과가 어떻게 달라질까?

이 경우에는 식 (C9.7)의 푸리에 급수 전개 표현에서 $f_s/2 = 4$ 보다 주파수가 낮아서 샘플링 정리를 만족시키는 정현파 성분은 $f_1 = 1$ 인 기본파와 $f_3 = 3$ 인 3고조파 두 개가 된다. 그러므로 저역 통과 필터로 복원을 하게 되면 이 두 정현파 성분만 그대로 복원되고, 이들을 제외한 나머지 고조파들은 주파수 중첩으로 인해 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수의 앨리어스들로 복원이 될 것이다.

7, 15, 23, ..., $-1+8l$, ... 고조파는 $f_{-1+8l} = -1+lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수 앨리어스이고, 5, 13, 21, ..., $-3+8l$, ... 고조파는 $f_{-3+8l} = -3+lf_s$ 을 만족하는 $-f_3 = -3$ 이 최저 주파수 앨리어스가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 되므로 각각 위상이 반전된 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다. 9, 17, 25, ..., $1+8l$, ... 고조파는 $f_{1+8l} = 1+lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수 앨리어스이고, 11, 19, 27, ..., $3+8l$, ... 고조파는 $f_{3+8l} = 3+lf_s$ 을 만족하는 $f_3 = 3$ 이 최저 주파수 앨리어스이므로, 각각 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다.

따라서 전체적인 복원 신호는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+8l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{7+8l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+8l} \cos(6\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{5+8l} \cos(6\pi t + \frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+8l} - b_{7+8l}) \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} (b_{3+8l} - b_{5+8l}) \sin(6\pi t) \\
&= B \sin(2\pi t) + C \sin(6\pi t)
\end{aligned}$$

앞의 경우와 마찬가지로 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 을 이용하여 위 식의 계수를 구할 수 있다. $T_s = 1/f_s = 1/8$ 이므로 $n = 1, 2$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$B \sin(\pi/4) + C \sin(3\pi/4) = \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}} = 1$$

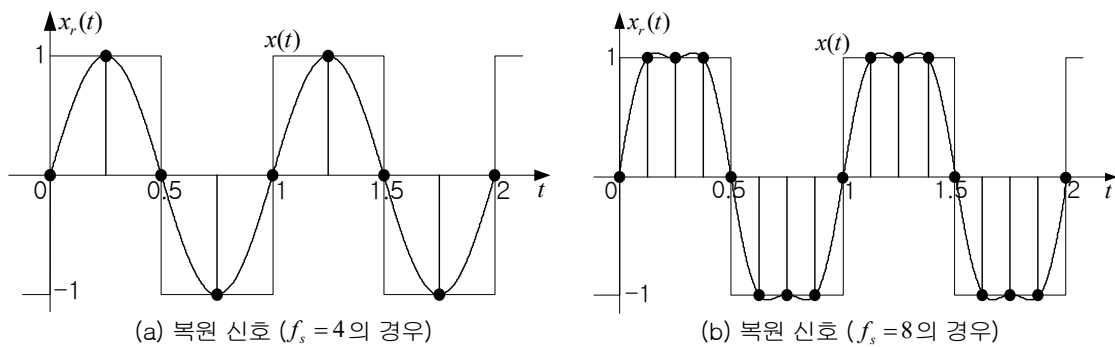
$$B \sin(\pi/2) + C \sin(3\pi/2) = B - C = 1$$

이를 풀면,

$$\begin{aligned}
B &= (\sqrt{2} + 1)/2 \\
C &= (\sqrt{2} - 1)/2
\end{aligned}$$

따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sin(6\pi t)$$



[그림 C9-9] 주파수 중첩으로 인해 왜곡된 복원 신호

[그림 C9-9]에 두 샘플링 주파수에 대한 복원 신호의 파형을 보였다. 샘플링 주파수를 2배로 올린 $f_s = 8$ [Hz]일 때의 복원 신호는 기본파 성분 외에 3고조파 성분이 추가되어 $f_s = 4$ [Hz]일 때의 복원 신호보다 좀 더 구형파에 가깝다. 이로부터 샘플링 주파수를 높일수록 더 많은 고조파 성분이 복원 신호에 포함되어 점점 구형파에 가까우리라 예측할 수 있다. ■

9.3 진폭 변조

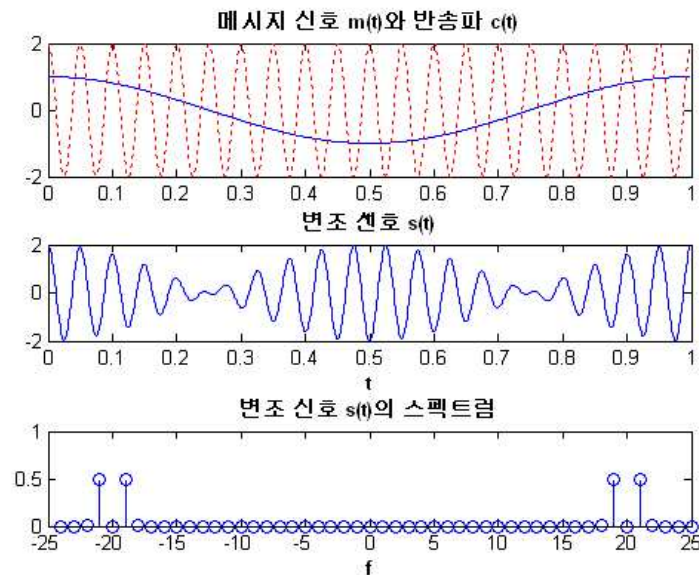
8.3절 푸리에 변환의 성질에서 설명한 진폭 변조 방식은 다음과 같이 단순히 메시지 신호 $m(t)$ 에 반송파 $c(t) = A_c \cos(\omega_c t)$ 를 곱하여 변조 신호 $s(t)$ 를 만드는 방식으로, 다음과 같이 나타낸다.

$$s(t) = m(t)c(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t) \quad (C9.8)$$

이 방식은 양측파대-반송파 억압(DSB-SC^{Double SideBand-Suppressed Carrier}) 방식이라고 하는데, 수신단에서 동기 검출^{coherent detection}이 필요하므로 수신 시스템 구성이 복잡해진다.

메시지 신호 $m(t) = \cos(2\pi t)$ 를 전송하기 위하여 반송파 $c(t) = 2\cos(40\pi t)$ 로 진폭 변조하는 문제를 생각해 보자. 이 경우 메시지 신호 $m(t)$ 의 주파수는 1[Hz], 반송파 $c(t)$ 의 주파수는 20[Hz]이다.

DSB-SC 방식으로 변조한 변조 신호 $s(t)$ 와 스펙트럼을 [그림 C9-10]에 나타내었다. 그림에서 스펙트럼은 정확히 반송파 주파수만큼 대역 이동된 것을 확인할 수 있다.



[그림 C9-10] DSB-SC 변조 신호의 파형과 스펙트럼

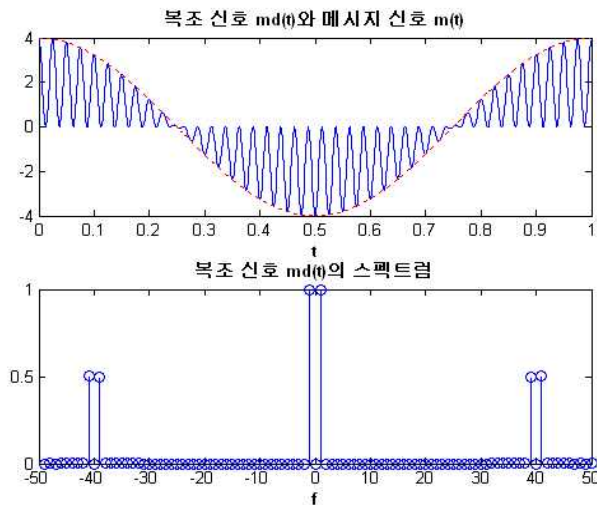
변조된 신호의 복조를 위해서는 우선 다음과 같이 변조 신호에 다시 반송파를 곱한다.

$$m_d(t) = s(t)c(t) = m(t)(A_c \cos(\omega_c t))^2 = \frac{A_c^2}{2} m(t)(1 + \cos(2\omega_c t)) \quad (C9.9)$$

$m_d(t)$ 는 크기가 $A_c^2/2$ 배된 메시지 신호와 이 신호를 주파수 $2\omega_c$ 로 변조하여 대역 이동시킨 신호의 합이다. $m_d(t)$ 를 푸리에 변환하여 스펙트럼을 구해보면 다음과 같이 된다.

$$M_d(\omega) = \frac{A_c^2}{2}M(\omega) + \frac{A_c^2}{4}(M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c)) \quad (C9.10)$$

따라서 $m_d(t)$ 를 차단 주파수가 반송파 주파수보다 낮은 저역 통과 필터에 통과시킨 뒤 크기만 조정하면 원래의 메시지 신호 $m(t)$ 를 얻을 수 있다. $m_d(t)$ 의 파형과 스펙트럼은 [그림 C9-11]에 나타내었다. 그림에서 보면, $m_d(t)$ 의 시간 파형의 포락선이 메시지 신호 $m(t)$ 임을 알 수 있다. 또한 $m_d(t)$ 의 스펙트럼은 기저 대역에 메시지 신호의 스펙트럼이 나타나므로 저역 통과 필터로 이를 걸러내어 원래의 메시지 신호를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.



[그림 C9-11] DSB-SC 복조 신호의 파형과 스펙트럼

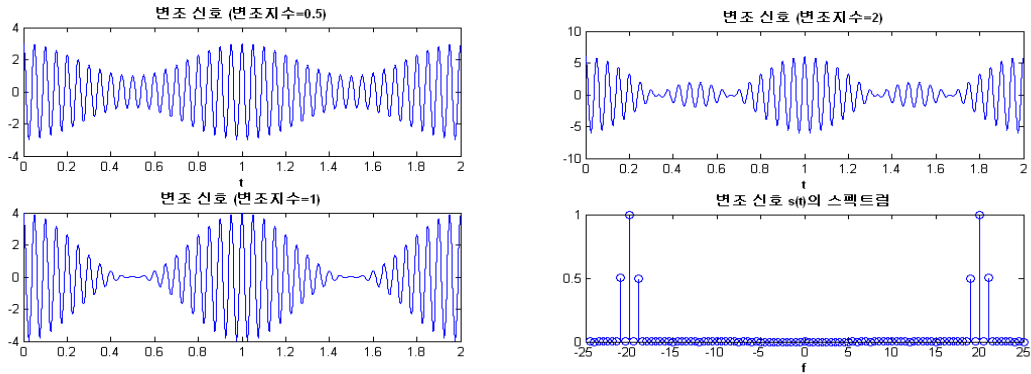
실제 방송국에서 AM 방송에 사용하는 진폭 변조 방식은 양측파대-큰 반송파(DSB-LC^{Double SideBand-Large Carrier}) 방식이다. 이 방식에서는 다음과 같이 메시지 신호 $m(t)$ 에 반송파 $c(t)$ 를 곱하고 다시 반송파를 더하여 전송을 위한 변조 신호 $s(t)$ 를 만든다.

$$s(t) = A_c(1 + k_a m(t))\cos(\omega_c t) \quad (C9.11)$$

여기서 k_a 는 변조기의 진폭 민감도 지수이다. 이 방식은 DSB-SC 방식에 비해 전력 낭비 등의 문제점이 있지만, 수신단에서 간단한 다이오드 회로로 구성된 포락선 검파기로 쉽게 복조할 수 있으므로 하나의 송신자에 매우 많은 수신자가 존재하는 방송에는 더 적합하다.

DSB-SC 방식에서 살펴보았던 문제를 DSB-LC 방식으로 변조한 변조 신호와 스펙트럼은 [그림 C9-12]에 나타내었다. 그림에서 k_a 의 값에 따라 변조 신호의 파형이 달라짐을 볼 수

있는데, 엄밀히 이야기하면 이런 변조 파형의 구분은 k_a 보다 변조 지수에 의해 이루어진다. 메시지 신호의 최대값을 m_{\max} 라고 하면 변조 지수는 $\mu = k_a m_{\max}$ 로 정의되며, $\mu \leq 1$ 이면 부족변조, $\mu > 1$ 이면 과변조라고 한다. 그림에서 보듯이 부족변조의 경우에만 변조 신호의 포락선이 메시지 신호의 파형에 대응되고, 과변조에서는 포락선 왜곡이 발생한다. 이 문제의 경우에는 메시지 신호의 최대값 $m_{\max} = 1$ 이므로 진폭 민감도 지수 k_a 와 변조 지수 μ 가 같아서 $k_a = 2 > 1$ 인 경우에는 포락선 왜곡이 발생하는 것을 그림에서 확인할 수 있다.



[그림 C9-12] DSB-LC 변조 신호의 파형과 스펙트럼

DSB-SC의 경우와 마찬가지로 변조 신호에 다시 반송파를 곱하면

$$\begin{aligned} m_d(t) &= s(t)c(t) = (1 + k_a m(t))(A_c \cos(\omega_c t))^2 = \frac{A_c^2}{4}(1 + k_a m(t))(1 + \cos(2\omega_c t)) \quad (C9.12) \\ &= \frac{A_c^2}{4}(1 + k_a m(t) + \cos(2\omega_c t) + k_a m(t)\cos(2\omega_c t)) \end{aligned}$$

와 같이 된다. 보다시피 $m_d(t)$ 에는 DSB-SC의 경우와 달리 상수(직류)와 $\cos 2\omega_c t$ 가 추가되어 있다. 따라서 $m_d(t)$ 의 스펙트럼에는 주파수 0과 $\pm 2\omega_c$ 에서 임펄스가 존재하므로, 저역 통과 필터를 사용하여 기저 대역의 메시지 신호의 스펙트럼만 추출할 수 없다.

진폭 변조에 대한 상세한 내용은 통신 이론 서적들을 참조하기 바란다.